2018年普通高等学校招生全国统一考试(北京卷)数学理

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.已知集合A={x||x|＜2}，B={-2，0，1，2}，则A∩B=(　　)

A.{0，1}

B.{-1，0，1}

C.{-2，0，1，2}

D.{-1，0，1，2}

解析：∵集合A={x||x|＜2}={x|-2＜x＜2}，B={-2，0，1，2}，∴A∩B={0，1}.

答案：A

2.在复平面内，复数$\frac{1}{1-i}$的共轭复数对应的点位于(　　)

A.第一象限

B.第二象限

C.第三象限

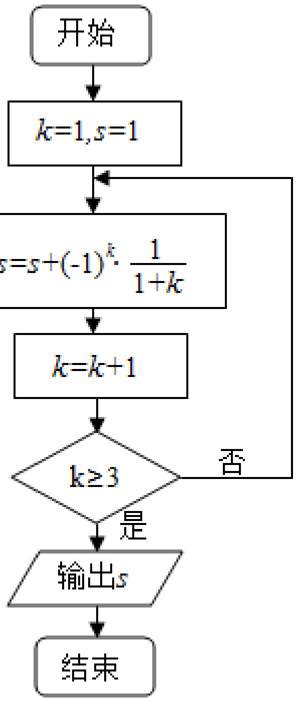
D.第四象限

解析：复数$\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，

共轭复数对应点的坐标$(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$在第四象限.

答案：D

3.执行如图所示的程序框图，输出的s值为(　　)



A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{7}{6}$

D. $\frac{7}{12}$

解析：在执行第一次循环时，k=1，S=1.

在执行第一次循环时，S=1-$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.由于 k=2≤3，

所以执行下一次循环.S=$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$，k=3，直接输出 S=$\frac{5}{6}$.

答案：B

4.“十二平均律”是通用的音律体系，明代朱载堉最早用数学方法计算出半音比例，为这个理论的发展做出了重要贡献，十二平均律将一个纯八度音程分成十二份，依次得到十三个单音，从第二个单音起，每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于$\sqrt[12]{2}$.若第一个单音的频率为 f，则第八个单音的频率为(　　)

A. $\sqrt[3]{2}f$

B. $\sqrt[3]{2^2}f$

C. $\sqrt[12]{2^5}f$

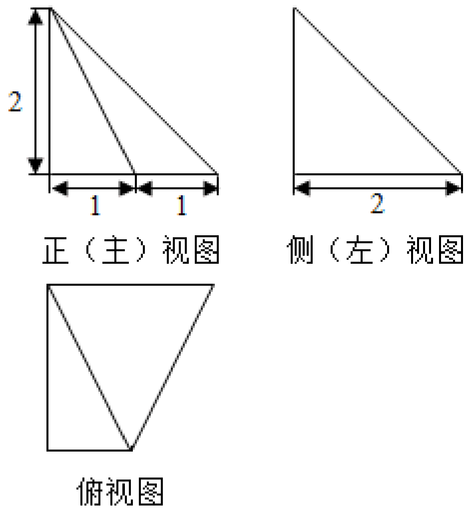
D. $\sqrt[12]{2^7}\,f$

解析：从第二个单音起，每一个单音的频率与它的前一个单音的频率的比都等于 $\sqrt[12]{2}$.

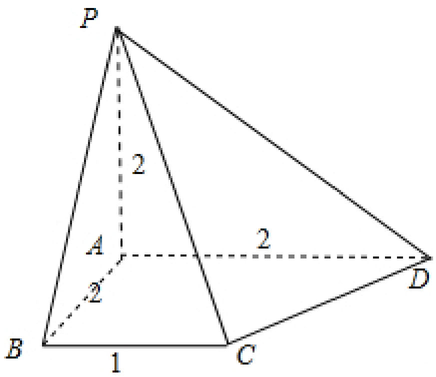
若第一个单音的频率为 f，则第八个单音的频率为：$\left(\sqrt[12]{2}\right)^7 ?f=\sqrt[12]{2^7}\,f$.

答案：D

5. 某四棱锥的三视图如图所示，在此四棱锥的侧面中，直角三角形的个数为(　　)



A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
解析：四棱锥的三视图对应的直观图为：PA⊥底面 ABCD，



$AC=\sqrt{5}$，$CD=\sqrt{5}$，PC=3，PD=$2\sqrt{2}$，可得三角形 PCD 不是直角三角形.

