2014年普通高等学校招生全国统一考试（重庆卷）数学文

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分.在每小题给出的四个备选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.实部为-2，虚部为1的复数所对应的点位于复平面内的(　　)

A.第一象限

B.第二象限

C.第三象限

D.第四象限

解析：实部为-2，虚部为1的复数所对应的点的坐标为(-2，1)，位于第二象限，

答案：B.

2.在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_3+a_5=10$，则$a_7=$(　　)

A.5

B.8

C.10

D.14

解析：∵等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_3+a_5=10$∴$2+2d+2+4d=10$，解得$d=1$，∴$a_7=2+6\times1=8$.

答案：B.

3.某中学有高中生3500人，初中生1500人，为了解学生的学习情况，用分层抽样的方法从该校学生中抽取一个容量为n的样本，已知从高中生中抽取70人，则n为(　　)

A.100

B.150

C.200

D.250

解析：分层抽样的抽取比例为$\frac{70}{3500}=\frac{1}{50}$,

总体个数为3500+1500=5000，∴样本容量$n=5000\times\frac{1}{50}=100$.

答案：A.

4.下列函数为偶函数的是(　　)

A.$f(x)=x-1$

B.$f(x)=x^2+x$

C.$f(x)=2^x-2^{-x}$

D.$f(x)=2^x+2^{-x}$

解析：根据题意，依次分析选项：

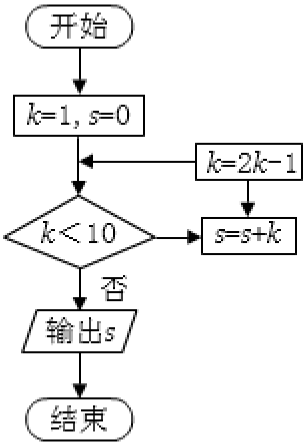
A、$f(x)=x-1$，其定义域为R，$f(-x)=-x-1$，$f(-x)\neq f(x)$，不是偶函数，不符合题意；

B、$f(x)=x^2+x$，其定义域为R，$f(-x)=x^2-x$，$f(-x)\neq f(x)$，不是偶函数，不符合题意；

C、$f(x)=2^x-2^{-x}$，其定义域为R，$f(-x)=2^{-x}-2^x$，$f(-x)=-f(x)$，是奇函数不是偶函数，不符合题意；

D、$f(x)=2^x+2^{-x}$，其定义域为 R，$f(-x)=2^{-x}+2^x$，$f(-x)=f(x)$，是偶函数，符合题意；
答案：D.

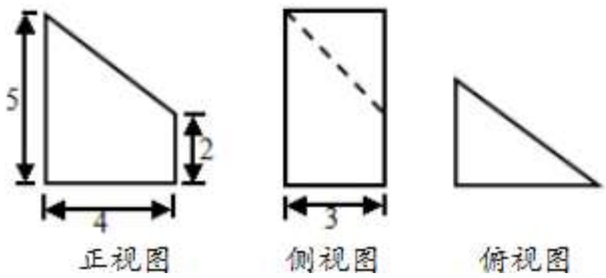
5.执行如图所示的程序框图，则输出 s 的值为(　　)



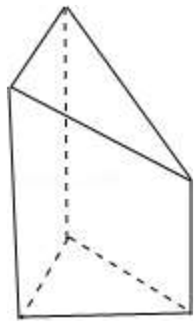
A.10
B.17
C.19
D.36
解析：由程序框图知：第一次循环 S=2，k=2×2-1=3；
第二次循环 S=2+3=5，k=2×3-1=5；
第三次循环 S=5+5=10，k=2×5-1=9；
第四次循环 S=10+9=19，k=2×9-1=17，
不满足条件 k＜10，跳出循环体，输出 S=19.
答案：C.

6.已知命题：
p：对任意 x∈R，总有|x|≥0，q：x=1 是方程 x+2=0 的根；则下列命题为真命题的是(　　)
A.p∧¬q
B.¬p∧q
C.¬p∧¬q
D.p∧q
解析：根据绝对值的性质可知，对任意 x∈R，总有|x|≥0 成立，即 p 为真命题，
当 x=1 时，x+2=3≠0，即 x=1 不是方程 x+2=0 的根，即 q 为假命题，
则 p∧¬q，为真命题，
答案：A.

