2005年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）

理科数学（必修+选修 II）

第 I 卷（共 60 分）

参考公式：如果事件 **A**、**B** 互斥，那么 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

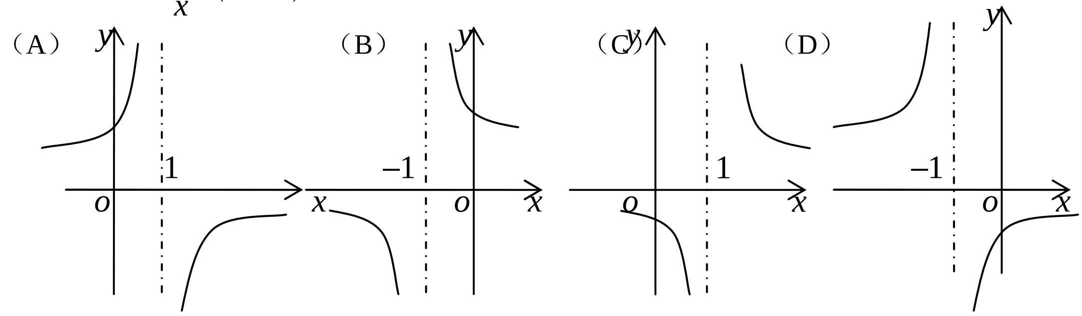
如果事件 **A**、**B** 相互独立，那么 $P(A\cdot B)=P(A)P(B)$

一．选择题：本大题共 12 小题，每题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，选择一个符合题目要求的选项.

（1）$\dfrac{1-i}{(1+i)^2}+\dfrac{1+i}{(1-i)^2}=$ （　　）

（A）i　　（B）$-i$　　（C）1　　（D）-1

（2）函数 $y=\dfrac{1-x}{x}\left(x\neq 0\right)$ 的反函数图像大致是 （　　）



（3）已知函数 $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)$，则下列判断正确的是（　）

（A）此函数的最小周期为 2π，其图像的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$

（B）此函数的最小周期为 π，其图像的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$

（C）此函数的最小周期为 2π，其图像的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$

（D）此函数的最小周期为 π，其图像的一个对称中心是 $\left(\dfrac{\pi}{6},0\right)$

（4）下列函数既是奇函数，又在区间 $\left[-1,1\right]$ 上单调递减的是（　　）

（A） $f(x)=\sin x$（B） $f(x)=-\left|x+1\right|$（C） $f(x)=\frac{1}{2}\left(a^{x}+a^{-x}\right)$（D） $f(x)=\ln\frac{2-x}{2+x}$

（5）如果$\left(3x-\frac{1}{\sqrt[3]{x^{2}}}\right)^{n}$的展开式中各项系数之和为 128，则展开式中$\frac{1}{x^{3}}$的系数是（　　）

（A）7　　　　（B）-7　　　　（C）21　　　　（D）-21

（6）函数$f(x)=\begin{cases}\sin(\pi x^{2}),-1<x<0,\\ e^{x-1},x\geq 0.\end{cases}$，若$f(10+f(a)=2,$则$a$的所有可能值为（　　）

（A）1　　　　（B）$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　（C）$1,-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　　（D）$1,\frac{\sqrt{2}}{2}$

（7）已知向量$\vec{a},\vec{b}$，且$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b},\overrightarrow{BC}=-5\vec{a}+6\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=7\vec{a}-2\vec{b}$，则一定共线的三点是（　　）

（　A）A、B、D　　（B）A、B、C　　（C）B、C、D　（D）A、C、D

（8）设地球的半径为R，若甲地位于北纬45°东经120°，乙地位于南纬75°东经120°，则甲、乙两地的球面距离为（　　）

（A）$\sqrt{3}R$　　　　（B）$\frac{\pi}{6}R$　　　　（C）$\frac{5\pi}{6}R$　　　　（D）$\frac{2\pi}{3}R$

