2007年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

理科数学

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。第Ⅰ卷1至2页。第Ⅱ卷3到10页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

注意事项：

1．答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上。

2．每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。不能答在试题卷上。

3．本卷共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

参考公式：

如果事件A、B互斥，那么

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

如果事件A、B相互独立，那么

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

如果事件A在一次试验中发生的概率是P，那么n次独立重复试验中恰好发生k次的概率

$$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$$

球是表面积公式

$$S=4\pi R^2$$

其中R表示球的半径

球的体积公式

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

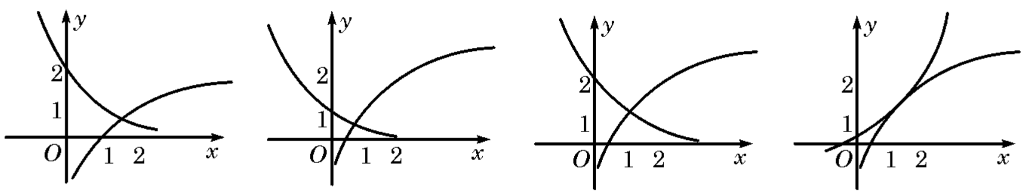
其中R表示球的半径

一．选择题：

(1)复数$\dfrac{1+i}{1-i}+i^2$的值是

（A）0　　(B)1　　(C)-1　　(D)1

(2)函数$f(x)=1+\log_2x$与$g(x)=2^{-x+1}$在同一直角坐标系下的图象大致是

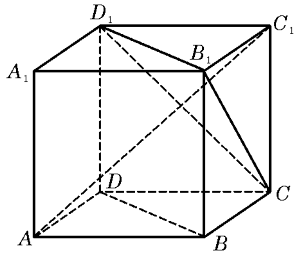


(A)　　(B)　　(C)　　(D)

(3)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=$

（A）0　　(B)1　　(C)$\dfrac{1}{2}$　　(D)$\dfrac{2}{3}$

(4)如图，$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，下面结论错误的是



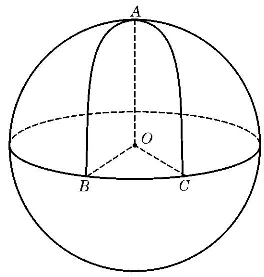
（A）BD∥平面 CB_1D_1　　　（B）$AC_1 \perp BD$

（C）$AC_1\perp$平面 CB_1D_1　　　（D）异面直线 AD 与 CB_1 角为 60°

（5）如果双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$ 上一点 P 到双曲线右焦点的距离是 2，那么点 P 到 y 轴的距离是

（A）$\frac{4\sqrt{6}}{3}$　　（B）$\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　（C）$2\sqrt{6}$　　（D）$2\sqrt{3}$

（6）设球 O 的半径是 1，A、B、C 是球面上三点，已知 A 到 B、C 两点的球面距离都是 $\frac{\pi}{2}$，且三面角 $B\text{-}OA\text{-}C$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$，则从 A 点沿球面经 B、C 两点再回到 A 点的最短距离是



（A）$\frac{7\pi}{6}$　　（B）$\frac{5\pi}{4}$　　（C）$\frac{4\pi}{3}$　　（D）$\frac{3\pi}{2}$

（7）设 $A\{a,1\}$，$B\{2，b\}$，$C\{4,5\}$，为坐标平面上三点，O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 在 $\overrightarrow{OC}$ 方向 上的投影相同，则 a 与 b 满足的关系式为

(A) $4a-5b=3$　　(B) $5a-4b=3$

(C) $4a+5b=14$　　(D) $5a+4b=14$

（8）已知抛物线 $y=-x^2+3$ 上存在关于直线 $x+y=0$ 对称的相异两点 A、B，则$|AB|$等于

（A）3　　（B）4　　（C）$3\sqrt{2}$　　（D）$4\sqrt{2}$

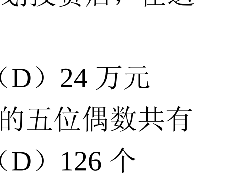
（9）某公司有 60 万元资金，计划投资甲、乙两个项目，按要求对项目甲的投资不小于对项目乙投资的 $\frac{2}{3}$ 倍，且对每个项目的投资不能低于 5 万元，对项目甲每投资 1 万元可获得 0.4 万元的利润，对项目乙每投资 1 万元可获得 0.6 万元的利润，该公司正确规划投资后，在这两个项目上共可获得的最大利润为

