

2018年上海市中考真题数学

一、选择题(本大题共6题,每题4分,满分24分.下列各题的四个选项中,有且只有一个选项是正确的)

1. 下列计算 $\sqrt{18} - \sqrt{2}$ 的结果是()

A. 4

B. 3

C. $2\sqrt{2}$

D. $\sqrt{2}$

解析: 先化简,再合并同类项即可求解.

$$\sqrt{18} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

答案: C

2. 下列对一元二次方程 $x^2+x-3=0$ 根的情况的判断,正确的是()

A. 有两个不相等实数根

B. 有两个相等实数根

C. 有且只有一个实数根

D. 没有实数根

解析: $\because a=1, b=1, c=-3,$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times (1) \times (-3) = 13 > 0,$$

\therefore 方程 $x^2+x-3=0$ 有两个不相等的实数根.

答案: A

3. 下列对二次函数 $y=x^2-x$ 的图象的描述,正确的是()

A. 开口向下

B. 对称轴是y轴

C. 经过原点

D. 在对称轴右侧部分是下降的

解析: A、 $\because a=1 > 0,$

\therefore 抛物线开口向上,选项A不正确;

$$B、\because -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2},$$

\therefore 抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{1}{2}$,选项B不正确;

C、当 $x=0$ 时, $y=x^2-x=0,$

\therefore 抛物线经过原点,选项C正确;

D、 $\because a > 0,$ 抛物线的对称轴为直线 $x = \frac{1}{2},$

∴当 $x > \frac{1}{2}$ 时, y 随 x 值的增大而增大, 选项 D 不正确.

答案: C

4. 据统计, 某住宅楼 30 户居民五月份最后一周每天实行垃圾分类的户数依次是: 27, 30, 29, 25, 26, 28, 29, 那么这组数据的中位数和众数分别是()

- A. 25 和 30
- B. 25 和 29
- C. 28 和 30
- D. 28 和 29

解析: 根据中位数和众数的概念解答.

对这组数据重新排列顺序得, 25, 26, 27, 28, 29, 29, 30,

处于最中间是数是 28,

∴这组数据的中位数是 28,

在这组数据中, 29 出现的次数最多,

∴这组数据的众数是 29.

答案: D

5. 已知平行四边形 ABCD, 下列条件中, 不能判定这个平行四边形为矩形的是()

- A. $\angle A = \angle B$
- B. $\angle A = \angle C$
- C. $AC = BD$
- D. $AB \perp BC$

解析: 由矩形的判定方法即可得出答案.

A、 $\angle A = \angle B$, $\angle A + \angle B = 180^\circ$, 所以 $\angle A = \angle B = 90^\circ$, 可以判定这个平行四边形为矩形, 正确;

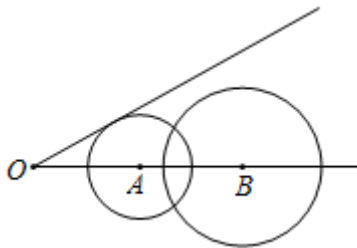
B、 $\angle A = \angle C$ 不能判定这个平行四边形为矩形, 错误;

C、 $AC = BD$, 对角线相等, 可推出平行四边形 ABCD 是矩形, 故正确;

D、 $AB \perp BC$, 所以 $\angle B = 90^\circ$, 可以判定这个平行四边形为矩形, 正确.

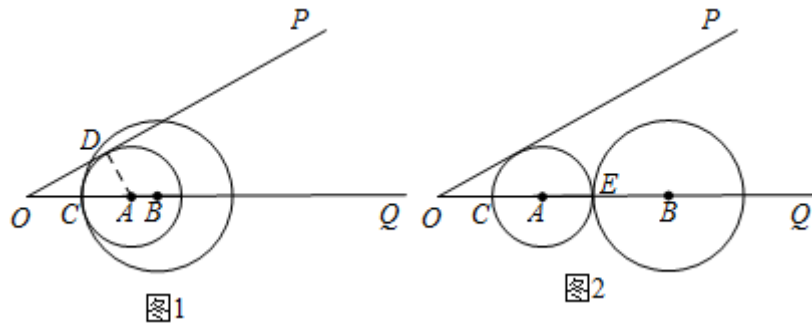
答案: B

6. 如图, 已知 $\angle POQ = 30^\circ$, 点 A、B 在射线 OQ 上(点 A 在点 O、B 之间), 半径长为 2 的 $\odot A$ 与直线 OP 相切, 半径长为 3 的 $\odot B$ 与 $\odot A$ 相交, 那么 OB 的取值范围是()



