2013年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)

理 科 数 学

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷(非选择题)两部分, 共150分. 考试用时120分钟. 第Ⅰ卷1至2页, 第Ⅱ卷3至5页.

答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上, 并在规定位置粘贴考试用条形码. 答卷时, 考生务必将答案涂写在答题卡上, 答在试卷上的无效. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

祝各位考生考试顺利!

第Ⅰ卷

注意事项:

1. 每小题选出答案后, 用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号.
2. 本卷共8小题, 每小题5分, 共40分.

参考公式:

如果事件 A, B 互斥, 那么

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

棱柱的体积公式 $V=Sh$,

其中 S 表示棱柱的底面面积, h 表示棱柱的高.

如果事件 A, B 相互独立, 那么

$P(AB)=P(A)P(B)$

球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

其中 R 表示球的半径.

一．选择题：在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1) 已知集合 $A=\{x\in \boldsymbol{R}|\ |x|\le 2\}, A=\{x\in \boldsymbol{R}|\ x\le 1\}$，则 $A\cap B=$

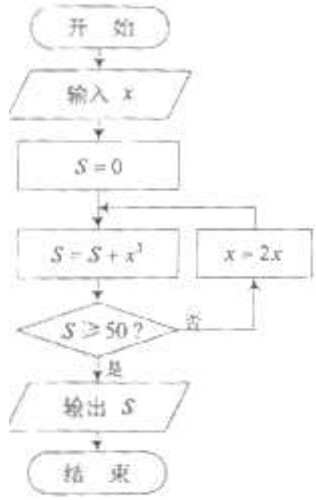
(A) $(-\infty,2]$　　(B) $[1,2]$　　(C) $[2,2]$　　(D) $[-2,1]$

(2) 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases}3x+y-6\ge 0,\\ x-y-2\le 0,\\ y-3\le 0,\end{cases}$ 则目标函数 $z=y-2x$ 的最小值为

(A) -7　　(B) -4

(C) 1　　(D) 2

(3) 阅读右边的程序框图，运行相应的程序，若输入 x 的值为 1，则输出 S 的值为



(A) 64　　(B) 73

(C) 512　　(D) 585

(4) 已知下列三个命题:

①若一个球的半径缩小到原来的 $\frac{1}{2}$，则其体积缩小到原来的 $\frac{1}{8}$；

②若两组数据的平均数相等，则它们的标准差也相等；

③直线 $x+y+1=0$ 与圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 相切.

其中真命题的序号是:

(A) ①②③　　(B) ①②

(C) ②③　　(D) ②③

(5) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线分别交于 A，B 两点，O 为坐标原点. 若双曲线的离心率为 2，$\triangle AOB$ 的面积为 $\sqrt{3}$，则 $p=$

(A) 1　　(B) $\frac{3}{2}$　　(C) 2　　(D) 3

(6) 在$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=\frac{\pi}{4}, AB=\sqrt{2}, BC=3,$ 则 $\sin\angle BAC\ =$

(A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$　　(B) $\frac{\sqrt{10}}{5}$　　(C) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　(D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(7) 函数 $f(x)=2^x|\log_{0.5}x|-1$ 的零点个数为

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

(8) 已知函数 $f(x)=x(1+a|x|)$. 设关于 x 的不等式 $f(x+a)<f(x)$ 的解集为 A，若 $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\subseteq A$，则实数 a 的取值范围是

(A) $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$　　(B) $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},0\right)$

(C) $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$　　(D) $\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

第Ⅱ卷

注意事项：

1. 用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上.
2. 本卷共 12 小题，共 110 分.

二．填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

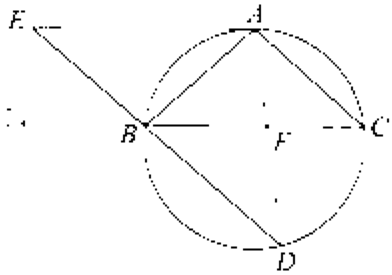
(9) 已知 $a, b\in \boldsymbol{R}$, i 是虚数单位. 若$(a + i)(1 + i) = bi$, 则 $a + bi =$ ______.