（9）10 张奖券中只有 3 张有奖，5 个人购买，至少有 1 人中奖的概率是（　　）

（A）$\frac{3}{10}$　　　　（B）$\frac{1}{12}$　　　　（C）$\frac{1}{2}$　　　　（D）$\frac{11}{12}$

（10）设集合 A、B 是全集U的两个子集，则$A\subset B$是$\left(C_{U}A\right)\cup B=U$的（　　）

（A）充分不必要条件（B）必要不充分条件（C）冲要条件（D）既不充分也不必要条件

（11）$0<a<1$，下列不等式一定成立的是（　　）

（A）$\left|\log_{(1+a)}(1-a)\right|+\left|\log_{(1-a)}(1+a)\right|>2$（B）$\left|\log_{(1+a)}(1-a)\right|<\left|\log_{(1-a)}(1+a)\right|$

（C）$\left|\log_{(1+a)}(1-a)+\log_{(1-a)}(1+a)\right|<\left|\log_{(1+a)}(1-a)\right|+\left|\log_{(1-a)}(1+a)\right|$

（D）$\left|\log_{(1+a)}(1-a)-\log_{(1-a)}(1+a)\right|<\left|\log_{(1+a)}(1-a)\right|-\left|\log_{(1-a)}(1+a)\right|$

（12）设直线$l:2x+y+2=0$关于原点对称的直线为l'，若l'与椭圆$x^{2}+\frac{y^{2}}{4}=1$的交点为 A、B、，点P为椭圆上的动点，则使ΔPAB的面积为$\frac{1}{2}$的点P的个数为（　　）

（A）1　　　　（B）2　　　　（C）3　　　　（D）4

第II卷（共90分）

二．填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分.答案须填在题中横线上.

（13）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{C_n^2+2C_n^{n-2}}{(n+1)^2}=$____________ .

(14)设双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F$，右准线$l$与两条渐近线交于 P、$Q$两点，如果$\Delta PQF$是直角三角形，则双曲线的离心率$e=$____________ .

(15)设x、y满足约束条件$\begin{cases}x+y\le 5,\\3x+2y\le 12,\\0\le x\le 3,\\0\le y\le 4.\end{cases}$则使得目标函数$z=6x+5y$的最大的点$(x,y)$是__________ .

(16)已知m、n是不同的直线，α、β是不重合的平面，给出下列命题：

①若$\alpha//\beta,m\subset\alpha,n\subset\beta,$则$m//n$

②若$m,n\subset\alpha,m//\beta,$则$\alpha//\beta$ ③若$m\perp\alpha,n\perp\beta,m//n$，则$\alpha//\beta$ ④m,n是两条异面直线，若$m//\alpha,m//\beta,n//\alpha,n//\beta$，则$\alpha//\beta$

上面的命题中，真命题的序号是_______（写出所有真命题的序号）

三．解答题：本大题共6小题，共74分. 解答写出文字说明，证明过程或演算步骤.

（17）（本小题满分12分）

已知向量$\vec{m}=(\cos\theta,\sin\theta)$和$\vec{n}=\left(\sqrt{2}-\sin\theta,\cos\theta\right),\theta\in\left(\pi,2\pi\right)$，且$\left|\vec{m}+\vec{n}\right|=\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$，求$\cos\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)$的值.

(18)(本小题满分12分)

袋中装有黑球和白球共7个, 从中任取2个球都是白球的概率为$\dfrac{1}{7}$, 现有甲、乙两人从袋中轮流摸取1球，甲先取，乙后取，然后甲再取……取后不放回，直到两人中有一人取到白球时既终止，每个

球在每一次被取出的机会是等可能的，用ξ表示取球终止所需要的取球次数.

（I）求袋中所有的白球的个数；

（II）求随机变量ξ的概率分布；

（III）求甲取到白球的概率.

(19)（本小题满分 12 分）

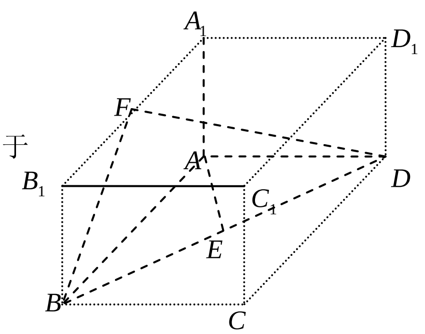
已知$x=1$是函数$f(x)=mx^3-3(m+1)x^2+nx+1$的一个极值点，其中$m,n\in R,m<0$，

（I）求m与n的关系式；

（II）求$f(x)$的单调区间；

（III）当$x\in[-1,1]$时，函数$y=f(x)$的图象上任意一点的切线斜率恒大于 $3m$，求m的取值范围.