7.某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为(　　)



A. 12
B. 18
C. 24
D. 30
解析：由三视图知：几何体是三棱柱消去一个同底的三棱锥，如图：



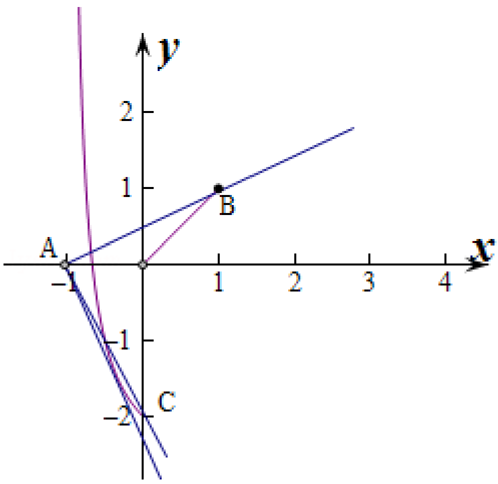
三棱柱的高为 5，消去的三棱锥的高为 3，
三棱锥与三棱柱的底面为直角边长分别为 3 和 4 的等腰直角三角形，
∴几何体的体积 $V=\frac{1}{2}\times3\times4\times5-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times4\times3=30-6=24$.
答案：C.

8. 设 F_1，F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 的左、右焦点，双曲线上存在一点 P 使得 $(|PF_1|-|PF_2|)^2=b^2-3ab$，则该双曲线的离心率为(　　)
A. $\sqrt{2}$
B. $\sqrt{15}$
C. 4
D. $\sqrt{17}$
解析：∵$(|PF_1|-|PF_2|)^2=b^2-3ab$，
∴由双曲线的定义可得 $(2a)^2=b^2-3ab$，∴$4a^2+3ab-b^2=0$，∴$a=\frac{b}{4}$,
∴$c=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{17}}{4}b$，∴$e=\frac{c}{a}=\sqrt{17}$.
答案：D.

9. 若 $\log_4(3a+4b)=\log_2\sqrt{ab}$，则 a+b 的最小值是(　　)
A. $6+2\sqrt{3}$
B. $7+2\sqrt{3}$

C. $6+4\sqrt{3}$
D. $7+4\sqrt{3}$
解析：∵$3a+4b>0$，$ab>0$，∴$a>0.b>0$
∵$\log_4(3a+4b)=\log_2\sqrt{ab}$，∴$\log_4(3a+4b)=\log_4(ab)$
∴$3a+4b=ab$，$a\neq4$，$a>0.b>0$∴ $b=\frac{3a}{a-4}>0$，∴$a>4$，
则 $a+b=a+\frac{3a}{a-4}=(a-4)=a+\frac{3(a-4)+12}{a-4}=(a-4)+\frac{12}{a-4}+7\geqslant2\sqrt{(a-4)\cdot\frac{12}{a-4}}+7=4\sqrt{3}$
$+7$，当且仅当 $a=4+2\sqrt{3}$取等号.
答案：D.

10.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x+1}-3, & x\in(-1,0]\\ x, & x\in(0,1]\end{cases}$，且 $g(x)=f(x)-mx-m$ 在$(-1，1]$内有且仅有两个不同的零点，则实数 m 的取值范围是(　　)
A. $(-\frac{9}{4},-2]\cup(0,\frac{1}{2}]$
B. $(-\frac{11}{4},-2]\cup(0,\frac{1}{2}]$
C. $(-\frac{9}{4},-2]\cup(0,\frac{2}{3}]$
D. $(-\frac{11}{4},-2]\cup(0,\frac{2}{3}]$
解析：由 $g(x)=f(x)-mx-m=0$，即 $f(x)=m(x+1)$，
分别作出函数 $f(x)$和 $y=g(x)=m(x+1)$的图象如图：



由图象可知 $f(1)=1$，$g(x)$表示过定点 $A(-1，0)$的直线，
当 $g(x)$过$(1，1)$时，$m=\frac{1}{2}$此时两个函数有两个交点，
此时满足条件的 m 的取值范围是 $0<m\leq\frac{1}{2}$，
当 $g(x)$过$(0，-2)$时，$g(0)=-2$，解得 $m=-2$，此时两个函数有两个交点，
当 $g(x)$与 $f(x)$相切时，两个函数只有一个交点，