(10) $\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中的常数项为______.

(11) 已知圆的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$，圆心为C，点P的极坐标为$\left(4,\dfrac{\pi}{3}\right)$，则$|CP|$ = ______.

(12) 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD = 1$, $\angle BAD=60^\circ$, E 为 CD 的中点. 若 $\overline{AD}\,\overline{BE}=1$, 则 AB 的长为______.

(13) 如图，△ABC 为圆的内接三角形，BD 为圆的弦，且 $BD//AC$. 过点 A 做圆的切线与 DB 的延长线交于点 E, AD 与 BC 交于点 F. 若 $AB = AC$, $AE = 6$, $BD = 5$, 则线段 CF 的长为______.



(14) 设 $a + b = 2$, $b>0$, 则当 $a =$ ______时，$\dfrac{1}{2|a|}+\dfrac{|a|}{b}$ 取得最小值.

三．解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

(15) (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x)=-\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+6\sin x\cos x-2\cos^2 x+1, x\in \boldsymbol{R}$.

(Ⅰ) 求 $f(x)$的最小正周期;

(Ⅱ) 求 $f(x)$在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值.

(16) (本小题满分 13 分)

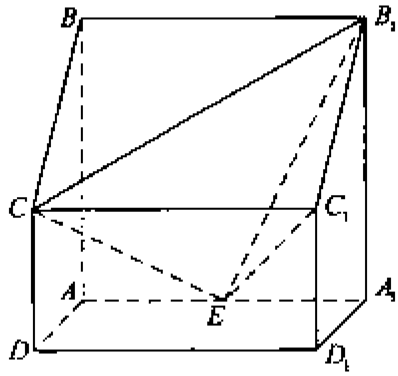
一个盒子里装有 7 张卡片，其中有红色卡片 4 张，编号分别为 1, 2, 3, 4；白色卡片 3 张，编号分别为 2, 3, 4. 从盒子中任取 4 张卡片 (假设取到任何一张卡片的可能性相同).

(Ⅰ) 求取出的 4 张卡片中，含有编号为 3 的卡片的概率.

(Ⅱ) 再取出的 4 张卡片中，红色卡片编号的最大值设为 X，求随机变量 X 的分布列和数学期望.

(17) (本小题满分 13 分)

如图，四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，侧棱 $A_1A\perp$底面 $ABCD$, $AB//DC$, $AB\perp AD$, $AD = CD = 1$,



$AA_1 = AB = 2$, E 为棱 AA_1 的中点.

(Ⅰ) 证明 $B_1C_1 \perp CE$;
(Ⅱ) 求二面角 B_1-CE-C_1 的正弦值.
(Ⅲ) 设点 M 在线段 C_1E 上，且直线 AM 与平面 ADD_1A_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$，求线段 AM 的长.

(18) (本小题满分 13 分)
设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.
(Ⅰ) 求椭圆的方程;
(Ⅱ) 设 A, B 分别为椭圆的左右顶点，过点 F 且斜率为 k 的直线与椭圆交于 C, D 两点. 若 $\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{CB}=8$，求 k 的值.

(19) (本小题满分 14 分)
已知首项为 $\dfrac{3}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 不是递减数列，其前 n 项和为 $S_n(n\in \boldsymbol{N}^*)$，且 $S_3 + a_3$, $S_5 + a_5$, $S_4 + a_4$ 成等差数列.
(Ⅰ) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(Ⅱ) 设 $T_n = S_n - \dfrac{1}{S_n}(n\in \boldsymbol{N}^*)$，求数列 $\{T_n\}$ 的最大项的值与最小项的值.

(20) (本小题满分 14 分)
已知函数 $f(x)=x^2\ln x$.
(Ⅰ) 求函数 $f(x)$的单调区间;
(Ⅱ) 证明: 对任意的 $t>0$，存在唯一的 s，使 $t=f(s)$.
(Ⅲ) 设(Ⅱ)中所确定的 s 关于 t 的函数为 $s=g(t)$，证明: 当 $t>e^2$ 时，有

$$\frac{2}{5}<\frac{\ln g(t)}{\ln t}<\frac{1}{2}.$$

参考答案

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题 5 分，满分 40 分.

