2018年普通高等学校招生全国统一考试(江苏卷)数学

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共计70分.请把答案填写在答题卡相应位置上.

1.已知集合A={0，1，2，8}，B={－1，1，6，8}，那么A∩B=_____.

解析：∵A={0，1，2，8}，B={－1，1，6，8}，

∴A∩B={0，1，2，8}∩{－1，1，6，8}={1，8}，

答案：{1，8}

2.若复数z满足i·z=1+2i，其中i是虚数单位，则z的实部为_____.

解析：由i·z=1+2i，

得 $z=\frac{1+2i}{i}=\frac{(1+2i)(-i)}{-i^2}=2-i$，

∴z的实部为2.

答案：2

3.已知5位裁判给某运动员打出的分数的茎叶图如图所示，那么这5位裁判打出的分数的平均数为_____.

8	99
9	011

解析：根据茎叶图中的数据知，

这5位裁判打出的分数为89、89、90、91、91，

它们的平均数为 $\frac{1}{5}\times(89+89+90+91+91)=90$.

答案：90

4.一个算法的伪代码如图所示，执行此算法，最后输出的S的值为_____.

```
I←1
S←1
While  I<6
  I←I+2
  S←2S
End  While
Print  S
```

解析：模拟程序的运行过程如下；

I=1，S=1，

I=3，S=2，

I=5，S=4，

I=7，S=8，

此时不满足循环条件，则输出S=8.

答案：8

5.函数 $f(x)=\sqrt{\log_2 x-1}$ 的定义域为_____.

解析：由题意得：$\log_2 x\geqslant 1$，

解得：x≥2，

∴函数 f(x)的定义域是[2，+∞).
答案：[2，+∞)

6.某兴趣小组有 2 名男生和 3 名女生，现从中任选 2 名学生去参加活动，则恰好选中 2 名女生的概率为_____.
解析：(适合理科生)从 2 名男同学和 3 名女同学中任选 2 人参加社区服务，
共有 C_5^2=10 种，其中全是女生的有 C_3^2=3 种，

故选中的 2 人都是女同学的概率 P=$\frac{3}{10}$=0.3，
(适合文科生)，设 2 名男生为 a，b，3 名女生为 A，B，C，
则任选 2 人的种数为 ab，aA，aB，aC，bA，bB，Bc，AB，AC，BC 共 10 种，
其中全是女生为 AB，AC，BC 共 3 种，

故选中的 2 人都是女同学的概率 P=$\frac{3}{10}$=0.3，
答案：0.3

7.已知函数 y=sin(2x+φ)($-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$)的图象关于直线 x=$\frac{\pi}{3}$对称，则φ 的值为_____.

解析：∵y=sin(2x+φ)($-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$)的图象关于直线 x=$\frac{\pi}{3}$对称，

∴$2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，k∈Z，

即φ=kπ - $\frac{\pi}{6}$，

∵$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，

∴当 k=0 时，φ=-$\frac{\pi}{6}$，

答案：-$\frac{\pi}{6}$

8.在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞0，b＞0)的右焦点 F(c，0)到一条渐近线的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$c，则其离心率的值为_____.

解析：双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞0，b＞0)的右焦点 F(c，0)到一条渐近线$y=\frac{b}{a}x$的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$c，

可得：$\frac{\frac{bc}{a}}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}=b=\frac{\sqrt{3}}{2}c$，

可得$c^2-a^2=\frac{3}{4}c^2$，即 c=2a，

所以双曲线的离心率为：$e=\frac{c}{a}=2$.
答案：2

9. 函数 f(x)满足 f(x+4)=f(x)(x∈R)，且在区间(－2，2]上，f(x)=$\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2},0<x\le 2\\ \left|x+\dfrac{1}{2}\right|,-2<x\le 0\end{cases}$，

则 f(f(15))的值为_____.

解析：由 f(x+4)=f(x)得函数是周期为 4 的周期函数，

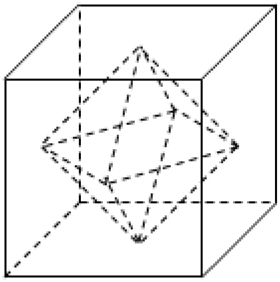
则 f(15)=f(16－1)=f(－1)=|－1+$\frac{1}{2}$ |=$\frac{1}{2}$，

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

即 f(f(15))=$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

答案：$\frac{\sqrt{2}}{2}$

10. 如图所示，正方体的棱长为 2，以其所有面的中心为顶点的多面体的体积为_____.



解析：正方体的棱长为 2，中间四边形的边长为：$\sqrt{2}$，

八面体看做两个正四棱锥，棱锥的高为 1，

多面体的中心为顶点的多面体的体积为：$2\times\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times 1=\frac{4}{3}$.

答案：$\frac{4}{3}$

11. 若函数 f(x)=2x^3－ax^2+1(a∈R)在(0，+∞)内有且只有一个零点，则 f(x)在[－1，1]上的最大值与最小值的和为_____.