（A）36 万元　　（B）31.2 万元　　（C）30.4 万元　　（D）24 万元

（10）用数字 0，1，2，3，4，5 可以组成没有重复数字，并且比 20000 大的五位偶数共有

（A）288 个　　（B）240 个　　（C）144 个　　（D）126 个

（11）如图，l_1、l_2、l_3 是同一平面内的三条平行直线，l_1 与 l_2 间的距离是 1，l_2 与 l_3 间的距离是 2，正三角形 ABC 的三顶点分别在 l_1、l_2、l_3 上，则△ABC 的边长是



（A）$2\sqrt{3}$　　（B）$\frac{4\sqrt{6}}{3}$　　（C）$\frac{3\sqrt{17}}{4}$　　（D）$\frac{2\sqrt{21}}{3}$

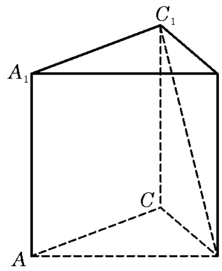
（12）已知一组抛物线 $y=\frac{1}{2}ax^2+bx+1$，其中 a 为 2,4,6,8 中任取的一个数，b 为 1,3,5,7 中任取的一个数，从这些抛物线中任意抽取两条，它们在与直线 x=1 交点处的切线相互平行的概率是

（A）$\frac{1}{12}$　　（B）$\frac{7}{60}$　　（C）$\frac{6}{25}$　　（D）$\frac{5}{25}$

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填在横线上.

（13）若函数 $f(x)=e^{-(m-u)2}$ (c 是自然对数的底数)的最大值是 m,且 $f(x)$是偶函数，则 $m+u$=____.

(14)如图，在正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，侧棱长为 $\sqrt{2}$，底面三角形的边长为 1，则 BC_1 与侧面 ACC_1A_1 所成的角是______.



(15)已知⊙O 的方程是 $x^2+y^2-2=0$, ⊙O'的方程是 $x^2+y^2-8x+10=0$,由动点 P 向⊙O 和⊙O'所引的切线长相等，则动点 P 的轨迹方程是_______________.

(16)下面有五个命题：

①函数 $y=\sin^4x-\cos^4x$ 的最小正周期是 π.

②终边在 y 轴上的角的集合是$\{a|a=\dfrac{k\pi}{2}, k\in Z|$.

③在同一坐标系中，函数 $y=\sin x$ 的图象和函数 $y=x$ 的图象有三个公共点.

④把函数 $y=3\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{6}$ 得到 $y=3\sin 2x$的图象.

⑤函数 $y=\sin(x-\dfrac{\pi}{2})$在〔0, π〕上是减函数.

其中真命题的序号是___________（写出所言　）

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（17）（本小题满分 12 分）已知 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7}, \cos(\alpha-\beta)=\dfrac{13}{14}$, 且 $0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$,

（Ⅰ）求 $\tan 2\alpha$ 的值.

（Ⅱ）求 β.

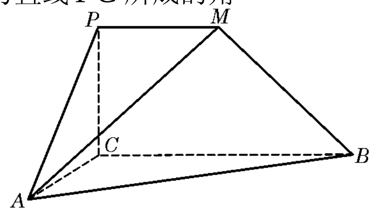
（18）（本小题满分 12 分）厂家在产品出厂前，需对产品做检验，厂家将一批产品发给商家时，商家按合同规定也需随机抽取一定数量的产品做检验，以决定是否接收这批产品.

（Ⅰ）若厂家库房中的每件产品合格的概率为 0.8，从中任意取出 4 件进行检验. 求至少有 1 件是合格品的概率；

（Ⅱ）若厂家发给商家 20 件产品，其中有 3 件不合格，按合同规定该商家从中任取 2 件，都进行检验，只有 2 件都合格时才接收这批产品，否则拒收. 求该商家可能检验出不合格产

品数ξ的分布列及期望$E\xi$，并求该商家拒收这批产品的概率.

（19）（本小题满分 12 分）如图，$PCBM$ 是直角梯形，$\angle PCB$＝90°，$PM \parallel BC$，PM＝1，BC＝2，又 AC＝1，$\angle ACB$＝120°，$AB \perp PC$，直线 AM 与直线 PC 所成的角为 60°.