- A. $5 < OB < 9$
- B. $4 < OB < 9$
- C. $3 < OB < 7$
- D. $2 < OB < 7$

解析: 设 $\odot A$ 与直线 OP 相切时切点为 D, 连接 AD,



$\therefore AD \perp OP$,

$\because \angle O = 30^\circ$, $AD = 2$,

$\therefore OA = 4$,

当 $\odot B$ 与 $\odot A$ 相内切时, 设切点为 C , 如图 1,

$\because BC = 3$,

$\therefore OB = OA + AB = 4 + 3 - 2 = 5$;

当 $\odot A$ 与 $\odot B$ 相外切时, 设切点为 E , 如图 2,

$\therefore OB = OA + AB = 4 + 2 + 3 = 9$,

\therefore 半径长为 3 的 $\odot B$ 与 $\odot A$ 相交, 那么 OB 的取值范围是: $5 < OB < 9$.

答案: A

二、填空题(本大题共 12 题, 每题 4 分, 满分 48 分)

7. -8 的立方根是_____.

解析: 利用立方根的定义即可求解.

$\because (-2)^3 = -8$,

$\therefore -8$ 的立方根是 -2.

答案: -2

8. 计算: $(a+1)^2 - a^2 =$ _____.

解析: 原式利用完全平方公式化简, 合并即可得到结果.

原式 $= a^2 + 2a + 1 - a^2 = 2a + 1$.

答案: $2a + 1$

9. 方程组 $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y = 2 \end{cases}$ 的解是_____.

解析: 方程组中的两个方程相加, 即可得出一个一元二次方程, 求出方程的解, 再代入求出

y 即可. $\begin{cases} x - y = 0 \text{ ①} \\ x^2 + y = 2 \text{ ②} \end{cases}$,

②+①得: $x^2 + x = 2$,

解得: $x = -2$ 或 1 ,

把 $x = -2$ 代入①得: $y = -2$,

把 $x = 1$ 代入①得: $y = 1$,

所以原方程组的解为 $\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = -2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$.

答案: $\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = -2 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$

10. 某商品原价为 a 元, 如果按原价的八折销售, 那么售价是_____元. (用含字母 a 的代数式表示).

解析: 根据实际售价=原价 $\times\frac{\text{折扣}}{10}$ 即可得. 根据题意知售价为 $0.8a$ 元.

答案: $0.8a$

11. 已知反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ (k 是常数, $k \neq 1$) 的图象有一支在第二象限, 那么 k 的取值范围是_____.

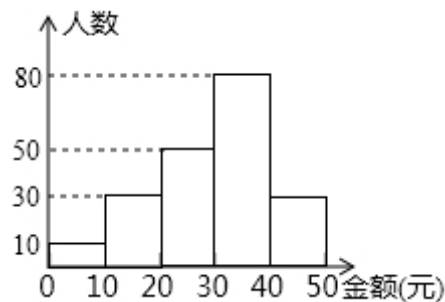
解析: \because 反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图象有一支在第二象限,

$\therefore k-1 < 0$,

解得 $k < 1$.

答案: $k < 1$

12. 某校学生自主建立了一个学习用品义卖平台, 已知九年级 200 名学生义卖所得金额的频数分布直方图如图所示, 那么 20-30 元这个小组的组频率是_____.



解析: 根据“频率=频数 \div 总数”即可得.

20-30 元这个小组的组频率是 $50 \div 200 = 0.25$.

答案: 0.25

13. 从 $\frac{2}{7}$, π , $\sqrt{3}$ 这三个数中选一个数, 选出的这个数是无理数的概率为_____.