解析：∵函数 f(x)=2x^3－ax^2+1(a∈R)在(0，+∞)内有且只有一个零点，

∴f′(x)=2x(3x－a)，x∈(0，+∞)，

①当 a≤0 时，f′(x)=2x(3x－a)＞0，

函数 f(x)在(0，+∞)上单调递增，f(0)=1，f(x)在(0，+∞)上没有零点，舍去；

②当 a＞0 时，f′(x)=2x(3x－a)＞0 的解为 x＞$\frac{a}{3}$，

∴f(x)在(0，$\frac{a}{3}$)上递减，在($\frac{a}{3}$，+∞)递增，

又 f(x)只有一个零点，

∴ $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+1=0$，解得 a=3，

f(x)=2x^3－3x^2+1，f′(x)=6x(x－1)，x∈[－1，1]，

f′(x)＞0 的解集为(－1，0)，

f(x)在(－1，0)上递增，在(0，1)上递减，

f(－1)=－4，f(0)=1，f(1)=0，

∴$f(x)_{min}$=f(－1)=－4，$f(x)_{max}$=f(0)=1，

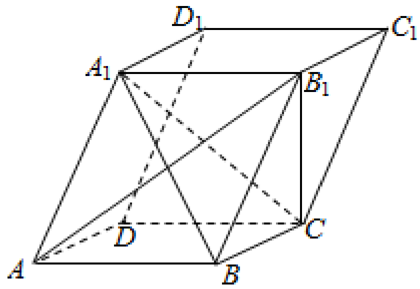
∴f(x)在[－1，1]上的最大值与最小值的和为：
$f(x)_{max}+f(x)_{min}=-4+1=-3$.
答案：-3

12.在平面直角坐标系 xOy 中，A 为直线 l：y=2x 上在第一象限内的点，B(5，0)，以 AB 为直径的圆 C 与直线 l 交于另一点 D.若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，则点 A 的横坐标为_____.
解析：设 A(a，2a)，a＞0，
∵B(5，0)，∴C($\frac{a+5}{2}$，a)，
则圆 C 的方程为(x－5)(x－a)+y(y－2a)=0.
联立$\begin{cases}y=2x\\(x-5)(x-a)+y(y-2a)=0\end{cases}$，解得 D(1，2).
∴$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(5-a,-2a)\cdot\left(\frac{-a-3}{2},2-a\right)=\frac{a^2-2a-15}{2}+2a^2-4a=0$.
解得：a=3 或 a=－1.
又 a＞0，∴a=3.
即 A 的横坐标为 3.
答案：3

13.在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，∠ABC=120°，∠ABC 的平分线交 AC 于点 D，且 BD=1，则 4a+c 的最小值为_____.
解析：由题意得 $\frac{1}{2}$acsin120° $=\frac{1}{2}$asin60° $+\frac{1}{2}$csin60°，
即 ac=a+c，
得$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=1$，
得$4a+c=(4a+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)=\frac{c}{a}+\frac{4a}{c}+5\geq 2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{4a}{c}}+5=4+5=9$，
当且仅当$\frac{c}{a}+\frac{4a}{c}$，即 c=2a 时，取等号.
答案：9

14.已知集合 A={x|x=2n－1，n∈N*}，B={x|x=2^n，n∈N*}.将 A∪B 的所有元素从小到大依次排列构成一个数列{a_n}，记 S_n 为数列{a_n}的前 n 项和，则使得 $S_n>12a_{n+1}$成立的 n 的最小值为_____.
解析：利用列举法可得：
$S_{26}=\frac{21(1+41)}{2}+\frac{2(1-2^5)}{1-2}=441+62=503$，$a_{27}=43$，⇒$12a_{27}=516$，不符合题意.
$S_{27}=\frac{22(1+43)}{2}+\frac{2(1-2^6)}{1-2}=546$，$_{28}=45$⇒$12_{28}=540$，符合题意，
答案：27

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分.请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.
15.在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB$，$AB_1\perp B_1C_1$.
求证：(1)AB∥平面 A_1B_1C；
(2)平面 $ABB_1A_1\perp$平面 A_1BC.



解析：(1)由$\left.\begin{array}{l} AB\parallel A_1B_1 \\ AB不在平面A_1B_1C内 \\ A_1B_1\subset 平面A_1B_1C \end{array}\right\}$⇒AB∥平面 A_1B_1C；

(2)可得四边形 ABB_1A_1 是菱形，$AB_1\perp A_1B$，

由 $AB_1\perp B_1C_1$⇒$AB_1\perp BC$⇒$AB_1\perp$面 A_1BC，⇒平面 $ABB_1A_1\perp$平面 A_1BC.