所以侧面中有 3 个直角三角形，分别为：△PAB，△PBC，△PAD.
答案：C

6. 设 $\vec{a},\vec{b}$ 均为单位向量，则“$\left|\vec{a}-3\vec{b}\right|=\left|3\vec{a}+\vec{b}\right|$”是“$\vec{a}\perp\vec{b}$”的(　　)

A.充分而不必要条件
B.必要而不充分条件
C.充分必要条件
D.既不充分也不必要条件

解析：∵“$\left|\vec{a}-3\vec{b}\right|=\left|3\vec{a}+\vec{b}\right|$”∴平方得$\left|\vec{a}\right|^2+9\left|\vec{b}\right|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2+9\left|\vec{b}\right|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}$=0，

即$\vec{a}\perp\vec{b}$，则“$\left|\vec{a}-3\vec{b}\right|=\left|3\vec{a}+\vec{b}\right|$”是“$\vec{a}\perp\vec{b}$”的充要条件.

答案：C

7.在平面直角坐标系中，记 d 为点 P(cosθ，sinθ)到直线 x-my-2=0 的距离.当θ、m 变化时，d 的最大值为(　　)
A.1
B.2
C.3
D.4

解析：由题意 d=$\frac{\left|\cos\theta-m\sin\theta-2\right|}{\sqrt{1^2+m^2}}=\frac{\left|\sqrt{m^2+1}\sin(\theta+\alpha)-2\right|}{\sqrt{m^2+1}}$，tanα=$-\frac{1}{m}$，

∴当 sin(θ+α)=-1 时，$d_{max}=1+\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$≤3.∴d 的最大值为 3.

答案：C

8.设集合 A={(x，y)|x-y≥1，ax+y＞4，x-ay≤2}，则(　　)
A.对任意实数 a，(2，1)∈A
B.对任意实数 a，(2，1)∉A
C.当且仅当 a＜0 时，(2，1)∉A
D.当且仅当 a≤$\frac{3}{2}$时，(2，1)∉A
解析：当 a=-1 时，集合 A={(x，y)|x-y≥1，ax+y＞4，x-ay≤2}={(x，y)|x-y≥1，-x+y＞4，x+y≤2}，显然(2，1)不满足，-x+y＞4，x+y≤2，所以 A，C 不正确；
当 a=4，集合 A={(x，y)|x-y≥1，ax+y＞4，x-ay≤2}={(x，y)|x-y≥1，4x+y＞4，x-4y≤2}，显然(2，1)在可行域内，满足不等式，所以 B 不正确.
答案：D

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9.设$\{a_n\}$是等差数列，且 a_1=3，a_2+a_5=36，则$\{a_n\}$的通项公式为__________.
解析：∵$\{a_n\}$是等差数列，且 a_1=3，a_2+a_5=36，

∴$\begin{cases}a_1=3,\\ a_1+d+a_1+4d=36,\end{cases}$解得 a_1=3，d=6，

∴$a_n=a_1+(n-1)d=3+(n-1)\times6=6n-3$.∴$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=6n-3$.

答案：$a_n=6n-3$

10.在极坐标系中，直线$\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=a(a>0)$与圆$\rho=2\cos\theta$相切，则a=__________.

解析：圆$\rho=2\cos\theta$，转化成：$\rho^2=2\rho\cos\theta$，进一步转化成直角坐标方程为：$(x-1)^2+y^2=1$，把直线$\rho(\cos\theta+\sin\theta)=a$的方程转化成直角坐标方程为：$x+y-a=0$.

由于直线和圆相切，所以：利用圆心到直线的距离等于半径.则：$\frac{|1-a|}{\sqrt{2}}=1$，

解得：$a=1\pm\sqrt{2}$. $a>0$，则负值舍去.故：$a=1+\sqrt{2}$.

答案：$1+\sqrt{2}$

11.设函数$f(x)=\cos(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$，若$f(x)\leqslant f(\frac{\pi}{4})$对任意的实数x都成立，则ω的最小值为__________.