解析: \because 在 $\frac{2}{7}$, π , $\sqrt{3}$ 这三个数中, 无理数有 π , $\sqrt{3}$ 这 2 个,

\therefore 选出的这个数是无理数的概率为 $\frac{2}{3}$.

答案: $\frac{2}{3}$

14. 如果一次函数 $y=kx+3$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象经过点 $(1, 0)$, 那么 y 的值随 x 的增大而_____. (填“增大”或“减小”)

解析: 根据点的坐标利用一次函数图象上点的坐标特征可求出 k 值, 再利用一次函数的性质即可得出结论.

\because 一次函数 $y=kx+3$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象经过点 $(1, 0)$,

$$\therefore 0=k+3,$$

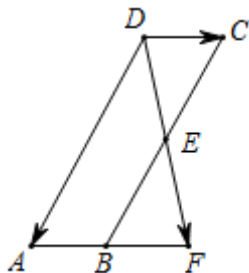
$$\therefore k=-3,$$

$\therefore y$ 的值随 x 的增大而减小.

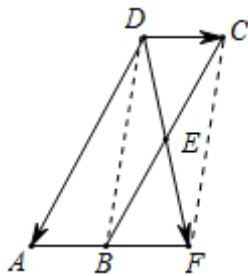
答案: 减小

15. 如图, 已知平行四边形 $ABCD$, E 是边 BC 的中点, 联结 DE 并延长, 与 AB 的延长线交于点

F . 设 $\overrightarrow{DA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{DC} = \mathbf{b}$ 那么向量 \overrightarrow{DF} 用向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 表示为_____.



解析: 如图, 连接 BD , FC ,



\because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore DC \parallel AB$, $DC=AB$.

$\therefore \triangle DCE \sim \triangle FBE$.

又 E 是边 BC 的中点,

$$\therefore \frac{DE}{EF} = \frac{EC}{EB} = 1,$$

$\therefore EC=BE$, 即点 E 是 DF 的中点,

\therefore 四边形 $DBFC$ 是平行四边形,

$\therefore DC=BF$, 故 $AF=2AB=2DC$,

$$\therefore \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DC} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}.$$

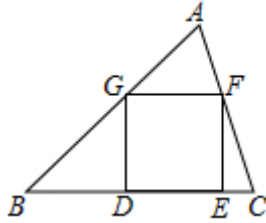
答案: $a + 2b$

16. 通过画出多边形的对角线, 可以把多边形内角和问题转化为三角形内角和问题. 如果从某个多边形的一个顶点出发的对角线共有 2 条, 那么该多边形的内角和是_____度.

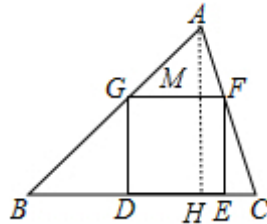
解析: 从某个多边形的一个顶点出发的对角线共有 2 条, 则将多边形分割为 3 个三角形. 所以该多边形的内角和是 $3 \times 180^\circ = 540^\circ$.

答案: 540

17. 如图, 已知正方形 DEFG 的顶点 D、E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上, 顶点 G、F 分别在边 AB、AC 上. 如果 $BC=4$, $\triangle ABC$ 的面积是 6, 那么这个正方形的边长是_____.



解析: 作 $AH \perp BC$ 于 H, 交 GF 于 M, 如图,



$\because \triangle ABC$ 的面积是 6,

$$\therefore \frac{1}{2} BC \cdot AH = 6,$$

$$\therefore AH = \frac{2 \times 6}{4} = 3,$$

设正方形 DEFG 的边长为 x , 则 $GF=x$, $MH=x$, $AM=3-x$,

$\because GF \parallel BC$,

$\therefore \triangle AGF \sim \triangle ABC$,

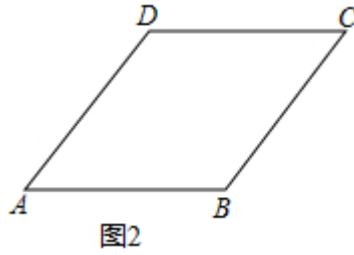
$$\therefore \frac{GF}{BC} = \frac{AM}{AH}, \text{ 即 } \frac{x}{4} = \frac{3-x}{3}, \text{ 解得 } x = \frac{12}{7},$$

即正方形 DEFG 的边长为 $\frac{12}{7}$.