答案：证明：(1)平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB\parallel A_1B_1$，

$\left.\begin{array}{l} AB\parallel A_1B_1 \\ AB不在平面A_1B_1C内 \\ A_1B_1\subset 平面A_1B_1C \end{array}\right\}$⇒AB∥平面 A_1B_1C；

(2)在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB$，⇒四边形 ABB_1A_1 是菱形，⊥$AB_1\perp A_1B$.

在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=AB$，$AB_1\perp B_1C_1$⇒$AB_1\perp BC$.

∴$\left\{\begin{array}{l} AB_1\perp A_1B，AB_1\perp BC \\ A_1B\cap BC=B \\ A_1B\subset 面A_1BC，BC\subset 面A_1BC \end{array}\right.$

⇒$AB_1\perp$面 A_1BC，且 $AB_1\subset$平面 ABB_1A_1⇒平面 $ABB_1A_1\perp$平面 A_1BC.

16.已知α，β 为锐角，$\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

(1)求 cos2α 的值；

(2)求 tan(α -β)的值.

解析：(1)由已知结合平方关系求得 sinα，cosα 的值，再由倍角公式得 cos2α 的值；

(2)由(1)求得 tan2α，再由 $\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ 求得 tan(α+β)，利用 tan(α-β)=tan[2α-(α+β)]，展开两角差的正切求解.

答案：(1)由$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{4}{3} \\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \\ \alpha为锐角 \end{array}\right.$，解得$\left\{\begin{array}{l} \sin\alpha=\dfrac{4}{5} \\ \cos\alpha=\dfrac{3}{5} \end{array}\right.$，

∴$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=-\dfrac{7}{25}$；

(2)由(1)得，$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{24}{25}$，则 $\tan2\alpha=\dfrac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=-\dfrac{24}{7}$.

∵α，β∈$(0,\dfrac{\pi}{2})$，∴α+β∈(0，π)，

∴$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

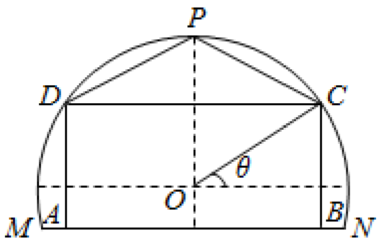
则 $\tan\left(\alpha+\beta\right)=\dfrac{\sin\left(\alpha+\beta\right)}{\cos\left(\alpha+\beta\right)}=-2$.

∴$\tan(\alpha-\beta)=\tan[2\alpha-(\alpha+\beta)]=\dfrac{\tan 2\alpha-\tan\left(\alpha+\beta\right)}{1+\tan 2\alpha\tan\left(\alpha+\beta\right)}=-\dfrac{2}{11}$.

17.某农场有一块农田，如图所示，它的边界由圆 O 的一段圆弧 $\overset{\frown}{MPN}$ (P 为此圆弧的中点)和线段 MN 构成.已知圆 O 的半径为 40 米，点 P 到 MN 的距离为 50 米.现规划在此农田上修建两个温室大棚，大棚 I 内的地块形状为矩形 ABCD，大棚 II 内的地块形状为△CDP，要求 A，B 均在线段 MN 上，C，D 均在圆弧上.设 OC 与 MN 所成的角为 θ.

(1)用 θ 分别表示矩形 ABCD 和△CDP 的面积，并确定 sinθ 的取值范围;

(2)若大棚 I 内种植甲种蔬菜，大棚 II 内种植乙种蔬菜，且甲、乙两种蔬菜的单位面积年产值之比为 4：3.求当 θ 为何值时，能使甲、乙两种蔬菜的年总产值最大.



解析：(1)根据图形计算矩形 ABCD 和△CDP 的面积，求出 sinθ 的取值范围;

(2)根据题意求出年总产值 y 的解析式，构造函数 f(θ)，

利用导数求 f(θ)的最大值，即可得出 θ 为何值时年总产值最大.

答案：(1)$S_{\text{矩形}ABCD}=(40\sin\theta+10)\cdot 80\cos\theta$

$=800(4\sin\theta\cos\theta+\cos\theta)$，

$S_{\triangle CDP}=\dfrac{1}{2}\cdot 80\cos\theta(40-40\sin\theta)$

$=1600(\cos\theta-\cos\theta\sin\theta)$，

当 B、N 重合时，θ 最小，此时 $\sin\theta=\dfrac{1}{4}$；

当 C、P 重合时，θ 最大，此时 $\sin\theta=1$，

∴sinθ 的取值范围是$[\dfrac{1}{4}，1)$；

(2)设年总产值为 y，甲种蔬菜单位面积年产值为 4t，乙种蔬菜单位面积年产值为 3t，

则 $y=3200t(4\sin\theta\cos\theta+\cos\theta)+4800t(\cos\theta-\cos\theta\sin\theta)$

$=8000t(\sin\theta\cos\theta+\cos\theta)$，其中 $\sin\theta\in[\dfrac{1}{4}，1)$；

设 $f(\theta)=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta$，

则 $f'(\theta)=\cos^2\theta-\sin^2\theta-\sin\theta$

$=-2\sin^2\theta-\sin\theta+1$；

令 $f'(\theta)=0$，解得 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，此时 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

当 $\sin\theta\in[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2})$时，$f'(\theta)>0$，$f(\theta)$单调递增;

当 $\sin\theta\in[\dfrac{1}{2}，1)$时，$f'(\theta)<0$，$f(\theta)$单调递减;

∴$\theta=\dfrac{\pi}{6}$时，f(θ)取得最大值，即总产值 y 最大.