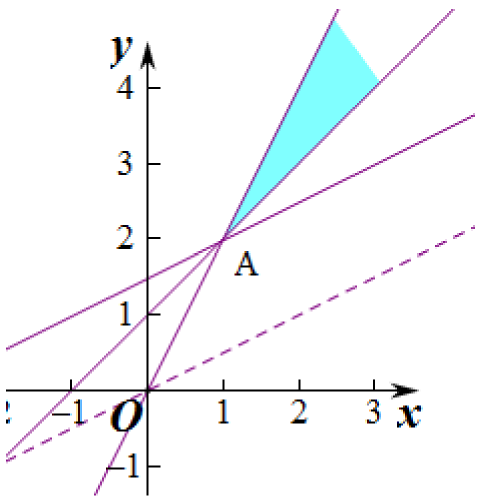
解析：函数$f(x)=\cos(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$，若$f(x)\leqslant f(\frac{\pi}{4})$对任意的实数x都成立，

可得：$\omega\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=2k\pi$，$k\in Z$，解得$\omega=8k+\frac{2}{3}$，$k\in Z$，$\omega>0$，则ω的最小值为：$\frac{2}{3}$.

答案：$\frac{2}{3}$

12.若x，y满足$x+1\leqslant y\leqslant 2x$，则$2y-x$的最小值是__________.

解析：作出不等式组对应的平面区域如图：



设$z=2y-x$，则$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$，平移$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$，

由图象知当直线$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$经过点A时，

直线的截距最小，此时z最小，

由$\begin{cases}x+1=y,\\y=2x,\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$即 A(1，2)，此时 z=2×2-1=3.

答案：3

13.能说明“若 f(x)＞f(0)对任意的 x∈(0，2]都成立，则 f(x)在[0，2]上是增函数”为假命题的一个函数是__________.

解析：例如 f(x)=sinx，

尽管 f(x)＞f(0)对任意的 x∈(0，2]都成立，

当 x∈[0，$\frac{\pi}{2}$)上为增函数，在($\frac{\pi}{2}$，2]为减函数.

答案：f(x)=sinx

14.已知椭圆 M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞b＞0)，双曲线 N：$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$.若双曲线 N 的两条渐近线与椭圆 M 的四个交点及椭圆 M 的两个焦点恰为一个正六边形的顶点，则椭圆 M 的离心率为_________；双曲线 N 的离心率为__________.

解析：椭圆 M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞b＞0)，双曲线 N：$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$.若双曲线 N 的两条渐近线与椭圆 M 的四个交点及椭圆 M 的两个焦点恰为一个正六边形的顶点，

可得椭圆的焦点坐标(c，0)，正六边形的一个顶点($\frac{c}{2},\frac{\sqrt{3}c}{2}$)，可得：$\frac{c^2}{4a^2}+\frac{3c^2}{4b^2}=1$，可得$\frac{1}{4}e^2+\frac{3}{4\left(\frac{1}{e^2}-1\right)}=1$，可得 $e^4-8e^2+4=0$，e∈(0，1)，解得 e=$\sqrt{3}$-1.

同时，双曲线的渐近线的斜率为$\sqrt{3}$，即$\frac{n}{m}=\sqrt{3}$，

可得：$\frac{n^2}{m^2}$=3，即$\frac{m^2+n^2}{m^2}$=4，可得双曲线的离心率为 e=$\sqrt{\frac{m^2+n^2}{m^2}}$=2.

答案：$\sqrt{3}$-1；2

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步或证明过程。

15.在△ABC 中，a=7，b=8，cosB=$-\frac{1}{7}$.

(Ⅰ)求∠A;

(Ⅱ)求 AC 边上的高.

解析：(Ⅰ)由正弦定理结合大边对大角进行求解即可.

(Ⅱ)利用余弦定理求出 c 的值，结合三角函数的高与斜边的关系进行求解即可.

答案：(Ⅰ)∵a＜b，∴A＜B，即 A 是锐角，

∵$\cos B=-\frac{1}{7}$，∴$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ 得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{7\times\frac{4\sqrt{3}}{7}}{8}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $A=\frac{\pi}{3}$.