（Ⅰ）求证：平面 $PAC \perp$ 平面 ABC；

（Ⅱ）求二面角 $M-AC-B$ 的大小；

（Ⅲ）求三棱锥 $P-MAC$ 的体积.

（20）（本小题满分 12 分）设 F_1、F_2 分别是椭圆$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$的左、右焦点.

（Ⅰ）若 P 是该椭圆上的一个动点，求 $PF_1 \cdot PF_2$ 的最大值和最小值；

（Ⅱ）设过定点 $M(0,2)$ 的直线 l 与椭圆交于不同的两点 A、B，且$\angle AOB$为锐角（其中 O 为坐标原点），求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

已知函数 $f(x)=x2+4$,设曲线 $y=f(x)$ 在点()处的切线与 x 轴线发点()()其中 xn 为实数

（21）（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x2+4$,设曲线 $y=f(x)$ 在点()处的切线与 x 轴线发点()()其中 xn 为实数

(Ⅰ)用表示

(Ⅱ)

(22)(本小题满分 14 分)

设函数 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n (n\in N,且n\succ 1,x\in N)$.

(Ⅰ)当 x=6 时,求$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$的展开式中二项式系数最大的项;

(Ⅱ)对任意的实数 x,证明$\dfrac{f(2x)+f(2)}{2} > f'(x)(f'(x)是f(x)的导函数)$;

(Ⅲ)是否存在$a\in N$,使得 an$<\sum_{k-1}^{n}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)<(a+1)n$恒成立?若存在,试证明你的结论并求

出 a 的值;若不存在,请说明理由.

2007 年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）

理科数学参考答案

一．选择题：本题考察基础知识和基本运算，每小题 5 分，满分 60 分

（1） A	（2） C	（3） D	（4） D	（5） A	（6） C
（7） A	（8） C	（9） B	（10） B	（11） D	（12） B

二．填空题：本题考察基础知识和基本运算，每小题 4 分，满分 16 分

（13）1　　（14）$\dfrac{\pi}{6}$　　（15）$x=\dfrac{3}{2}$　　（16）① ④

三．解答题：

（17）本题考察三角恒等变形的主要基本公式、三角函数值的符号，已知三角函数值求角以及计算能力。

解：（Ⅰ）由 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7},0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，得 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{7}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

$\therefore\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\times\dfrac{7}{1}=4\sqrt{3}$，于是 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\times4\sqrt{3}}{1-\left(4\sqrt{3}\right)^2}=-\dfrac{8\sqrt{3}}{47}$

（Ⅱ）由 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，得 $0<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$

又$\because\cos\left(\alpha-\beta\right)=\dfrac{13}{14}$，$\therefore\sin\left(\alpha-\beta\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha-\beta\right)}=\sqrt{1-\left(\dfrac{13}{14}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

由 $\beta=\alpha-\left(\alpha-\beta\right)$ 得：

$$\cos\beta=\cos\left[\alpha-\left(\alpha-\beta\right)\right]=\cos\alpha\cos\left(\alpha-\beta\right)+\sin\alpha\sin\left(\alpha-\beta\right)=\frac{1}{7}\times\frac{13}{14}+\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{1}{2}$$

所以 $\beta=\dfrac{\pi}{3}$

（18）本题考察相互独立事件、互斥事件等的概率计算，考察随机事件的分布列，数学期望等，考察运用所学知识与方法解决实际问题的能力。

解：（Ⅰ）记“厂家任取 4 件产品检验，其中至少有 1 件是合格品”为事件 A

用对立事件 A 来算，有 $P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-0.2^4=0.9984$

（Ⅱ）ξ 可能的取值为 $0,1,2$

$$P\left(\xi=0\right)=\frac{C_{17}^2}{C_{20}^2}=\frac{136}{190}，\ P\left(\xi=1\right)=\frac{C_3^1C_{17}^1}{C_{20}^2}=\frac{51}{190}，\ P\left(\xi=2\right)=\frac{C_3^2}{C_{20}^2}=\frac{3}{190}$$