答：(1)$S_{\text{矩形}ABCD}=800(4\sin\theta\cos\theta+\cos\theta)$，

$S_{\triangle CDP}=1600(\cos\theta - \cos\theta\sin\theta)$，

$\sin\theta \in [\frac{1}{4}，1)$；

(2)$\theta = \frac{\pi}{6}$时总产值 y 最大.

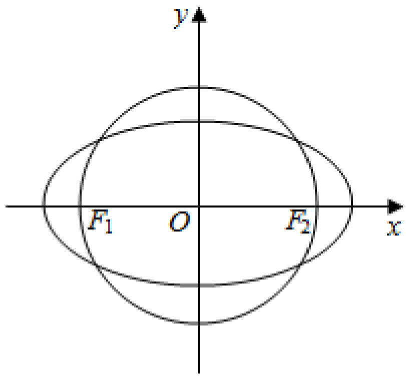
18.如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C 过点$(\sqrt{3},\frac{1}{2})$，焦点 $F_1(-\sqrt{3}，0)$，$F_2(\sqrt{3}，0)$，圆 O 的直径为 F_1F_2.

(1)求椭圆 C 及圆 O 的方程；

(2)设直线 l 与圆 O 相切于第一象限内的点 P.

①若直线 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点，求点 P 的坐标；

②直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点.若△OAB 的面积为$\frac{2\sqrt{6}}{7}$，求直线 l 的方程.



解析：(1)由题意可得 $c=\sqrt{3}$. $\frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1$，又 $a^2+b^2=c^2=3$，解得 a=2，b=1 即可.

(2)①可设直线 l 的方程为 y=kx+m，(k＜0，m＞0).可得$\frac{m^2}{1+k^2}=3$，即 $m^2=3+3k^2$.

由$\begin{cases} y=kx+m \\ x^2++4y^2=4 \end{cases}$，可得$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，$\triangle=(8km)^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)=0$，解得 $k=-\sqrt{2}$，m=3.即可.

②设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，联立直线与椭圆方程得$(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

O 到直线 l 的距离$d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}},|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_1|=\frac{4\sqrt{4k^2+1-m^2}}{4k^2+1}\cdot\sqrt{1+k^2}$，

△OAB 的面积为 S=

$\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{4k^2+1-m^2}}{4k^2+1}\cdot\sqrt{1+k^2}\times\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{k^2-2}}{4k^2+1}\times\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$，

解得 $k=-\sqrt{5}$，(正值舍去)，$m=3\sqrt{2}$.即可

答案：(1)由题意可设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，$(a>b>0)$，

∵焦点 $F_1(-\sqrt{3}，0)$，$F_2(\sqrt{3}，0)$，∴$c=\sqrt{3}$.

∵∴$\frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1$，又 $a^2+b^2=c^2=3$，

解得 a=2，b=1.

∴椭圆 C 的方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，圆 O 的方程为：$x^2+y^2=3$.

(2)①可知直线 l 与圆 O 相切，也与椭圆 C，且切点在第一象限，

∴可设直线 l 的方程为 y=kx+m，(k<0，m>0).

由圆心(0，0)到直线 l 的距离等于圆半径 $\sqrt{3}$ ，可得 $\frac{m^2}{1+k^2}=3$ ，即 $m^2=3+3k^2$.

由 $\begin{cases} y=kx+m \\ x^2++4y^2=4 \end{cases}$ ，可得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

$\triangle=(8km)^2-4(4k^2+1)(4m^2-4)=0$，

可得 $m^2=4k^2+1$，∴$3k^2+3=4k^2+1$，结合 k<0，m>0，解得 $k=-\sqrt{2}$ ，m=3.

将 $k=-\sqrt{2}$ ，m=3 代入 $\begin{cases} x^2+y^2=3 \\ y=kx+m \end{cases}$ 可得 $x^2-2\sqrt{2}x+2=0$ ，

解得 $x=\sqrt{2}$ ，y=1，故点 P 的坐标为 $(\sqrt{2},1)$.

②设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases} k<0，m>0 \\ m^2=3+3k^2 \\ \Delta>0 \end{cases}$ ⇒ $k<-\sqrt{2}$.