此时$\frac{1}{x+1}-3=m(x+1)$，即 $m(x+1)^2+3(x+1)-1=0$，

当 m=0 时，$x=-\frac{2}{3}$，只有 1 解，

当 m≠0，由△=9+4m=0 得 $m=-\frac{9}{4}$，此时直线和 f(x)相切，∴要使函数有两个零点，

则$-\frac{9}{4}<m\leqslant-2$ 或 $0<m\leqslant\frac{1}{2}$，

答案：A

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，把答案填写在答题卡相应的位置上.

11.已知集合 A={3，4，5，12，13}，B={2，3，5，8，13}，则 A∩B=________.
解析：根据题意，集合 A={3，4，5，12，13}，B={2，3，5，8，13}，
A、B 公共元素为 3、5、11，
则 A∩B={3，5，13}，
答案：{3，5，13}.

12.已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为 60°，且$\vec{a}=(-2,-6)$，$|\vec{b}|=\sqrt{10}$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=$______.

解析：∵$\vec{a}=(-2,-6)$，∴$|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}=2\sqrt{10}$

∴$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>=2\sqrt{10}\times\sqrt{10}\cos60°=10$.

答案：10.

13.将函数 $f(x)=\sin(\omega x+\phi)(\omega>0,-\frac{\pi}{2}\leqslant\phi<\frac{\pi}{2})$图象上每一点的横坐标缩短为原来的一半，纵坐标不变，再向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到 y=sinx 的图象，则 $f(\frac{\pi}{6})=$______.

解析：函数 $f(x)=\sin(\omega x+\phi)(\omega>0,-\frac{\pi}{2}\leqslant\phi<\frac{\pi}{2})$图象上每一点的横坐标缩短为原来的一半，纵坐标不变，可得函数 $y=\sin(2\omega x+\phi)$的图象.

再把所得图象再向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到函数 $y=\sin[2\omega(x-\frac{\pi}{6})+\phi]=\sin(2\omega x+\phi-\frac{\pi}{3}\omega)=\sin x$ 的图象，

∴$2\omega=1$，且 $\phi-\frac{\pi}{3}\omega=2k\pi$，$k\in z$，

∴$\omega=\frac{1}{2}$，$\phi=\frac{\pi}{6}$，∴$f(x)=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6})$，

∴$f(\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

答案：$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. 已知直线 x-y+a=0 与圆心为 C 的圆 $x^2+y^2+2x-4y-4=0$ 相交于 A、B 两点，且 AC⊥BC，则实数 a 的值为______.

解析：圆的标准方程为$(x+1)^2+(y-2)^2=9$，圆心 C(-1，2)，半径 r=3，

∵AC⊥BC，∴圆心 C 到直线 AB 的距离 d=$\frac{\sqrt{2}}{2}\times 3=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

即 d=$\frac{|-1-2+a|}{\sqrt{2}}=\frac{|a-3|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，即|a-3|=3，解得 a=0 或 a=6，

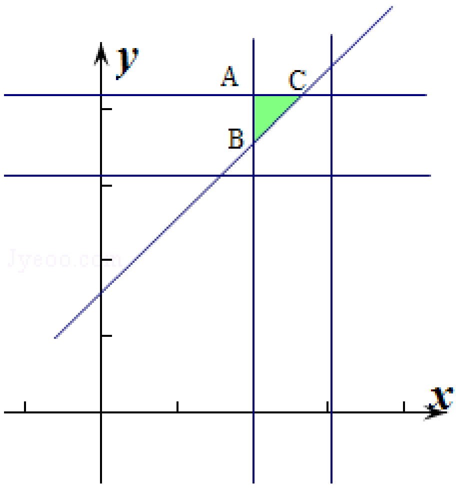
答案：0 或 6.

15. 某校早上 8：00 开始上课，假设该校学生小张与小王在早上 7：30～7：50 之间到校，且每人在该时间段的任何时刻到校是等可能的，则小张比小王至少早 5 分钟到校的概率为___(用数字作答).