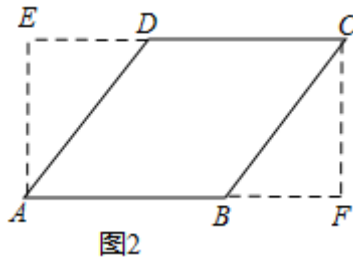
答案: $\frac{12}{7}$

18. 对于一个位置确定的图形, 如果它的所有点都在一个水平放置的矩形内部或边上, 且该图形与矩形的每条边都至少有一个公共点(如图 1), 那么这个矩形水平方向的边长称为该图形的宽, 铅锤方向的边长称为该矩形的高. 如图 2, 菱形 ABCD 的边长为 1, 边 AB 水平放置.

如果该菱形的高是宽的 $\frac{2}{3}$, 那么它的宽的值是_____.



解析：在菱形上建立如图所示的矩形 EAFC，



设 $AF=x$ ，则 $CF=\frac{2}{3}x$ ，

在 $Rt\triangle CBF$ 中， $CB=1$ ， $BF=x-1$ ，

由勾股定理得： $BC^2=BF^2+CF^2$ ，

$$1^2=(x-1)^2+(\frac{2}{3}x)^2,$$

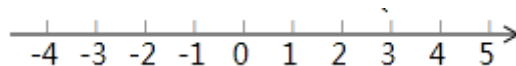
解得： $x=\frac{18}{13}$ 或 0(舍)，

即它的宽的值是 $\frac{18}{13}$ 。

答案： $\frac{18}{13}$

三、解答题(本大题共 7 题，满分 78 分)

19. 解不等式组：
$$\begin{cases} 2x+1 > x \\ \frac{x+5}{2} - x \geq 1 \end{cases}$$
，并把解集在数轴上表示出来。



解析：先求出不等式组中每一个不等式的解集，再求出它们的公共部分就是不等式组的解集。

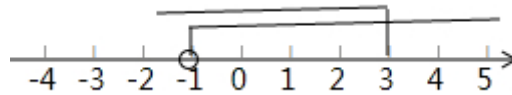
答案：
$$\begin{cases} 2x+1 > x \text{ ①} \\ \frac{x+5}{2} - x \geq 1 \text{ ②} \end{cases}$$
，

解不等式①得： $x > -1$ ，

解不等式②得： $x \leq 3$ ，

则不等式组的解集是： $-1 < x \leq 3$ 。

不等式组的解集在数轴上表示为：



20. 先化简，再求值： $\left(\frac{2a}{a^2-1} - \frac{1}{a+1}\right) \div \frac{a+2}{a^2-a}$ ，其中 $a = \sqrt{5}$ 。

解析：先根据分式混合运算顺序和运算法则化简原式，再将 a 的值代入计算可得。

答案：原式 = $\left[\frac{2a}{(a+1)(a-1)} - \frac{a-1}{(a+1)(a-1)}\right] \div \frac{a+2}{a(a-1)}$

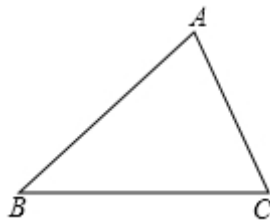
$$= \frac{a+1}{(a+1)(a-1)} \cdot \frac{a(a-1)}{a+2}$$

$$= \frac{a}{a+2},$$

当 $a = \sqrt{5}$ 时，

$$\text{原式} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = 5 - 2\sqrt{5}.$$

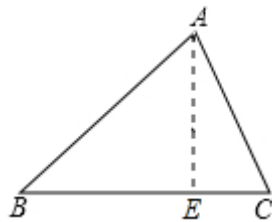
21. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $AB=BC=5$ ， $\tan \angle ABC = \frac{3}{4}$ 。