联立直线与椭圆方程得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

$|x_2-x_1|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4\sqrt{4k^2+1-m^2}}{4k^2+1}$ ，

O 到直线 l 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$ ，

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_1|=\frac{4\sqrt{4k^2+1-m^2}}{4k^2+1}\cdot\sqrt{1+k^2}$ ，

△OAB 的面积为 S=
$\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{4k^2+1-m^2}}{4k^2+1}\cdot\sqrt{1+k^2}\times\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{k^2-2}}{4k^2+1}\times\sqrt{1+k^2}\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$ ，

解得 $k=-\sqrt{5}$ ，(正值舍去)，$m=3\sqrt{2}$.

∴ $y=-\sqrt{5}x+3\sqrt{2}$ 为所求.

19.记 f′(x)，g′(x)分别为函数 f(x)，g(x)的导函数.若存在 $x_0\in R$，满足 $f(x_0)=g(x_0)$ 且 $f'(x_0)=g'(x_0)$，则称 x_0 为函数 f(x)与 g(x)的一个“S 点”.

(1)证明：函数 f(x)=x 与 $g(x)=x^2+2x-2$ 不存在“S 点”；

(2)若函数 $f(x)=ax^2-1$ 与 g(x)=lnx 存在“S 点”，求实数 a 的值；

(3)已知函数 $f(x)=-x^2+a$，$g(x)=\frac{be^x}{x}$.对任意 a>0，判断是否存在 b>0，使函数 f(x)与 g(x)在区间(0，+∞)内存在“S 点”，并说明理由.

解析：(1)根据“S 点”的定义解两个方程，判断方程是否有解即可；

(2)根据“S 点”的定义解两个方程即可；

(3)分别求出两个函数的导数，结合两个方程之间的关系进行求解判断即可.

答案：(1)证明：f′(x)=1，g′(x)=2x+2，

则由定义得 $\begin{cases} x=x^2+2x-2 \\ 1=2x+2 \end{cases}$ ，得方程无解，则 f(x)=x 与 $g(x)=x^2+2x-2$ 不存在“S 点”；

(2)f′(x)=2ax，g′(x)= $\frac{1}{x}$ ，x>0，

由 f′(x)=g′(x)得 $\frac{1}{x}$ =2ax，得 $x=\sqrt{\frac{1}{2a}}$，

$f\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)=-\frac{1}{2}=g\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)=-\frac{1}{2}\ln a2$，得 a=$\frac{e}{2}$；

(3) f′(x)=﹣2x，$g'(x)=\frac{be^{x}(x-1)}{x^{2}}$，(x≠0)，

由 f′(x_0)=g′(x_0)，得 $be^{x_0}=-\frac{2x_0^{\ 3}}{x_0-1}>0$，得 0<$x_0$<1，

由 f(x_0)=g(x_0)，得 $-x_0^{\ 2}+a=\frac{be^{x_0}}{x_0}=-\frac{2x_0^{\ 2}}{x_0-1}$，得 $a=x_0^{\ 2}-\frac{2x_0^{\ 2}}{x_0-1}$，

令 $h(x)=x^{2}-\frac{2x^{2}}{x-1}-a=\frac{-x^{3}+3x^{2}+ax-a}{1-x}$，(a>0，0<x<1)，
设 m(x)=﹣x^3+3x^2+ax﹣a，(a>0，0<x<1)，
则 m(0)=﹣a<0，m(1)=2>0，得 m(0)m(1)<0，
又 m(x)的图象在(0，1)上连续不断，
则 m(x)在(0，1)上有零点，
则 h(x)在(0，1)上有零点，
则 f(x)与 g(x)在区间(0，+∞)内存在“S”点.

20. 设{a_n}是首项为 a_1，公差为 d 的等差数列，{b_n}是首项为 b_1，公比为 q 的等比数列.
(1)设 a_1=0，b_1=1，q=2，若|a_n﹣b_n|≤b_1对 n=1，2，3，4 均成立，求 d 的取值范围；
(2)若 a_1=b_1>0，m∈N*，q∈(1，$\sqrt[m]{2}$]，证明：存在 d∈R，使得|a_n﹣b_n|≤b_1对 n=2，3，…，m+1 均成立，并求 d 的取值范围(用 b_1，m，q 表示).
解析：(1)根据等比数列和等差数列的通项公式，解不等式组即可；
(2)根据数列和不等式的关系，利用不等式的关系构造新数列和函数，判断数列和函数的单调性和性质进行求解即可.
答案：(1)由题意可知|a_n﹣b_n|≤1 对任意 n=1，2，3，4 均成立，
∵a_1=0，q=2，

$$\therefore\begin{cases}|0-1|\le 1\\|d-2|\le 1\\|2d-4|\le 1\\|3d-8|\le 1\end{cases}，解得\begin{cases}1\le d\le 3\\\frac{3}{2}\le d\le\frac{5}{2}\\\frac{7}{3}\le d\le 3\end{cases}.即\frac{7}{3}\le d\le\frac{5}{2}.$$