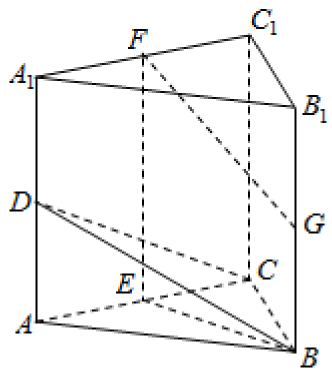
(Ⅱ)由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

即 $64=49+c^2+2\times7\times c\times\frac{1}{7}$，即 $c^2+2c-15=0$，

得 $(c-3)(c+5)=0$，得 c=3 或 c=-5(舍)，

则 AC 边上的高 $h=c\sin A=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

16.如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1\perp$平面 ABC，D，E，F，G 分别为 AA_1，AC，A_1C_1，BB_1 的中点，$AB=BC=\sqrt{5}$，$AC=AA_1=2$.

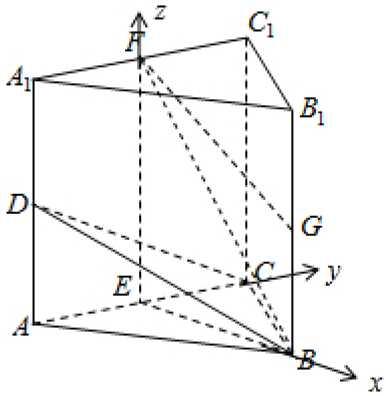


(I)求证：AC⊥平面 BEF；
(Ⅱ)求二面角 $B-CD-C_1$ 的余弦值；
(III)证明：直线 FG 与平面 BCD 相交.
解析：(I)证明 AC⊥BE，AC⊥EF 即可得出 AC⊥平面 BEF；

(II)建立坐标系，求出平面 BCD 的法向量 $\vec{n}$，通过计算 $\vec{n}$ 与 $\overrightarrow{EB}$ 的夹角得出二面角的大小；

(III)计算 $\overrightarrow{FG}$ 与 $\vec{n}$ 的数量积即可得出结论.

答案：(I)∵E，F 分别是 AC，A_1C_1 的中点，∴$EF\parallel CC_1$，
∵$CC_1\perp$平面 ABC，∴EF⊥平面 ABC，
又 AC⊂平面 ABC，∴EF⊥AC，
∵AB=BC，E 是 AC 的中点，∴BE⊥AC，
又 BE∩EF=E，BE⊂平面 BEF，EF⊂平面 BEF，∴AC⊥平面 BEF.
(II)以 E 为原点，以 EB，EC，EF 为坐标轴建立空间直角坐标系如图所示：



则 B(2，0，0)，C(0，1，0)，D(0，-1，1)，

∴ $\overrightarrow{BC}$ =(-2，1，0)，$\overrightarrow{CD}$ =(0，-2，1)，

设平面 BCD 的法向量为 n=(x，y，z)，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-2x+y=0,\\ -2y+z=0,\end{cases}$ 令 y=2 可得 $\vec{n}$ =(1，2，4)，又 EB⊥平面 ACC_1A_1，

∴EB=(2，0，0)为平面 CD-C_1 的一个法向量，

∴cos＜$\vec{n}$,$\overrightarrow{EB}$＞ $=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{EB}}{|\vec{n}||\overrightarrow{EB}|}=\dfrac{2}{\sqrt{21}\times 2}=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

由图形可知二面角 B-CD-C_1 为钝二面角，∴二面角 B-CD-C_1 的余弦值为-$\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.

(III)F(0，0，2)，G(2，0，1)，∴ $\overrightarrow{FG}$ =(2，0，-1)，

∴ $\overrightarrow{FG}\cdot\vec{n}$ =2+0-4=-2≠0，∴ $\overrightarrow{FG}$ 与 $\vec{n}$ 不垂直，

∴ $\overrightarrow{FG}$ 与平面 BCD 不平行，又 FG$\not\subset$ 平面 BCD，∴FG 与平面 BCD 相交.

17. 电影公司随机收集了电影的有关数据，经分类整理得到下表：

电影类型	第一类	第二类	第三类	第四类	第五类	第六类
电影部数	140	50	300	200	800	510
好评率	0.4	0.2	0.15	0.25	0.2	0.1

好评率是指：一类电影中获得好评的部数与该类电影的部数的比值.

假设所有电影是否获得好评相互独立.