1.D	2.A	3.B	4.C
5.C	6.C	7.B	8.A

二、填空题：本题考查基本知识和基本运算. 每小题 5 分，满分 30 分.

（9）$1+2i$　　（10）15　　（11）$2\sqrt{3}$

（12）$\dfrac{1}{2}$　　（13）$\dfrac{8}{3}$　　（14）-2

三、解答题

（15） 本小题主要考察两角和与差的正弦公式/二倍角的正弦与余弦公式,三角函数的最小正周期/单调性等基础知识,考察基本运算能力.满分 13 分

（I）解：$f(\mathrm{x})=-\sqrt{2}\sin 2\mathrm{x}\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}-\sqrt{2}\cos 2\mathrm{x}\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}+3\sin 2\mathrm{x}-\cos 2\mathrm{x}$

$$=2\sin 2\mathrm{x}-2\cos 2\mathrm{x}\ =2\sqrt{2}\sin\left(2\mathrm{x}-\frac{\pi}{4}\right)$$

所以 $f(\mathrm{x})$ 的最小正周期 $\mathrm{T}=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$

（II）解：因为 $f(\mathrm{x})$ 在区间 $\left[0,\dfrac{3\pi}{8}\right]$ 上是增函数，在区间 $\left[\dfrac{3\pi}{8},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是减函数，又

$f(0)=-2$，$f(\dfrac{3\pi}{8})=2\sqrt{2}$，$f(\dfrac{\pi}{2})=2$，故函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 $2\sqrt{2}$，最小值为 -2.

（16） 本小题主要考察古典概型及其概率计算公式，互斥事件、离散型随机变量的分布列与数学期望等基础知识。考察运用概率知识解决简单实际问题的能力。满分 13 分

（I）解：设“去除的 4 张卡片中，含有编号为 3 的卡片”为事件 A，则

$$\mathrm{P(A)}=\frac{C_2^1C_5^3+C_2^2C_5^2}{C_7^4}=\frac{6}{7}$$

所以，取出的 *4* 张卡片中，含有编号为 *3* 的卡片的概率为 $\dfrac{6}{7}$.

（Ⅱ）**解**：随机变量 X 的所有可能取值为 1，2，3，4

$$P(X=1)=\frac{C_3^3}{C_7^4}=\frac{1}{35},\qquad P(X=2)=\frac{C_4^3}{C_7^4}=\frac{4}{35},$$

$$P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_7^4}=\frac{2}{7},\qquad P(X=4)=\frac{C_6^3}{C_7^4}=\frac{4}{7},$$

所以随机变量 X 的分布列是

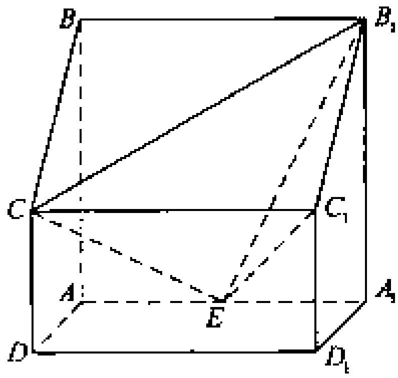
X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$

随机变量 X 的数学期望 $EX=1\times\frac{1}{35}+2\times\frac{4}{35}+3\times\frac{2}{7}+4\times\frac{4}{7}=\frac{17}{5}$

17.本小题主要考察空间两条直线的位置关系，二面角、直线与平面所成的角，直线与平面垂直等基础知识。考查用空间向量解决立体几何问题的方法。考查空间想象能力、运算能力和推理论证能力，满分 13 分