证明：(2)∵a_n=a_1+(n﹣1)d，b_n=b_1•q^{n-1}，
若存在 d∈R，使得|a_n﹣b_n|≤b_1对 n=2，3，…，m+1 均成立，
则|b_1+(n﹣1)d﹣b_1•q^{n-1}|≤b_1，(n=2，3，…，m+1)，

即 $\frac{q^{n-1}-2}{n-1}b_1\le d\le\frac{b_1q^{n-1}}{n-1}$，(n=2，3，…，m+1)，
∵q∈(1，$\sqrt[m]{2}$]，∴则 1<q^{n-1}≤q^m≤2，(n=2，3，…，m+1)，

∴ $\frac{q^{n-1}-2}{n-1}b_1\le 0,\frac{b_1q^{n-1}}{n-1}>0$，
因此取 d=0 时，|a_n﹣b_n|≤b_1对 n=2，3，…，m+1 均成立，

下面讨论数列{$\frac{q^{n-1}-2}{n-1}$}的最大值和数列{$\frac{q^{n-1}}{n-1}$}的最小值，

①当 2≤n≤m 时，$\frac{q^n-2}{n}-\frac{q^{n-1}-2}{n-1}=\frac{nq^n-q^n-nq^{n-1}+2}{n(n-1)}=\frac{n(q^n-q^{n-1})-q^n+2}{n(n-1)}$，

当$1<q\le 2^{\frac{1}{m}}$时，有 $q^n\le q^m\le 2$，

从而 $n(q^n-q^{n-1})-q^n+2>0$，

因此当 2≤n≤m+1 时，数列$\{\frac{q^{n-1}-2}{n-1}\}$单调递增，

故数列$\{\frac{q^{n-1}-2}{n-1}\}$的最大值为$\frac{q^m-2}{m}$.

②设 $f(x)=2^x(1-x)$，当 x＞0 时，$f'(x)=(\ln 2-1-x\ln 2)2^x<0$，

∴f(x)单调递减，从而 f(x)＜f(0)=1，

当 2≤n≤m 时，$\frac{\frac{q^n}{n}}{\frac{q^{n-1}}{n-1}}=\frac{q(n-1)}{n}\le 2^{\frac{1}{m}}\left(1-\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)<1$，

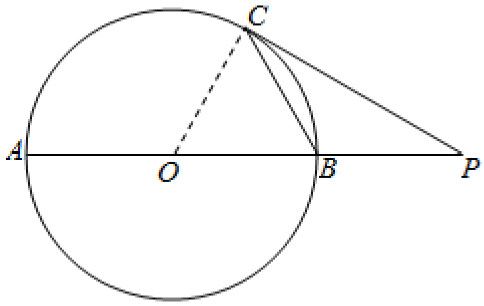
因此当 2≤n≤m+1 时，数列$\{\frac{q^{n-1}}{n-1}\}$单调递递减，

故数列$\{\frac{q^{n-1}}{n-1}\}$的最小值为$\frac{q^m}{n}$，$\frac{b_1(q^m-2)}{m}$

∴d 的取值范围是$d\in\left[\frac{b_1(q^m-2)}{m},\frac{b_1q^m}{m}\right]$.

数学Ⅱ(附加题)【选做题】本题包括 A、B、C、D 四小题，请选定其中两小题，并在相应的答题区域内作答.若多做，则按作答的前两小题评分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.A.[选修 4-1：几何证明选讲](本小题满分 10 分)

21.如图，圆 O 的半径为 2，AB 为圆 O 的直径，P 为 AB 延长线上一点，过 P 作圆 O 的切线，切点为 C.若 PC=$2\sqrt{3}$，求 BC 的长.



解析：连接 OC，由题意，CP 为圆 O 的切线，得到垂直关系，由线段长度及勾股定理，可以得到 PO 的长，即可判断△COB 是等边三角形，BC 的长.

答案：连接 OC，

因为 PC 为切线且切点为 C，

所以 OC⊥CP.

因为圆 O 的半径为 2，PC＝$2\sqrt{3}$，

所以 BO=OC=2，$PO=\sqrt{OC^2+CP^2}=4$，

所以$\cos\angle COP=\frac{1}{2}$，

所以∠COP=60°，

所以△COB 为等边三角形，

所以 BC=BO=2.

B.[选修 4-2：矩阵与变换](本小题满分 10 分)

22.已知矩阵 A=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(1)求 A 的逆矩阵 A^{-1}；

(2)若点 P 在矩阵 A 对应的变换作用下得到点 P′(3，1)，求点 P 的坐标.

解析：(1)矩阵 A=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，求出 det(A)=1≠0，A 可逆，然后求解 A 的逆矩阵 A^{-1}.

(2)设 P(x，y)，通过$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$，求出$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$，即可得到点 P 的坐标.