(1) 求边 AC 的长。

解析：(1) 过 A 作 $AE \perp BC$ ，在直角三角形 ABE 中，利用锐角三角函数定义求出 AC 的长即可。

答案：(1) 作 A 作 $AE \perp BC$ ，



在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中， $\tan \angle ABC = \frac{AE}{BE} = \frac{3}{4}$ ， $AB=5$ ，

$$\therefore AE=3, BE=4,$$

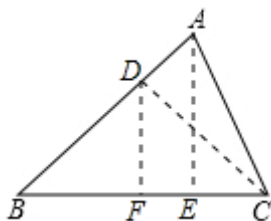
$$\therefore CE=BC-BE=5-4=1,$$

在 Rt $\triangle AEC$ 中, 根据勾股定理得: $AC = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

(2) 设边 BC 的垂直平分线与边 AB 的交点为 D, 求 $\frac{AD}{DB}$ 的值.

解析: (2) 由 DF 垂直平分 BC, 求出 BF 的长, 利用锐角三角函数定义求出 DF 的长, 利用勾股定理求出 BD 的长, 进而求出 AD 的长, 即可求出所求.

答案: (2) 如图, DF 垂直平分 BC, 连接 CD,



$$\therefore BD=CD, BF=CF=\frac{5}{2},$$

$$\because \tan \angle DBF = \frac{DF}{BF} = \frac{3}{4},$$

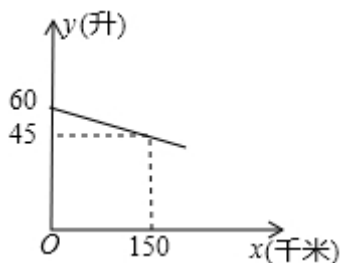
$$\therefore DF = \frac{15}{8},$$

在 Rt $\triangle BFD$ 中, 根据勾股定理得: $BD = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{25}{8},$

$$\therefore AD = 5 - \frac{25}{8} = \frac{15}{8},$$

$$\text{则 } \frac{AD}{BD} = \frac{3}{5}.$$

22. 一辆汽车在某次行驶过程中, 油箱中的剩余油量 y (升) 与行驶路程 x (千米) 之间是一次函数关系, 其部分图象如图所示.



(1) 求 y 关于 x 的函数关系式. (不需要写定义域)

解析: (1) 根据函数图象中点的坐标利用待定系数法求出一元函数解析式.

答案: (1) 设该一次函数解析式为 $y=kx+b$,

将 $(150, 45)$ 、 $(0, 60)$ 代入 $y=kx+b$ 中,

$$\begin{cases} 150k + b = 45 \\ b = 60 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{1}{10} \\ b = 60 \end{cases}$$

∴该一次函数解析式为 $y = -\frac{1}{10}x + 60$.

(2) 已知当油箱中的剩余油量为 8 升时，该汽车会开始提示加油，在此次行驶过程中，行驶了 500 千米时，司机发现离前方最近的加油站有 30 千米的路程，在开往该加油站的途中，汽车开始提示加油，这时离加油站的路程是多少千米？

解析：(2) 根据一次函数解析式和一次函数图象上点的坐标特征即可求出剩余油量为 8 升时行驶的路程，此题得解。

答案：(2) 当 $y = -\frac{1}{10}x + 60 = 8$ 时，

解得 $x = 520$.

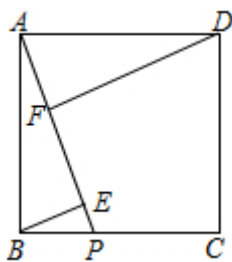
即行驶 520 千米时，油箱中的剩余油量为 8 升。

$530 - 520 = 10$ 千米，

油箱中的剩余油量为 8 升时，距离加油站 10 千米。

∴在开往该加油站的途中，汽车开始提示加油，这时离加油站的路程是 10 千米。

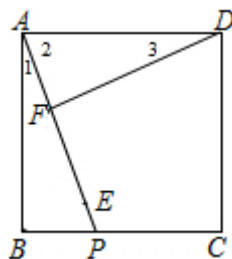
23. 已知：如图，正方形 ABCD 中，P 是边 BC 上一点，BE ⊥ AP，DF ⊥ AP，垂足分别是点 E、F。



(1) 求证：EF = AE - BE.