ξ	0	1	2
P	$\frac{136}{190}$	$\frac{51}{190}$	$\frac{3}{190}$

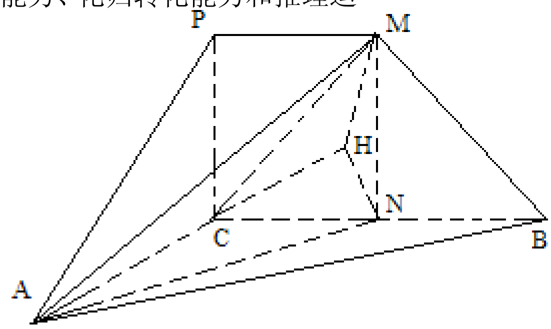
$$E\xi=0\times\frac{136}{190}+1\times\frac{51}{190}+2\times\frac{3}{190}=\frac{3}{10}$$

记“商家任取 2 件产品检验，都合格”为事件 B，则商家拒收这批产品的概率

$$P=1-P(B)=1-\frac{136}{190}=\frac{27}{95}$$

所以商家拒收这批产品的概率为 $\frac{27}{95}$

（19）本题主要考察异面直线所成的角、平面与平面垂直、二面角、三棱锥体积等有关知识，考察思维能力和空间想象能力、应用向量知识解决数学问题的能力、化归转化能力和推理运算能力。



解法一：

（Ⅰ）$\because PC\perp AB, PC\perp BC, AB\cap BC=B$

$\therefore PC\perp$ 平面ABC，

又$\because PC\subset$ 平面PAC

$\therefore$ 平面$PAC\perp$ 平面ABC

（Ⅱ）取 BC 的中点 N，则 $CN=1$，连结 AN, MN，

$\because PM \overset{//}{=} CN$，$\therefore MN \overset{//}{=} PC$，从而 $MN\perp$ 平面ABC

作 $NH\perp AC$，交 AC 的延长线于 H，连结 MH，则由三垂线定理知，$AC\perp NH$，从而 $\angle MHN$ 为二面角 $M-AC-B$ 的平面角

直线 AM 与直线 PC 所成的角为 60^0

$\therefore \angle AMN=60^0$

在 ΔACN 中，由余弦定理得 $AN=\sqrt{AC^2+CN^2-2AC\cdot CN\cdot\cos 120^0}=\sqrt{3}$

在 ΔAMN 中，$MN=AN\cdot\cot\angle AMN=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=1$

在 ΔCNH 中，$NH=CN\cdot\sin\angle NCH=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

在ΔMNH中，$MN=\tan\angle MHN=\dfrac{MN}{NH}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

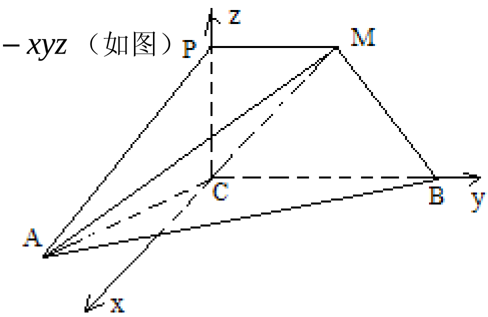
故二面角$M-AC-B$的平面角大小为$\arctan\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，$PCMN$为正方形

$$\therefore V_{P-MAC}=V_{A-PCM}=V_{A-MNC}=V_{M-ACN}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AC\cdot CN\cdot\sin 120^{0}\cdot MN=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

解法二：（Ⅰ）同解法一

（Ⅱ）在平面ABC内，过C作$CD\perp CB$，建立空间直角坐标系$C-xyz$（如图）



由题意有$A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$，设$P(0,0,z_0)(z_0>0)$，

则$M(0,1,z_0),\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},z_0\right),\overrightarrow{CP}=(0,0,z_0)$

由直线AM与直线PC所成的解为60^0，得

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CP}=\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CP}\right|\cdot\cos 60^0$，即$z_0{}^2=\dfrac{\pi}{2}\sqrt{z_0{}^2+3}\cdot z_0$，解得$z_0=1$

$\therefore\overrightarrow{CM}=(0,0,1),\overrightarrow{CA}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$，设平面$MAC$的一个法向量为$\vec{n}=\{x_1,y_1,z_1\}$，

则$\begin{cases}y_1+z_1=0\\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}y_1-\dfrac{1}{2}z_1=0\end{cases}$，取$x_1=1$，得$\vec{n}=\{1,\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$