答案：(1)矩阵 A=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，det(A)=2×2－1×3=1≠0，所以 A 可逆，

从而：A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(2)设 P(x，y)，则$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$，所以$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$，

因此点 P 的坐标为(3，－1).

C.[选修 4-4：坐标系与参数方程](本小题满分 0 分)

23.在极坐标系中，直线 l 的方程为 $\rho\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)=2$，曲线 C 的方程为 $\rho=4\cos\theta$，求直线 l 被曲线 C 截得的弦长.

解析：将直线 l、曲线 C 的极坐标方程利用互化公式可得直角坐标方程，利用直线与圆的相交弦长公式即可求解.

答案：∵曲线 C 的方程为 $\rho=4\cos\theta$，∴$\rho^2=4\rho\cos\theta$，⇒$x^2+y^2=4x$，

∴曲线 C 是圆心为 C(2，0)，半径为 r=2 得圆.

∵直线 l 的方程为 $\rho\sin(\frac{\pi}{6}-\theta)=2$，∴$\frac{1}{2}\rho\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\sin\theta=2$，

∴直线 l 的普通方程为：$x-\sqrt{3}y=4$.

圆心 C 到直线 l 的距离为$d=\frac{2}{\sqrt{1+3}}=1$，

∴直线 l 被曲线 C 截得的弦长为$2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-1}=2\sqrt{3}$.

D.[选修 4-5：不等式选讲](本小题满分 0 分)

24.若 x，y，z 为实数，且 x+2y+2z=6，求 $x^2+y^2+z^2$ 的最小值.

解析：根据柯西不等式进行证明即可.

答案：由柯西不等式得$(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+2^2)\geqslant(x+2y+2z)^2$，

∵x+2y+2z=6，∴$x^2+y^2+z^2\geqslant4$

是当且仅当$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$时，不等式取等号，此时 $x=\frac{2}{3}$，$y=\frac{4}{3}$，$z=\frac{4}{3}$，

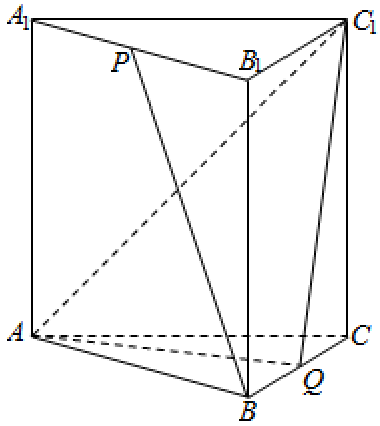
∴$x^2+y^2+z^2$ 的最小值为 4

【必做题】第 25 题、第 26 题，每题 10 分，共计 20 分.请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

25. 如图，在正三棱柱 ABC－$A_1B_1C_1$中，$AB=AA_1=2$，点 P，Q 分别为A_1B_1，BC 的中点.

(1)求异面直线 BP 与AC_1所成角的余弦值；

(2)求直线CC_1与平面AQC_1所成角的正弦值.



解析：设 AC，A_1C_1的中点分别为 O，O_1，以$\{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OO_1}\}$为基底，建立空间直角坐标系 O－xyz，

(1)由$\left|\cos<\overrightarrow{BP},\overrightarrow{AC_1}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC_1}\right|}{\left|\overrightarrow{BP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC_1}\right|}$可得异面直线 BP 与$AC_1$所成角的余弦值；

(2)求得平面AQC_1的一个法向量为$\vec{n}$，设直线CC_1与平面AQC_1所成角的正弦值为θ，

可得$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{CC_1},\vec{n}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{CC_1}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{CC_1}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}$，即可得直线$CC_1$与平面$AQC_1$所成角的正弦值.

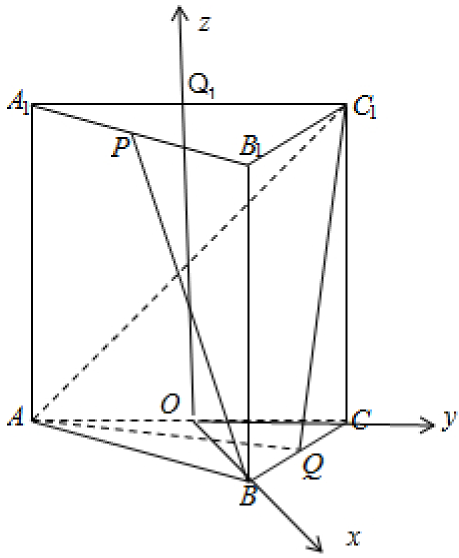
答案：如图，在正三棱柱 ABC－$A_1B_1C_1$中，

设 AC，A_1C_1的中点分别为 O，O_1，

则，$OB\perp OC$，$OO_1\perp OC$，$OO_1\perp OB$，

故以$\{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OO_1}\}$为基底，

建立空间直角坐标系 O－xyz，



∵$AB=AA_1=2$，A(0，－1，0)，B($\sqrt{3}$，0，0)，

C(0，1，0)，

A_1(0，－1，2)，B_1($\sqrt{3}$，0，2)，C_1(0，1，2).