(Ⅰ)从电影公司收集的电影中随机选取 1 部，求这部电影是获得好评的第四类电影的概率；

(Ⅱ)从第四类电影和第五类电影中各随机选取 1 部，估计恰有 1 部获得好评的概率；

(Ⅲ)假设每类电影得到人们喜欢的概率与表格中该类电影的好评率相等.用“$\xi_k=1$”表示第k类电影得到人们喜欢.“$\xi_k=0$”表示第k类电影没有得到人们喜欢(k=1，2，3，4，5，6).写出方差$D\xi_1$，$D\xi_2$，$D\xi_3$，$D\xi_4$，$D\xi_5$，$D\xi_6$的大小关系.

解析：(Ⅰ)先求出总数，再求出第四类电影中获得好评的电影的部数，利用古典概型概率计算公式直接求解.

(Ⅱ)设事件B表示“从第四类电影和第五类电影中各随机选取1部，恰有1部获得好评”，第四类获得好评的有50部，第五类获得好评的有160部，由此能求出从第四类电影和第五类电影中各随机选取1部，估计恰有1部获得好评的概率.

(Ⅲ)由题意知，定义随机变量如下：$\xi_k=\begin{cases}0，第k类电影没有得到人们喜欢\\1，第k类电影得到人们喜欢\end{cases}$ 则ξ_k服从两点分布，分别求出六类电影的分布列及方差由此能写出方差$D\xi_1$，$D\xi_2$，$D\xi_3$，$D\xi_4$，$D\xi_5$，$D\xi_6$的大小关系.

答案：(Ⅰ)设事件A表示“从电影公司收集的电影中随机选取1部，求这部电影是获得好评的第四类电影”，

总的电影部数为140+50+300+200+800+510=2000部，

第四类电影中获得好评的电影有：200×0.25=50部，

∴从电影公司收集的电影中随机选取1部，求这部电影是获得好评的第四类电影的频率为：

$P(A)=\frac{50}{200}=0.025$.

(Ⅱ)设事件B表示“从第四类电影和第五类电影中各随机选取1部，恰有1部获得好评”，

第四类获得好评的有：200×0.25=50部，

第五类获得好评的有：800×0.2=160部，

则从第四类电影和第五类电影中各随机选取1部，估计恰有1部获得好评的概率：

$P(B)=\frac{50\times(800-160)+(200-50)\times160}{200\times800}=0.35$.

(Ⅲ)由题意知，定义随机变量如下：

$\xi_k=\begin{cases}0，第k类电影没有得到人们喜欢\\1，第k类电影得到人们喜欢\end{cases}$，则$\xi$ k 服从两点分布，则六类电影的分布列及方差计算如下：

第一类电影：

ξ_1	1	0
P	0.4	0.6

$E(\xi_1)=1\times0.4+0\times0.6=0.4$，

$D(\xi_1)=(1-0.4)^2\times0.4+(0-0.4)^2\times0.6=0.24$.

第二类电影：

ξ_2	1	0
P	0.2	0.8

$E(\xi_2)=1\times0.2+0\times0.8=0.2$，

$D(\xi_2)=(1-0.2)^2\times0.2+(0-0.2)^2\times0.8=0.16$.

第三类电影：

ξ_3	1	0
P	0.15	0.85

$E(\xi_3)=1\times0.15+0\times0.85=0.15$，

$D(\xi_3)=(1-0.15)^2\times0.15+(0-0.85)^2\times0.85=0.1275$.

第四类电影：

ξ_4	1	0
P	0.25	0.75

$E(\xi^4)=1\times0.25+0\times0.75=0.15$，

$D(\xi^4)=(1-0.25)^2\times0.25+(0-0.75)^2\times0.75=0.1875$.

第五类电影：

ξ_5	1	0
P	0.2	0.8

$E(\xi_5)=1\times0.2+0\times0.8=0.2$，

$D(\xi_5)=(1-0.2)^2\times0.2+(0-0.2)^2\times0.8=0.16$.

第六类电影：

ξ_6	1	0
P	0.1	0.9

$E(\xi_6)=1\times0.1+0\times0.9=0.1$，

$D(\xi_6)=(1-0.1)^2\times0.1+(0-0.1)^2\times0.9=0.09$.

∴方差 $D\xi_1$，$D\xi_2$，$D\xi_3$，$D\xi_4$，$D\xi_5$，$D\xi_6$的大小关系为：$D\xi_6<D\xi_3<D\xi_2=D\xi_5<D\xi_4<D\xi_1$.