解析：设小张到校的时间为 x，小王到校的时间为 y.(x，y)可以看成平面中的点试验的全部结果所构成的区域为 Ω={(x，y|$7\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 7\frac{5}{6}$，$7\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 7\frac{5}{6}$}是一个矩形区域，对应的面积

S=$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$，

则小张比小王至少早 5 分钟到校事件 A={x|y-x≥$\frac{1}{12}$}作出符合题意的图象，



A($7\frac{1}{2}$，$7\frac{5}{6}$)，当 x=$7\frac{1}{2}$时，y=$7\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=7\frac{7}{12}$，则 AB=$7\frac{5}{6}-7\frac{7}{12}=\frac{1}{4}$，

则三角形 ABC 的面积 S=$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$，

由几何概率模型可知小张比小王至少早 5 分钟到校的概率为$\frac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{9}}=\frac{9}{32}$，

答案：$\frac{9}{32}$.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16.(13 分)已知$\{a_n\}$是首项为 1，公差为 2 的等差数列，S_n表示$\{a_n\}$的前 n 项和.

(Ⅰ)求a_n及S_n；

(Ⅱ)设$\{b_n\}$是首项为 2 的等比数列，公比为 q 满足$q^2-(a_4+1)q+S_4=0$.求$\{b_n\}$的通项公式及其前 n 项和T_n.

解析：(Ⅰ)直接由等差数列的通项公式及前 n 项和公式得答案；

(Ⅱ)求出a_4和S_4，代入$q^2-(a_4+1)q+S_4=0$求出等比数列的公比，然后直接由等比数列的通项公式及前 n 项和公式得答案.

答案：(Ⅰ)∵$\{a_n\}$是首项为 1，公差为 2 的等差数列，

∴$a_n=a_1+(n-1)d=1+2(n-1)=2n-1$.

$$S_n=1+3+\cdots+(2n-1)=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2;$$

(Ⅱ)由(Ⅰ)得，$a_4=7$，$S_4=16$.

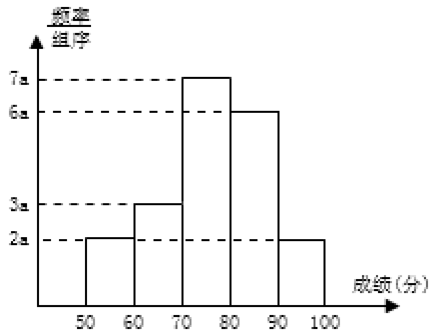
∵$q^2-(a_4+1)q+S_4=0$，即$q^2-8q+16=0$，

∴$(q-4)^2=0$，即 q=4.

又∵$\{b_n\}$是首项为 2 的等比数列，∴$b_n=b_1q^{n-1}=2\cdot 4^{n-1}=2^{2n-1}$.

$$T_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{2}{3}(4^n-1).$$

17.(13 分) 20 名学生某次数学考试成绩（单位：分）的频率分布直方图如图：



(Ⅰ)求频率分布直方图中 a 的值；

(Ⅱ)分别求出成绩落在[50，60)与[60，70)中的学生人数；

(Ⅲ)从成绩在[50，70)的学生任选 2 人，求此 2 人的成绩都在[60，70)中的概率.

解析：(Ⅰ)根据频率分布直方图求出 a 的值；

(Ⅱ)由图可知，成绩在[50，60)和[60，70)的频率分别为 0.1 和 0.15，用样本容量 20 乘以对应的频率，即得对应区间内的人数，从而求出所求.

(Ⅲ)分别列出满足[50，70)的基本事件，再找到在[60，70)的事件个数，根据古典概率公式计算即可.

答案：(Ⅰ)根据直方图知组距=10，由(2a+3a+6a+7a+2a)×10=1，解得 a=0.005.

(Ⅱ)成绩落在[50，60)中的学生人数为 2×0.005×10×20=2，

成绩落在[60，70)中的学生人数为 3×0.005×10×20=3.

(III)记成绩落在[50，60)中的 2 人为 A，B，成绩落在[60，70)中的 3 人为 C，D，E，则成绩在[50，70)的学生任选 2 人的基本事件有 AB，AC，AD，AE，BC，BD，BE，CD，CE，DE 共 10 个，其中 2 人的成绩都在[60，70)中的基本事件有 CD，CE，DE 共 3 个，

故所求概率为 $P=\frac{3}{10}$.