(1)点 P 为 A_1B_1 的中点. ∴ $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},2\right)$，

∴ $\overrightarrow{BP}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},2\right),\overrightarrow{AC_1}=(0,2,2)$.

$\left|\cos<\overrightarrow{BP},\overrightarrow{AC_1}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AC_1}\right|}{\left|\overrightarrow{BP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC_1}\right|}=\frac{\left|-1+4\right|}{\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

∴异面直线 BP 与 AC_1 所成角的余弦值为：$\frac{3\sqrt{10}}{20}$；

(2)∵Q 为 BC 的中点. ∴ $Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\ 0\right)$

∴ $\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$，$\overrightarrow{AC_1}=(0,2,2),\overrightarrow{CC_1}=(0,2,2)$，

设平面 AQC_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{AQ}\cdot\vec{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y=0\\ \overrightarrow{AC_1}\cdot\vec{n}=2y+2z=0\end{cases}$，可取 $\vec{n}=(\sqrt{3},-1,1)$，

设直线 CC_1 与平面 AQC_1 所成角的正弦值为 θ，

$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{CC_1},\vec{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{CC_1}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{CC_1}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{2}{\sqrt{5}\times2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

∴直线 CC_1 与平面 AQC_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

26. 设 $n\in N^*$，对 1，2，……，n 的一个排列 $i_1i_2\cdots\cdots i_n$，如果当 $s<t$ 时，有 $i_s>i_t$，则称 (i_s,i_t) 是排列 $i_1i_2\cdots\cdots i_n$ 的一个逆序，排列 $i_1i_2\cdots\cdots i_n$ 的所有逆序的总个数称为其逆序数. 例如：对 1，2，3 的一个排列 231，只有两个逆序(2，1)，(3，1)，则排列 231 的逆序数为 2. 记 $f_n(k)$ 为 1，2，…，n 的所有排列中逆序数为 k 的全部排列的个数.

(1)求 $f_3(2)$，$f_4(2)$ 的值；

(2)求 $f_n(2)$ $(n\geq5)$ 的表达式(用 n 表示).

解析：(1)由题意直接求得 $f_3(2)$ 的值，对 1，2，3，4 的排列，利用已有的 1，2，3 的排列，将数字 4 添加进去，4 在新排列中的位置只能是最后三个位置，由此可得 $f_4(2)$ 的值；

(2)对一般的 $n(n\geq4)$ 的情形，可知逆序数为 0 的排列只有一个，逆序数为 1 的排列只能是将排列 12…n 中的任意相邻两个数字调换位置得到的排列，$f_n(1)=n-1$.

为计算 $f_{n+1}(2)$，当 1，2，…，n 的排列及其逆序数确定后，将 n+1 添加进原排列，n+1 在新排列中的位置只能是最后三个位置，可得 $f_{n+1}(2)=f_n(2)+f_n(1)+f_n(0)=f_n(2)+n$，则当 $n\geq5$ 时，$f_n(2)=[f_n(2)-f_{n-1}(2)]+[f_{n-1}(2)-f_{n-2}(2)]+\cdots+[f_5(2)-f_4(2)]+f_4(2)$，则 $f_n(2)$ $(n\geq5)$ 的表达式可求.

答案：(1)记 μ(abc)为排列 abc 得逆序数，对 1，2，3 的所有排列，有

μ(123)=0，μ(132)=1，μ(231)=2，μ(321)=3，

∴ $f_3(0)=1$，$f_3(1)=f_3(2)=2$，

对 1，2，3，4 的排列，利用已有的 1，2，3 的排列，将数字 4 添加进去，4 在新排列中的位置只能是最后三个位置.

因此，$f_4(2)=f_3(2)+f_3(1)+f_3(0)=5$；

(2)对一般的 $n(n\geq4)$ 的情形，逆序数为 0 的排列只有一个：12…n，∴ $f_n(0)=1$.

逆序数为 1 的排列只能是将排列 12…n 中的任意相邻两个数字调换位置得到的排列，$f_n(1)=n-1$.

为计算 $f_{n+1}(2)$，当 1，2，…，n 的排列及其逆序数确定后，将 n+1 添加进原排列，n+1 在新排列中的位置只能是最后三个位置.

因此，$f_{n+1}(2)=f_n(2)+f_n(1)+f_n(0)=f_n(2)+n$.

当 $n\geqslant5$ 时，$f_n(2)=[f_n(2)-f_{n-1}(2)]+[f_{n-1}(2)-f_{n-2}(2)]+\cdots+[f_5(2)-f_4(2)]+f_4(2)$

$=(n-1)+(n-2)+\cdots+4+f_4(2)=\dfrac{n^2-n-2}{2}$.

因此，当 $n\geqslant5$ 时，$f_n(2)=\dfrac{n^2-n-2}{2}$.