平面ABC的法向量取为$\vec{m}=(0,0,1)$

设$\vec{m}$与$\vec{n}$所成的角为θ，则$\cos\theta=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

显然，二面角$M-AC-B$的平面角为锐角，

故二面角$M-AC-B$的平面角大小为$\arccos\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

（Ⅲ）取平面PCM的法向量取为$\overrightarrow{n_1}=(1,0,0)$，则点 A 到平面$PCM$的距离

$h=\frac{\left|\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{n_1}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\because$ $\left|\overrightarrow{PC}\right|=1,\left|\overrightarrow{PM}\right|=1$, $\therefore$

$V_{P-MAC}=V_{A-PCM}==\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PM}\right|\cdot h=\frac{1}{6}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{12}$

（20）本题主要考察直线、椭圆、平面向量的数量积等基础知识，以及综合应用数学知识解决问题及推理计算能力。

解：（Ⅰ）解法一：易知$a=2,b=1,c=\sqrt{3}$

所以$F_1\left(-\sqrt{3},0\right),F_2\left(\sqrt{3},0\right)$，设$P\left(x,y\right)$，则

$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\left(-\sqrt{3}-x,-y\right),\left(\sqrt{3}-x,-y\right)=x^2+y^2-3=x^2+1-\frac{x^2}{4}-3=\frac{1}{4}\left(3x^2-8\right)$

因为$x\in\left[-2,2\right]$，故当$x=0$，即点P为椭圆短轴端点时，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$有最小值$-2$

当$x=\pm2$，即点P为椭圆长轴端点时，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$有最大值$1$

解法二：易知$a=2,b=1,c=\sqrt{3}$，所以$F_1\left(-\sqrt{3},0\right),F_2\left(\sqrt{3},0\right)$，设$P\left(x,y\right)$，则

$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\left|\overrightarrow{PF_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PF_2}\right|\cdot\cos\angle F_1PF_2=\left|\overrightarrow{PF_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PF_2}\right|\cdot\frac{\left|\overrightarrow{PF_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{PF_2}\right|^2-\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right|^2}{2\left|\overrightarrow{PF_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PF_2}\right|}$

$=\frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{3}\right)^2+y^2+\left(x-\sqrt{3}\right)^2+y^2-12\right]=x^2+y^2-3$（以下同解法一）

（Ⅱ）显然直线$x=0$不满足题设条件，可设直线$l:y=kx-2,A\left(x_1,y_2\right),B\left(x_2,y_2\right)$，

联立$\begin{cases}y=kx-2\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，消去$y$，整理得：$\left(k^2+\frac{1}{4}\right)x^2+4kx+3=0$

$\therefore x_1+x_2=-\frac{4k}{k^2+\frac{1}{4}},x_1\cdot x_2=\frac{3}{k^2+\frac{1}{4}}$

由$\Delta=\left(4k\right)^2-4\left(k+\frac{1}{4}\right)\times3=4k^2-3>0$得：$k<\frac{\sqrt{3}}{2}$或$k>-\frac{\sqrt{3}}{2}$

又$0^0<\angle A0B<90^0\Leftrightarrow\cos\angle A0B>0\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}>0$

$\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2>0$

又 $y_1y_2=(kx_1+2)(kx_2+2)=k^2x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4=\dfrac{3k^2}{k^2+\frac{1}{4}}+\dfrac{-8k^2}{k^2+\frac{1}{4}}+4=\dfrac{-k^2+1}{k^2+\frac{1}{4}}$

$\because \dfrac{3}{k^2+\frac{1}{4}}+\dfrac{-k^2+1}{k^2+\frac{1}{4}}>0$，即 $k^2<4$　$\therefore -2<k<2$

故由①、②得 $-2<k<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<k<2$

（21）本题综合考察数列、函数、不等式、导数应用等知识，以及推理论证、计算及解决问题的能力。

解：（Ⅰ）由题可得 $f'(x)=2x$

所以过曲线上点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线方程为 $y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$，

即 $y-(x_n-4)=2x_n(x-x_n)$

令 $y=0$，得 $-(x_n{}^2-4)=2x_n(x_{n+1}-x_n)$，即 $x_n{}^2+4=2x_nx_{n+1}$

显然 $x_n\neq 0$　$\therefore x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{2}{x_n}$