18.(13 分)在△ABC 中，内角 A、B、C 所对的边分别是 a、b、c，且 a+b+c=8.

(Ⅰ)若 a=2，$b=\frac{5}{2}$，求 cosC 的值；

(Ⅱ)若 $\sin A\cos^2\frac{B}{2}+\sin B\cos^2\frac{A}{2}=2\sin C$，且△ABC 的面积 $S=\frac{9}{2}\sin C$，求 a 和 b 的值.

解析：(Ⅰ)由 a+b+c=8，根据 a=2，$b=\frac{5}{2}$求出 c 的长，利用余弦定理表示出 cosC，将三边长代入求出 cosC 的值即可；

(Ⅱ)已知等式左边利用二倍角的余弦函数公式化简，整理后利用两角和与差的正弦函数公式及诱导公式变形，再利用正弦定理得到 a+b=3c，与 a+b+c=8 联立求出 a+b 的值，利用三角形的面积公式列出关系式，代入 $S=\frac{9}{2}\sin C$ 求出 ab 的值，联立即可求出 a 与 b 的值.

答案：(Ⅰ)∵a=2，$b=\frac{5}{2}$，且 a+b+c=8，∴$c=8-(a+b)=\frac{7}{2}$，

∴由余弦定理得：$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2}{2\times2\times\frac{5}{2}}=-\frac{1}{5}$；

(Ⅱ)由 $\sin A\cos^2\frac{B}{2}+\sin B\cos^2\frac{A}{2}=2\sin C$ 可得：$\sin A\cdot\frac{1+\cos B}{2}+\sin B\cdot\frac{1+\cos A}{2}=2\sin C$，

整理得：sinA+sinAcosB+sinB+sinBcosA=4sinC，

∵sinAcosB+cosAsinB=sin(A+B)=sinC，∴sinA+sinB=3sinC，

利用正弦定理化简得：a+b=3c，

∵a+b+c=8，∴a+b=6①，

∵$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{9}{2}\sin C$，∴ab=9②，

联立①②解得：a=b=3.

19.(12 分)已知函数 $f(x)=\frac{x}{4}+\frac{a}{x}-\ln x-\frac{3}{2}$，其中 a∈R，且曲线 y=f(x)在点(1，f(1))处的切线垂直于直线 $y=\frac{1}{2}x$.

(Ⅰ)求 a 的值；

(Ⅱ)求函数 f(x)的单调区间与极值.

解析：(Ⅰ)由曲线 y=f(x)在点(1，f(1))处的切线垂直于直线 $y=\frac{1}{2}x$ 可得 f′(1)=-2，可求出 a 的值；

(Ⅱ)根据(I)可得函数的解析式和导函数的解析式，分析导函数的符号，进而可得函数 f(x)的单调区间与极值.

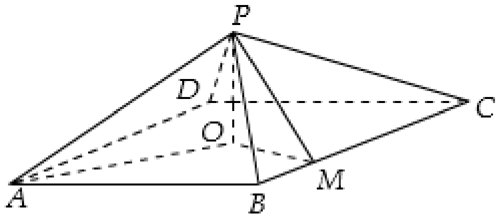
答案：(Ⅰ)∵$f(x)=\frac{x}{4}+\frac{a}{x}-\ln x-\frac{3}{2}$，∴$f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{a}{x^2}-\frac{1}{x}$,

∵曲线 y=f(x)在点(1，f(1))处的切线垂直于直线 $y=\frac{1}{2}x$. ∴$f'(1)=\frac{1}{4}-a-1=-2$，解得：$a=\frac{5}{4}$,

(Ⅱ)由(Ⅰ)知：$f(x)=\frac{x}{4}+\frac{5}{4x}-\ln x-\frac{3}{2}$，$f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{5}{4x^2}-\frac{1}{x}=\frac{x^2-4x-5}{4x^2}$(x＞0)，

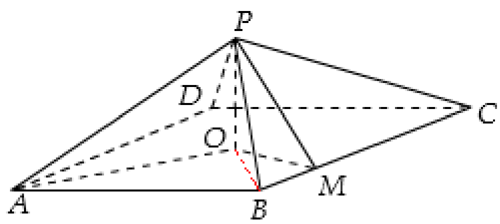
令 f′(x)=0，解得 x=5，或 x=-1（舍），
∵当 x∈(0，5)时，f′(x)＜0，当 x∈(5，+∞)时，f′(x)＞0，
故函数 f(x)的单调递增区间为(5，+∞)；单调递减区间为(0，5)；
当 x=5 时，函数取极小值-ln5.