解析：(1) 利用正方形的性质得 AB = AD，∠BAD = 90°，根据等角的余角相等得到 ∠1 = ∠3，则可判断 △ABE ≌ △DAF，则 BE = AF，然后利用等线段代换可得到结论。

答案：(1) 证明：如图所示：



∵ 四边形 ABCD 为正方形，

∴ AB = AD，∠BAD = 90°，

∵ BE ⊥ AP，DF ⊥ AP，

∴ ∠BEA = ∠AFD = 90°，

$$\because \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ, \quad \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DAF$ 中

$$\begin{cases} \angle BEA = \angle AFD \\ \angle 1 = \angle 2 \\ AB = DA \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DAF,$$

$$\therefore BE = AF,$$

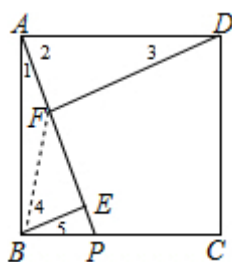
$$\therefore EF = AE - AF = AE - BE.$$

(2) 联结 BF , 如课 $\frac{AF}{BF} = \frac{DF}{AD}$. 求证: $EF = EP$.

解析: (2) 利用 $\frac{AF}{BF} = \frac{DF}{AD}$ 和 $AF = BE$ 得到 $\frac{BE}{DF} = \frac{BF}{AD}$, 则可判定 $\text{Rt}\triangle BEF \sim \text{Rt}\triangle DFA$, 所以 \angle

$4 = \angle 3$, 再证明 $\angle 4 = \angle 5$, 然后根据等腰三角形的性质可判断 $EF = EP$.

答案: (2) 如图所示:



$$\therefore \frac{AF}{BF} = \frac{DF}{AD},$$

而 $AF = BE$,

$$\therefore \frac{BE}{BF} = \frac{DF}{AD},$$

$$\therefore \frac{BE}{DF} = \frac{BF}{AD},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BEF \sim \text{Rt}\triangle DFA,$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 3,$$

而 $\angle 1 = \angle 3$,

$$\therefore \angle 4 = \angle 1,$$

$$\therefore \angle 5 = \angle 1,$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 5,$$

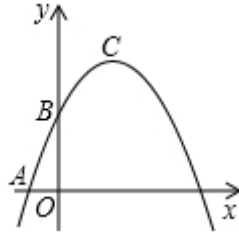
即 BE 平分 $\angle FBP$,

而 $BE \perp EP$,

$$\therefore EF = EP.$$

24. 在平面直角坐标系 xOy 中(如图). 已知抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-1, 0)$ 和点

$B(0, \frac{5}{2})$ ，顶点为 C ，点 D 在其对称轴上且位于点 C 下方，将线段 DC 绕点 D 按顺时针方向旋转 90° ，点 C 落在抛物线上的点 P 处。



(1) 求这条抛物线的表达式.

解析：(1) 利用待定系数法求抛物线解析式.

答案：(1) 把 $A(-1, 0)$ 和点 $B(0, \frac{5}{2})$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 得

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} - b + c \\ c = \frac{5}{2} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b = 2 \\ c = \frac{5}{2} \end{cases}$$

\therefore 抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$.

(2) 求线段 CD 的长.

解析：(2) 利用配方法得到 $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{9}{2}$ ，则根据二次函数的性质得到 C 点坐标和抛物线的对称轴为直线 $x=2$ ，如图，设 $CD=t$ ，则 $D(2, \frac{9}{2}-t)$ ，根据旋转性质得 $\angle PDC=90^\circ$ ，

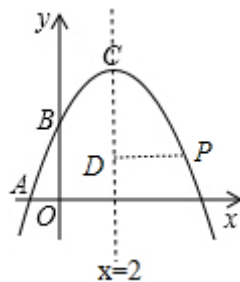
$DP=DC=t$ ，则 $P(2+t, \frac{9}{2}-t)$ ，然后把 $P(2+t, \frac{9}{2}-t)$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$ 得到关于 t 的

方程，从而解方程可得到 CD 的长.