（Ⅱ）证明：（必要性）

若对一切正整数 $n, x_{n+1}\le x_n$，则 $x_2\le x_1$，即 $\dfrac{x_1}{2}+\dfrac{2}{x_1}\le x_1$，而 $x_1>0$，$\therefore x_1{}^2\ge 4$，即有 $x_1\ge 2$

（充分性）若 $x_1\ge 2>0$，由 $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{2}{x_n}$

用数学归纳法易得 $x_n>0$，从而 $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{2}{x_n}\ge 2\sqrt{\dfrac{x_n}{2}\cdot\dfrac{2}{x_n}}=2(n\ge 1)$，即 $x_n\ge 2(n\ge 2)$

又 $x_1\ge 2$　$\therefore x_n\ge 2(n\ge 2)$

于是 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{x_n}{2}+\dfrac{2}{x_n}-x_n=\dfrac{4-x_n{}^2}{2x_n}=\dfrac{(2-x_n)(2+x_n)}{2x_n}\le 0$，

即 $x_{n+1}\le x_n$ 对一切正整数 n 成立

（III）由 $x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{2}{x_n}$，知 $x_{n+1}+2=\frac{(x_n+2)^2}{2x_n}$，同理，$x_{n+1}-2=\frac{(x_n-2)^2}{2x_n}$

故 $\frac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-2}=\left(\frac{x_n+2}{x_n-2}\right)^2$

从而 $\lg\frac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-2}=2\lg\frac{x_n+2}{x_n-2}$，即 $a_{n+1}=2a_n$

所以，数列 $\{a_n\}$ 成等比数列，故 $a_n=2^{n-1}a_1=2^{n-1}\lg\frac{x_1+2}{x_1-2}=2^{n-1}\lg 3$，

即 $\lg\frac{x_n+2}{x_n-2}=2^{n-1}\lg 3$，从而 $\frac{x_n+2}{x_n-2}=3^{2n-1}$

所以 $x_n=\frac{2\left(3^{2n-1}+1\right)}{3^{2n-1}-1}$

（22）本题考察函数、不等式、导数、二项式定理、组合数计算公式等内容和数学思想方法。考查综合推理论证与分析解决问题的能力及创新意识。

（Ⅰ）解：展开式中二项式系数最大的项是第 4 项，这项是 $C_6^3 1^5\left(\frac{1}{n}\right)^3=\frac{20}{n^3}$

（Ⅱ）证法一：因 $f(2x)+f(2)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$

$\geq 2\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)>2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$>2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)\geq 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=2f'(x)$

证法二：因

$f(2x)+f(2)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\geq 2\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$

而 $2f'(x)=2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

故只需对 $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 和 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 进行比较。

令 $g(x)=x-\ln x(x\ge 1)$，有 $g^{'}(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

由 $\frac{x-1}{x}=0$，得 $x=1$

因为当 $0<x<1$ 时，$g^{'}(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $1<x<+\infty$ 时，$g^{'}(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，所以在 $x=1$ 处 $g(x)$ 有极小值 1

故当 $x>1$ 时，$g(x)>g(1)=1$，

从而有 $x-\ln x>1$，亦即 $x>\ln x+1>\ln x$

故有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 恒成立。

所以 $f(2x)+f(2)\ge 2f^{'}(x)$，原不等式成立。

（III）对 $m\in N$，且 $m>1$

有 $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=C_m^0+C_m^1\left(\frac{1}{m}\right)++C_m^2\left(\frac{1}{m}\right)^2+\cdots+C_m^k\left(\frac{1}{m}\right)^k+\cdots+C_m^m\left(\frac{1}{m}\right)^m$

$$=1+1++\frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{1}{m}\right)^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{m}\right)^k+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}{m!}\left(\frac{1}{m}\right)^m$$

$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)$$

$$<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots+\frac{1}{m!}$$

$$<2+\frac{1}{2\times 1}+\frac{1}{3\times 2}+\cdots+\frac{1}{k(k-1)}+\cdots+\frac{1}{m(m-1)}$$

$$=2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)$$

$$=3-\frac{1}{m}<3$$

又因 $C_m^k\left(\frac{1}{m}\right)^k>0(k=2,3,4,\cdots,m)$，故 $2<\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<3$

$\because 2<\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<3$，从而有 $2n<\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<3n$ 成立，

即存在 $a=2$，使得 $2n<\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}<3n$ 恒成立。