18.设函数 $f(x)=[ax^2-(4a+1)x+4a+3]e^x$.

(Ⅰ)若曲线 $y=f(x)$在点(1，$f(1)$)处的切线与 x 轴平行，求 a；

(Ⅱ)若 f(x)在 x=2 处取得极小值，求 a 的取值范围.
(III)求证：EF∥平面 PCD.
解析：(Ⅰ)求得 f(x)的导数，由导数的几何意义可得 f′(1)=0，解方程可得 a 的值；
(Ⅱ)求得 f(x)的导数，注意分解因式，讨论 a=0，a=$\frac{1}{2}$，a>$\frac{1}{2}$，0<a<$\frac{1}{2}$，a<0，由极小值的定义，即可得到所求 a 的范围.
答案：(Ⅰ)函数 f(x)=[ax^2-(4a+1)x+4a+3]ex 的导数为 f′(x)=[ax^2-(2a+1)x+2]e^x.
由题意可得曲线 y=f(x)在点(1，f(1))处的切线斜率为 0，
可得(a-2a-1+2)e=0，解得 a=1；
(Ⅱ)f(x)的导数为 f′(x)=[ax^2-(2a+1)x+2]e^x=(x-2)(ax-1)e^x，
若 a=0 则 x<2 时，f′(x)>0，f(x)递增；x>2，f′(x)<0，f(x)递减.
x=2 处 f(x)取得极大值，不符题意；
若 a>0，且 a=$\frac{1}{2}$，则 f′(x)=$\frac{1}{2}$(x-2)$^2e^x$≥0，f(x)递增，无极值；
若 a>$\frac{1}{2}$，则$\frac{1}{a}$<2，f(x)在(1a，2)递减；在(2，+∞)，(-∞，$\frac{1}{a}$)递增，
可得 f(x)在 x=2 处取得极小值；
若 0<a<$\frac{1}{2}$，则$\frac{1}{a}$>2，f(x)在(2，$\frac{1}{a}$)递减；在($\frac{1}{a}$，+∞)，(-∞，2)递增，
可得 f(x)在 x=2 处取得极大值，不符题意；
若 a<0，则$\frac{1}{a}$<2，f(x)在($\frac{1}{a}$，2)递增；在(2，+∞)，(-∞，$\frac{1}{a}$)递减，
可得 f(x)在 x=2 处取得极大值，不符题意，
综上可得，a 的范围是($\frac{1}{2}$，+∞).

19.已知抛物线 C：y^2=2px 经过点 P(1，2)，过点 Q(0，1)的直线 l 与抛物线 C 有两个不同的交点 A，B，且直线 PA 交 y 轴于 M，直线 PB 交 y 轴于 N.
(Ⅰ)求直线 l 的斜率的取值范围；
(Ⅱ)设 O 为原点，$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO},\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QO}$,求证：$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$为定值.
解析：(Ⅰ)将 P 代入抛物线方程，即可求得 p 的值，设直线 AB 的方程，代入椭圆方程，由△>0，即可求得 k 的取值范围；
(Ⅱ)根据向量的共线定理即可求得λ=1-y_M，μ=1-y_N，求得直线 PA 的方程，令 x=0，求得 M 点坐标，同理求得 N 点坐标，根据韦达定理即可求得$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}$为定值.
答案：(Ⅰ)∵抛物线 C：y^2=2px 经过点，
P(1，2)，∴4=2p，解得 p=2，
设过点(0，1)的直线方程为 y=kx+1，
设 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)，
联立方程组可得$\begin{cases}y^2=4x,\\y=kx+1,\end{cases}$消 y 可得 k^2x^2+(2k-4)x+1=0，

∴△=$(2k-4)^2-4k^2>0$，且 k≠0 解得 k＜1，

且 k≠0，$x_1+x_2=-\dfrac{2k-4}{k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{k^2}$，

故直线 l 的斜率的取值范围(-∞，0)∪(0，1)；

(Ⅱ)设点 M(0，y_M)，N(0，y_N)，

则$\overrightarrow{QM}$=(0，y_M-1)，$\overrightarrow{QO}$=(0，-1)，

因为$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QO}$，所以 $y_M-1=-y_M-1$，故λ=$1-y_M$，同理μ=$1-y_N$，