(20)(本小题满分 12 分)



如图，已知长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB=2,AA_1=1,$

直线BD与平面AA_1B_1B所成的角为$30°$，AE垂直BD于E，F为A_1B_1的中点.

（I）求异面直线AE与BF所成的角；

（II）求平面BDF与平面AA_1B所成的二面角；

（III）求点A到平面BDF的距离.

(21)（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=5,$前n项和为S_n，且$S_{n+1}=S_n+n+5(n\in N^*)$

（I）证明数列$\{a_n+1\}$是等比数列；

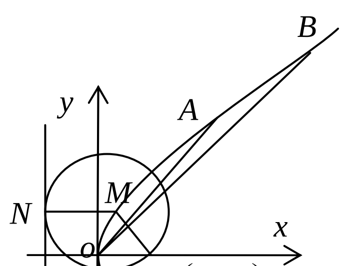
（II）令$f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，求函数$f(x)$在点$x=1$处的导数$f'(1)$并比较$2f'(1)$与$23n^2-13n$的大小.

(22)(本小题满分 14 分)

已知动圆过定点$\left(\frac{p}{2},0\right)$，且与直线$x=-\frac{p}{2}$相切，其中$p>0$.

（I）求动圆圆心C的轨迹的方程；

（II）设 A、B 是轨迹C上异于原点O的两个不同点，直线OA和OB的倾斜角分别为α和β，当α,β



变化且$\alpha+\beta$为定值$\theta(0<\theta<\pi)$时，证明直线AB恒过定点，并求出该定点的坐标.

2005年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）

（试题参考答案）

理科数学（必修+选修 II）

一．选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	B	D	C	C	A	D	D	A	A	B

二．填空题

13．$\dfrac{3}{2}$　　14.　$e=\sqrt{2}$　　15.　$(2,3)$　　16.　③④

三.解答题

17.考查知识点：（三角和向量相结合）

解:$\vec{m}+\vec{n}=\left(\cos\theta-\sin\theta+\sqrt{2},\cos\theta+\sin\theta\right)$

$$\left|\vec{m}+\vec{n}\right|=\sqrt{\left(\cos\theta-\sin\theta+\sqrt{2}\right)^2+(\cos\theta+\sin\theta)^2}=$$

$$\sqrt{4+2\sqrt{2}(\cos\theta-\sin\theta)}=\sqrt{4+4\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=2\sqrt{1+\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

由已知$\left|\vec{m}+\vec{n}\right|=\dfrac{8\sqrt{2}}{5}$,, 得$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{7}{25}$又$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cos^2(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{8})-1$

$\because\ \cos^2(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{8})=\dfrac{16}{25}$　　$\therefore\ \theta\in(\pi,2\pi)$　　$\therefore$　$\dfrac{5\pi}{8}<\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{8}<\dfrac{9\pi}{8}$

$\therefore$　$\cos\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)<0$　　$\therefore$　$\cos\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{8}\right)=-\dfrac{4}{5}$

18.（考查知识点：概率及分布列）

解:(I)设袋中原有n个白球, 由题意知$\dfrac{1}{7}=\dfrac{C_n^2}{C_7^2}=\dfrac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{7\times6}{2}}=\dfrac{n(n-1)}{7\times6}$

可得 $n=3$ 或 $n=-2$（舍去）即袋中原有 3 个白球.

(II) 由题意, ξ 的可能取值为 1, 2, 3, 4, 5

$$P(\xi=1)=\frac{3}{7};$$

$$P(\xi=2)=\frac{4\times3}{7\times6}=\frac{2}{7};$$

$$P(\xi=3)=\frac{4\times3\times2}{7\times6\times5}=\frac{6}{35};$$

$$P(\xi=4)=\frac{4\times3\times2\times3}{7\times6\times5\times4}=\frac{3}{35};$$

$$P(\xi=5)=\frac{4\times3\times2\times1\times3}{7\times6\times5\times4\times3}=\frac{1}{35};$$

所以 ξ 的分布列为:

ξ	1	2	3	4	5
P	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{1}{35}$

(III)因为甲先取,所以甲只有可能在第一次,第三次和第 5 次取球,记”甲取到白球”为事件 A ,则

$$P(A)=P(\xi=1)+P(\xi=3)+P(\xi=5)=\frac{22}{35}$$

19.（考查知识点：函数结合导数）

解 (I) $f'(x)=3mx^2-6(m+1)x+n$ 因为 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 的一个极值点，所以 $f'(1)=0$，即

$3m-6(m+1)+n=0$，所以 $n=3m+6$

（II）由（I）知，$f'(x)=3mx^2-6(m+1)x+3m+6=3m(x-1)\left[x-\left(1+\frac{2}{m}\right)\right]$

当 $m<0$ 时，有 $1>1+\frac{2}{m}$，当 x 变化时，$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的变化如下表：

x	$\left(-\infty,1+\frac{2}{m}\right)$	$1+\frac{2}{m}$	$\left(1+\frac{2}{m},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	<0	0	>0	0	<0
$f(x)$	调调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减

故有上表知，当 $m<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,1+\dfrac{2}{m}\right)$ 单调递减，在 $(1+\dfrac{2}{m},1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

（III）由已知得 $f'(x)>3m$，即 $mx^2-2(m+1)x+2>0$

又 $m<0$ 所以 $x^2-\dfrac{2}{m}(m+1)x+\dfrac{2}{m}<0$ 即 $x^2-\dfrac{2}{m}(m+1)x+\dfrac{2}{m}<0, x\in[-1,1]$ ①

设 $g(x)=x^2-2(1+\dfrac{1}{m})x+\dfrac{2}{m}$，其函数开口向上，由题意知①式恒成立，

所以 $\begin{cases} g(-1)<0 \\ g(1)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+2+\dfrac{2}{m}+\dfrac{2}{m}<0 \\ -1<0 \end{cases}$ 解之得 $-\dfrac{4}{3}<m$ 又 $m<0$ 所以 $-\dfrac{4}{3}<m<0$

即 m 的取值范围为 $\left(-\dfrac{4}{3},0\right)$

20．(考查知识点：立体几何)

解：在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，以 AB 所在的直线为 x 轴，以 AD 所在的直线为 y 轴，AA_1 所在的直线为 z 轴建立如图示空间直角坐标系

由已知 $AB=2, AA_1=1,$ 可得 $A(0,0,0), B(2,0,0)$，$F(1,0,1)$

又 $AD\perp$ 平面 AA_1B_1B，从而 BD 与平面 AA_1B_1B 所成的角为 $\angle DBA=30^\circ$，又 $AB=2$，$AE\perp BD$，

$AE=1, AD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 从而易得 $E\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right), D\left(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$

（I）因为 $\overline{AE}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right), \overline{BF}=(-1,0,1)$ 所以 $\cos\left(\overline{AE},\overline{BF}\right)=\dfrac{\overline{AE}\cdot\overline{BF}}{\left|\overline{AE}\right|\left|\overline{BF}\right|}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

易知异面直线 AE、BF 所成的角为 $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

（II）易知平面 AA_1B 的一个法向量 $\vec{m}=(0,1,0)$ 设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 BDF 的一个法向量，

$\overrightarrow{BD}=(-2,\dfrac{2\sqrt{3}}{3},0)$ 由 $\begin{cases} \vec{n}\perp\overrightarrow{BF} \\ \vec{n}\perp\overrightarrow{BD} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+z=0 \\ 2x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ \sqrt{3}x=y \end{cases}$

即$\vec{n}=\left(1,\sqrt{3},1\right)$所以$\cos\left\langle\vec{m},\vec{n}\right\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$即平面$BDF$与平面$AA_1B$所成的二面角的大小（锐角）为$\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

（III）点A到平面BDF的距离，即$\overrightarrow{AB}$在平面BDF的法向量$\vec{n}$上的投影的绝对值，

所以距离$d=\left|\overrightarrow{AB}\cdot\cos\left\langle\overrightarrow{AB},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$所以点$A$到平面$BDF$的距离为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

21.（**考查知识点:数列**）

解：由已知$S_{n+1}=S_n+n+5(n\in N^*)$可得$n\ge 2,S_n=2S_{n-1}+n+4$两式相减得

$S_{n+1}-S_n=2\left(S_n-S_{n-1}\right)+1$即$a_{n+1}=2a_n+1$从而$a_{n+1}+1=2\left(a_n+1\right)$当$n=1$时$S_2=2S_1+1+5$所以$a_2+a_1=2a_1+6$又$a_1=5$所以$a_2=11$从而$a_2+1=2\left(a_1+1\right)$