答案：(2) $\because y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{9}{2}$ ，

$\therefore C(2, \frac{9}{2})$ ，抛物线的对称轴为直线 $x=2$ ，

如图所示：



设 $CD=t$ ，则 $D(2, \frac{9}{2}-t)$ ，

∵ 线段 DC 绕点 D 按顺时针方向旋转 90° ，点 C 落在抛物线上的点 P 处，

∴ $\angle PDC=90^\circ$ ， $DP=DC=t$ ，

∴ $P(2+t, \frac{9}{2}-t)$ ，

把 $P(2+t, \frac{9}{2}-t)$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$ 得 $-\frac{1}{2}(2+t)^2 + 2(2+t) + \frac{5}{2} = \frac{9}{2}-t$ ，

整理得 $t^2-2t=0$ ，解得 $t_1=0$ (舍去)， $t_2=2$ ，

∴ 线段 CD 的长为 2.

(3) 将抛物线平移，使其顶点 C 移到原点 O 的位置，这时点 P 落在点 E 的位置，如果点 M 在 y 轴上，且以 O 、 D 、 E 、 M 为顶点的四边形面积为 8，求点 M 的坐标.

解析：(3) P 点坐标为 $(4, \frac{9}{2})$ ， D 点坐标为 $(2, \frac{5}{2})$ ，利用抛物线的平移规律确定 E 点坐标

为 $(2, -2)$ ，设 $M(0, m)$ ，当 $m>0$ 时，利用梯形面积公式得到 $\frac{1}{2}g\left(m + \frac{5}{2} + 2\right)g^2 = 8$ 当 $m<0$

时，利用梯形面积公式得到 $\frac{1}{2}g\left(-m + \frac{5}{2} + 2\right)g^2 = 8$ ，然后分别解方程求出 m 即可得到对应

的 M 点坐标.

答案：(3) P 点坐标为 $(4, \frac{9}{2})$ ， D 点坐标为 $(2, \frac{5}{2})$ ，

∵ 抛物线平移，使其顶点 $C(2, \frac{9}{2})$ 移到原点 O 的位置，

∴ 抛物线向左平移 2 个单位，向下平移 $\frac{9}{2}$ 个单位，

而 P 点 $(4, \frac{9}{2})$ 向左平移 2 个单位，向下平移 $\frac{9}{2}$ 个单位得到点 E ，

∴ E 点坐标为 $(2, -2)$ ，

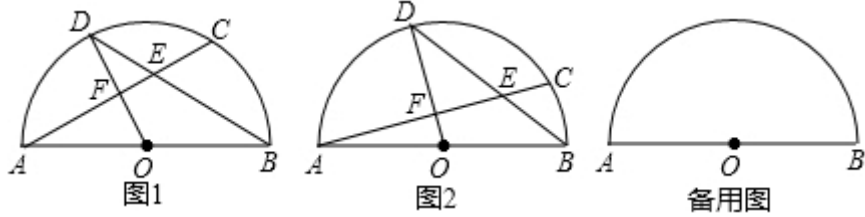
设 $M(0, m)$ ，

当 $m>0$ 时， $\frac{1}{2}g\left(m + \frac{5}{2} + 2\right)g^2 = 8$ ，解得 $m=\frac{7}{2}$ ，此时 M 点坐标为 $(0, \frac{7}{2})$ ；

当 $m<0$ 时， $\frac{1}{2}g\left(-m + \frac{5}{2} + 2\right)g^2 = 8$ ，解得 $m=-\frac{7}{2}$ ，此时 M 点坐标为 $(0, -\frac{7}{2})$ 。

综上所述， M 点的坐标为 $(0, \frac{7}{2})$ 或 $(0, -\frac{7}{2})$ 。

25. 已知 $\odot O$ 的直径 $AB=2$ ，弦 AC 与弦 BD 交于点 E ，且 $OD \perp AC$ ，垂足为点 F 。



(1) 如图 1, 如果 $AC=BD$, 求弦 AC 的长.

解析: (1) 由 $AC=BD$ 知 $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{BC}$, 得 $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$, 根据 $OD \perp AC$ 知 $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD}$,

从而得 $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BC}$, 即可知 $\angle AOD = \angle DOC = \angle BOC = 60^\circ$, 利用 $AF = AO \sin \angle AOF$ 可得答案.