20.(12 分)如图，四棱锥 P-ABCD 中，底面是以 O 为中心的菱形，PO⊥底面 ABCD，AB=2，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，M 为 BC 上一点，且 $BM=\frac{1}{2}$.



(Ⅰ)证明：BC⊥平面 POM;
(Ⅱ)若 MP⊥AP，求四棱锥 P-ABMO 的体积.

解析：(Ⅰ)连接 OB，根据底面是以 O 为中心的菱形，PO⊥底面 ABCD，AB=2，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，M 为 BC 上一点，且 $BM=\frac{1}{2}$，结合菱形的性质，余弦定理，勾股定理，可得 OM⊥BC 及 PO⊥BC，进而由线面垂直的判定定理得到 BC⊥平面 POM;
(Ⅱ)设 PO=a，利用勾股定理和余弦定理解三角形求出 PO 的值，及四棱锥 P-ABMO 的底面积 S，代入棱锥体积公式，可得答案.
答案：(Ⅰ)∵底面是以 O 为中心的菱形，PO⊥底面 ABCD，
故 O 为底面 ABCD 的中心，连接 OB，则 AO⊥OB，



∵AB=2，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，∴$OB=AB\cdot\sin\angle BAO=2\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})=1$,

又∵$BM=\frac{1}{2}$，$\angle OBM=\frac{\pi}{3}$，∴在△OBM中，$OM^2=OB^2+BM^2-2OB\cdot BM\cdot\cos\angle OBM=\frac{3}{4}$，

即$OB^2=OM^2+BM^2$，即$OM\perp BM$，∴$OM\perp BC$，

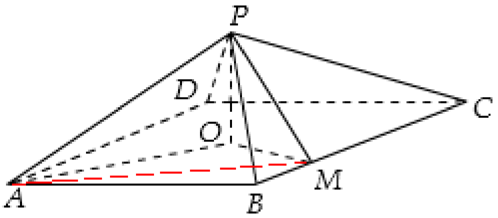
又∵$PO\perp$底面ABCD，$BC\subset$底面ABCD，∴$PO\perp BC$，

又∵$OM\cap PO=O$，OM，$PO\subset$平面POM，∴$BC\perp$平面POM.

(Ⅱ)由(Ⅰ)可得：$OA=AB\cdot\cos\angle BAO=2\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$，

设$PO=a$，由$PO\perp$底面ABCD可得：△POA为直角三角形，故$PA^2=PO^2+OA^2=a^2+3$，

由△POM也为直角三角形得：$PM^2=PO^2+OM^2=a^2+\frac{3}{4}$，连接AM，



在△ABM中，$AM^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cdot\cos\angle ABM=2^2+(\frac{1}{2})^2-2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{21}{4}$，

由$MP\perp AP$可知：△APM为直角三角形，

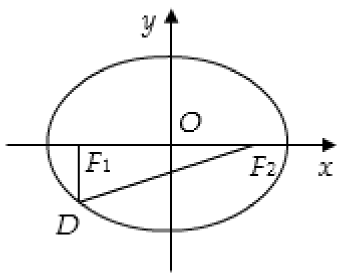
则$AM^2=PA^2+PM^2$，即$a^2+3+a^2+\frac{3}{4}=\frac{21}{4}$，解得$a=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即$PO=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

此时四棱锥P-ABMO的底面积$S=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOM}=\frac{1}{2}\cdot AO\cdot OB+\frac{1}{2}\cdot BM\cdot OM=\frac{5\sqrt{3}}{8}$，

∴四棱锥P-ABMO的体积$V=\frac{1}{3}S\cdot PO=\frac{5}{16}$.

21.(12分)如图，设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别为$F_1$，$F_2$，点D在椭圆上，

$DF_1\perp F_1F_2$，$\frac{|F_1F_2|}{|DF_1|}=2\sqrt{2}$，△$DF_1F_2$的面积为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.