直线 PA 的方程为$y-2=\dfrac{2-y_1}{1-x_1}(x-1)=\dfrac{2-y_1}{1-\dfrac{y_1^2}{4}}(x-1)=\dfrac{4}{2+y_1}(x-1)$，

令 x=0，得 $y_M=2y_12+y_1$，同理可得 $y_N=2y_22+y_2$，

因为$\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{1}{1-y_M}+\dfrac{1}{1-y_N}=\dfrac{2+y_1}{2-y_1}+\dfrac{2+y_2}{2-y_2}$

$$=\frac{8-2y_1y_2}{(2-y_1)(2-y_2)}=\frac{8-2(kx_1+1)(kx_2+1)}{1-k(x_1+x_2)+k_2x_1x_2}=\frac{8-\left[k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1\right]}{1-k(x_1+x_2)+k^2x_1x_2}$$

$$=\frac{8-2\left(1+\dfrac{4-2k}{k}+1\right)}{1-\dfrac{4-2k}{k}k+1}=\frac{4-2\times\dfrac{4-2k}{k}}{2-\dfrac{4-2k}{k}}=2,$$

∴$\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}=2,\therefore\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{1}{\mu}$为定值.

20.设 n 为正整数，集合 A={α|α=(t_1，t_2，…t_n)，t_k∈{0，1}，k=1，2，…，n}，对于集合 A 中的任意元素α=(x_1，x_2，…，x_n)和β=(y_1，y_2，…y_n)，记 M(α，β)=$\dfrac{1}{2}$[($x_1+y_1-|x_1-y_1|$)+($x_2+y_2-|x_2-y_2|$)+…($x_n+y_n-|x_n-y_n|$)].

(Ⅰ)当 n=3 时，若α=(1，1，0)，β=(0，1，1)，求 M(α，α)和 M(α，β)的值；

(Ⅱ)当 n=4 时，设 B 是 A 的子集，且满足：对于 B 中的任意元素α，β，当α，β相同时，M(α，β)是奇数；当α，β不同时，M(α，β)是偶数.求集合 B 中元素个数的最大值；

(III)给定不小于 2 的 n，设 B 是 A 的子集，且满足：对于 B 中的任意两个不同的元素α，β，M(α，β)=0，写出一个集合 B，使其元素个数最多，并说明理由.

解析：(Ⅰ)直接根据定义计算.

(Ⅱ)注意到 1 的个数的奇偶性，根据定义反证证明.

(III)根据抽屉原理即可得证.

答案：(I)M(a，a)=2，M(a，β)=1.

(II)考虑数对(x_k，y_k)只有四种情况：(0，0)、(0，1)、(1，0)、(1，1)，相应的

$\frac{x_k+y_k-|x_k-y_k|}{2}$分别为 0、0、0、1，所以 B 中的每个元素应有奇数个 1，所以 B 中的元素只可能为(上下对应的两个元素称之为互补元素)：

(1，0，0，0)、(0，1，0，0)、(0，0，1，0)、(0，0，0，1)，

(0，1，1，1)、(1，0，1，1)、(1，1，0，1)、(1，1，1，0)，

对于任意两个只有 1 个 1 的元素α，β 都满足 M(α，β)是偶数，

所以四元集合 B={(1，0，0，0)、(0，1，0，0)、(0，0，1，0)、(0，0，0，1)}满足 题意，

假设 B 中元素个数大于等于 4，就至少有一对互补元素，

除了这对互补元素之外还有至少 1 个含有 3 个 1 的元素α，

则互补元素中含有 1 个 1 的元素β 与之满足 M(α，β)=1 不合题意，故 B 中元素个数的最大值为 4.

(III)B={(0，0，0，…0)，(1，0，0…，0)，(0，1，0，…0)，(0，0，1…0)…，(0，0，0，…，1)}，此时 B 中有 n+1 个元素，下证其为最大.

对于任意两个不同的元素α，β，满足 M(α，β)=0，则α，β 中相同位置上的数字不能同时为 1，假设存在 B 有多于 n+1 个元素，由于α=(0，0，0，…，0)与任意元素β 都有 M(α，β)=0，所以除(0，0，0，…，0)外至少有 n+1 个元素含有 1，根据元素的互异性，至少存在一对α，β 满足 xi=yi=l，此时 M(α，β)≥1 不满足题意，故 B 中最多有 n+1 个元素.