故总有$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，$n\in N^*$又$a_1=5,a_1+1\ne 0$从而$\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$即数列$\left\{a_n+1\right\}$是等比数列；

（II）由（I）知$a_n=3\times 2^n-1$

因为$f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$所以$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}$

从而$f'(1)=a_1+2a_2+\cdots+na_n=\left(3\times 2-1\right)+2\left(3\times 2^2-1\right)+\cdots+n(3\times 2^n-1)$

$=3\left(2+2\times 2^2+\cdots+n\times 2^n\right)-\left(1+2+\cdots+n\right)=3\left(n-1\right)\cdot 2^{n+1}-\dfrac{n(n+1)}{2}+6$

由上$2f'(1)-\left(23n^2-13n\right)=12\left(n-1\right)\cdot 2^n-12\left(2n^2-n-1\right)=$

$12\left(n-1\right)\cdot 2^n-12\left(n-1\right)(2n+1)=12\left(n-1\right)\left[2^n-(2n+1)\right]$①

当$n=1$时，①式=0 所以$2f'(1)=23n^2-13n$；

当$n=2$时，①式$=-12<0$所以$2f'(1)<23n^2-13n$

当$n\ge 3$时，$n-1>0$又$2^n=\left(1+1\right)^n=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n\ge 2n+2>2n+1$

所以$\left(n-1\right)\left[2^n-\left(2n+1\right)\right]>0$即①$>0$从而$2f'(1)>23n^2-13n$

22.（**考查知识点:圆锥曲线**）

解：（I）如图，设M为动圆圆心，$\left(\frac{p}{2},0\right)$为记为$F$，过点$M$作直线$x=-\frac{p}{2}$的垂线，垂足为$N$，由题意知：$|MF|=|MN|$即动点$M$到定点$F$与定直线$x=-\frac{p}{2}$的距离相等，由抛物线的定义知，点$M$的轨迹为抛物线，其中$F\left(\frac{p}{2},0\right)$为焦点，$x=-\frac{p}{2}$为准线，所以轨迹方程为$y^2=2px(P>0)$；

（II）如图，设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，由题意得$x_1\neq x_2$（否则$\alpha+\beta=\pi$）且$x_1,x_2\neq 0$所以直线$AB$的斜率存在，设其方程为$y=kx+b$，显然$x_1=\frac{y_1^2}{2p},x_2=\frac{y_2^2}{2p}$，将$y=kx+b$与$y^2=2px(P>0)$联立消去$x$，得$ky^2-2py+2pb=0$由韦达定理知$y_1+y_2=\frac{2p}{k},y_1\cdot y_2=\frac{2pb}{k}$①

（1）当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，即$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$时，$\tan\alpha\cdot\tan\beta=1$所以$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=1,x_1x_2-y_1y_2=0$，$\frac{y_1^2y_2^2}{4p^2}-y_1y_2=0$所以$y_1y_2=4p^2$由①知：$\frac{2pb}{k}=4p^2$所以$b=2pk.$因此直线$AB$的方程可表示为$y=kx+2Pk$，即$k(x+2P)-y=0$所以直线$AB$恒过定点$\left(-2p,0\right)$

（2）当$\theta\neq\frac{\pi}{2}$时，由$\alpha+\beta=\theta$，得$\tan\theta=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=$

$\frac{2p(y_1+y_2)}{y_1y_2-4p^2}$将①式代入上式整理化简可得：$\tan\theta=\frac{2p}{b-2pk}$，所以$b=\frac{2p}{\tan\theta}+2pk$，

此时，直线AB的方程可表示为$y=kx+\frac{2p}{\tan\theta}+2pk$即$k(x+2p)-\left(y-\frac{2p}{\tan\theta}\right)=0$

所以直线AB恒过定点$\left(-2p,\frac{2p}{\tan\theta}\right)$

所以由（1）（2）知，当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，直线AB恒过定点$\left(-2p,0\right)$，当$\theta\neq\frac{\pi}{2}$时直线AB恒过定点$\left(-2p,\frac{2p}{\tan\theta}\right)$.