(Ⅰ)求该椭圆的标准方程；

(Ⅱ)是否存在圆心在y轴上的圆，使圆在x轴的上方与椭圆有两个交点，且圆在这两个交点处的两条切线互相垂直并分别过不同的焦点？若存在，求出圆的方程；若不存在，请说明理由.

解析：(Ⅰ)设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，依题意，可求得 $c=1$，易求得 $|DF_1|=\frac{|F_1F_2|}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$|DF_2|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，从而可得 $2a=2\sqrt{2}$，于是可求得椭圆的标准方程；

(Ⅱ)设圆心在 y 轴上的圆 C 与椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 相交，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 是两个交点，依题意，利用圆和椭圆的对称性，易知 $x_2=-x_1$，$y_1=y_2$，$|P_1P_2|=2|x_1|$，由 $F_1P_1\perp F_2P_2$，得 $x_1=-\frac{4}{3}$ 或 $x_1=0$，分类讨论即可求得圆心及半径，从而可得圆的方程.

答案：(Ⅰ)设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，其中 $c^2=a^2-b^2$，

由 $\frac{|F_1F_2|}{|DF_1|}=2\sqrt{2}$，得 $|DF_1|=\frac{|F_1F_2|}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}c$，

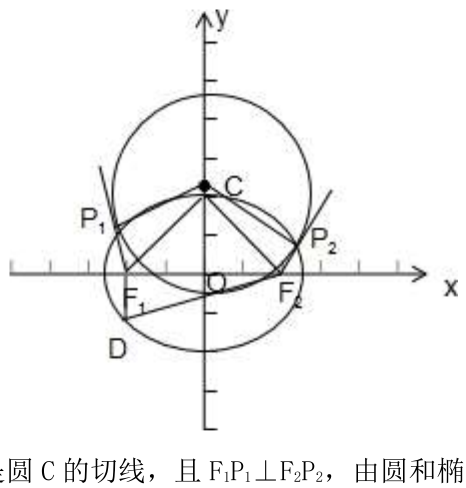
从而 $S_{\triangle DF_1F_2}=\frac{1}{2}|DF_1||F_1F_2|=\frac{\sqrt{2}}{2}c^2=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 $c=1$.

从而 $|DF_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，由 $DF_1\perp F_1F_2$，得 $|DF_2|^2=|DF_1|^2+|F_1F_2|^2=\frac{9}{2}$，

因此 $|DF_2|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，所以 $2a=|DF_1|+|DF_2|=2\sqrt{2}$，故 $a=\sqrt{2}$，$b^2=a^2-c^2=1$，

因此，所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

(Ⅱ)设圆心在 y 轴上的圆 C 与椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 相交，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 是两个交点，



$y_1>0$，$y_2>0$，F_1P_1，F_2P_2 是圆 C 的切线，且 $F_1P_1\perp F_2P_2$，由圆和椭圆的对称性，易知 $x_2=-x_1$，$y_1=y_2$，$|P_1P_2|=2|x_1|$，

由(Ⅰ)知 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，所以 $\overrightarrow{F_1P_1}=(x_1+1,y_1)$，$\overrightarrow{F_2P_2}=(-x_1-1,y_1)$，再由 $F_1P_1\perp F_2P_2$，

得 $-(x_1+1)^2+y_1^2=0$，

由椭圆方程得 $1-\frac{x_1^2}{2}=(x_1+1)^2$，即 $3x_1^2+4x_1=0$，解得 $x_1=-\frac{4}{3}$ 或 $x_1=0$.

当 $x_1=0$ 时，P_1，P_2 重合，此时题设要求的圆不存在；

当 $x_1=-\frac{4}{3}$ 时，过 P_1，P_2，分别与 F_1P_1，F_2P_2 垂直的直线的交点即为圆心 C，设 $C(0，y_0)$

由 F_1P_1，F_2P_2 是圆 C 的切线，知 $CP_1\perp F_1P_1$，得 $\frac{y_1-y_0}{x_1}\cdot\frac{y_1}{x_1+1}=-1$，而 $|y_1|=|x_1+1|=\frac{1}{3}$，

故 $y_0=\frac{5}{3}$，

故圆 C 的半径 $|CP_1|=\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

综上，存在满足题设条件的圆，其方程为 $x^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{32}{9}$.