答案: (1) $\because OD \perp AC$,

$$\therefore \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD}, \quad \angle AFO = 90^\circ,$$

又 $\because AC=BD$,

$$\therefore \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}, \quad \text{即 } \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{BC},$$

$$\therefore \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC},$$

$$\therefore \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BC},$$

$$\therefore \angle AOD = \angle DOC = \angle BOC = 60^\circ,$$

$$\because AB=2,$$

$$\therefore AO=BO=1,$$

$$\therefore AF = AO \sin \angle AOF = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

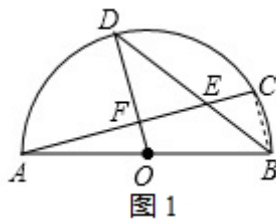
则 $AC=2AF=\sqrt{3}$.

(2) 如图 2, 如果 E 为弦 BD 的中点, 求 $\angle ABD$ 的余切值.

解析: (2) 连接 BC , 设 $OF=t$, 证 OF 为 $\triangle ABC$ 中位线及 $\triangle DEF \cong \triangle BEC$ 得 $BC=DF=2t$, 由 $DF=1-t$

可得 $t = \frac{1}{3}$, 即可知 $BC=DF = \frac{2}{3}$, 继而求得 $EF = \frac{1}{4} AC = \frac{2}{3}$, 由余切函数定义可得答案.

答案: (2) 如图 1, 连接 BC ,



$\because AB$ 为直径, $OD \perp AC$,

$$\therefore \angle AFO = \angle C = 90^\circ,$$

$\therefore OD \parallel BC$,
 $\therefore \angle D = \angle EBC$,
 $\because DE = BE, \angle DEF = \angle BEC$,
 $\therefore \triangle DEF \cong \triangle BEC$ (ASA),
 $\therefore BC = DF, EC = EF$,
 又 $\because AO = OB$,
 $\therefore OF$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,
 设 $OF = t$, 则 $BC = DF = 2t$,
 $\because DF = DO - OF = 1 - t$,
 $\therefore 1 - t = 2t$,

解得: $t = \frac{1}{3}$,

$$\text{则 } DF = BC = \frac{2}{3}, \quad AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2} FC = \frac{1}{4} AC = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$\because OB = OD$,
 $\therefore \angle ABD = \angle D$,

$$\text{则 } \cot \angle ABD = \cot \angle D = \frac{DF}{EF} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \sqrt{2}.$$

(3) 联结 BC 、 CD 、 DA ，如果 BC 是 $\odot O$ 的内接正 n 边形的一边， CD 是 $\odot O$ 的内接正 $(n+4)$ 边形的一边，求 $\triangle ACD$ 的面积。

解析：(3) 先求出 BC 、 CD 、 AD 所对圆心角度数，从而求得 $BC = AD = \sqrt{2}$ 、 $OF = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，从而根据

三角形面积公式计算可得。

答案：(3) 如图 2，

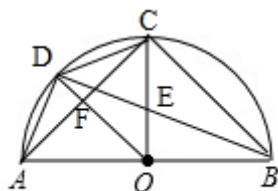


图 2

$\because BC$ 是 $\odot O$ 的内接正 n 边形的一边， CD 是 $\odot O$ 的内接正 $(n+4)$ 边形的一边，

$$\therefore \angle BOC = \frac{360}{n}, \quad \angle AOD = \angle COD = \frac{360}{n+4},$$

$$\text{则 } \frac{360}{n} + 2 \times \frac{360}{n+4} = 180,$$

解得： $n=4$ ，

$$\therefore \angle BOC=90^\circ \text{ 、 } \angle AOD=\angle COD=45^\circ \text{ ，}$$

$$\therefore BC=AC=\sqrt{2} \text{ ，}$$

$$\therefore \angle AFO=90^\circ \text{ ，}$$

$$\therefore OF=AO\cos\angle AOF=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ，}$$

$$\text{则 } DF=OD-OF=1-\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ，}$$

$$\therefore S_{V_{ACD}} = \frac{1}{2} AC \cdot gDF = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \text{ .}$$