（方法一）

如图，以点 A 为原点建立空间直角坐标系，



依题意得 A（0,0,0），B（0,0,2），C（1,0,1），

$B_1(0,2,2)$，$C_1(1,2,1)$，E（0,1,0）

（Ⅰ）**证明**：易得 $\overrightarrow{B_1C_1}=(1,0,-1),\overrightarrow{CE}=(-1,1,-1)$

于是 $\overrightarrow{B_1C_1}\cdot\overrightarrow{CE}=0$，所以 $B_1C_1\perp CE$．

（Ⅱ）解：$\overrightarrow{B_1C}=(1,-2,-1)$．

设平面 B_1CE 的法向量 $m=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}m\cdot\overrightarrow{B_1C}=0,\\ m\cdot\overrightarrow{CE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-2y-z=0,\\ -x+y-z=0,\end{cases}$ 消去 x，得 y+2z=0，

不防令 z=1，可得一个法向量为 m=（-3，-2,1）．

由（Ⅰ），$B_1C_1\perp CE$，又 $CC_1\perp B_1C_1$，可得 $B_1C_1\perp$ 平面 CEC_1，故 $\overrightarrow{B_1C_1}=(1,0,-1)$ 为平面 CEC_1 的一个法向量。

于是 $\cos\left\langle m,\overrightarrow{B_1C_1}\right\rangle=\frac{m\cdot\overrightarrow{B_1C_1}}{|m|\cdot\left|\overrightarrow{B_1C_1}\right|}=\frac{-4}{\sqrt{14}\times\sqrt{2}}=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$，从而 $\sin\left\langle m,\overrightarrow{B_1C_1}\right\rangle=\frac{\sqrt{21}}{7}$．

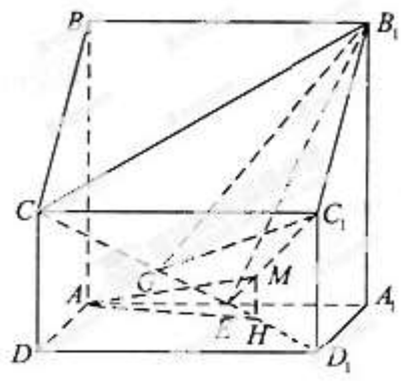
所以二面角 B_1-CE-C_1 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

（III）解：$\overrightarrow{AE}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{AE}$=(1,1,1). 设 $\overrightarrow{EM}=\lambda\overrightarrow{EC_1}=(\lambda,\lambda,\lambda)$,0≤ λ ≤1，有 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EM}=(\lambda,\lambda+1,\lambda)$. 可取 $\overrightarrow{AB}=(0,0,2)$ 为平面 ADD_1A_1 的一个法向量.

设 θ 为直线 AM 与平面 ADD_1A_1 所成的角，则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right\rangle\right|$

$$=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\left(\lambda+1\right)^2+\lambda^2}\times 2}=\frac{\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+2\lambda+1}}.$$

于是 $\dfrac{\lambda}{\sqrt{3\lambda^2+2\lambda+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，所以 $AM=\sqrt{2}$.



（方法二）

（I）证明：因为侧棱 $CC_1\perp$ 底面 $A_1B_1C_1D_1$，$B_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $CC_1\perp B_1C_1$. 经计算可得 $B_1E=\sqrt{5}$, $B_1C_1=\sqrt{2}$, $EC_1=\sqrt{3}$, 从而 $B_1E^2=B_1C_1{}^2+EC_1{}^2$, 所以在 ΔB_1EC_1 中，$B_1C_1\perp C_1E$，又 CC_1, $C_1E\subset$ 平面 CC_1E, $CC_1\cap C_1E=C_1$，所以 $B_1C_1\perp$ 平面 CC_1E，又 $CE\subset$ 平面 CC_1E，故 $B_1C_1\perp CE$.

（II）解：过 B_1 作 $B_1G\perp CE$ 于点 G，连接 C_1G. 由（I），$B_1C_1\perp CE$，故 $CE\perp$ 平面 B_1C_1G，$CE\perp C_1G$，所以 $\angle B_1GC_1$ 为二面角 B_1-CE-C_1 的平面角，ΔCC_1E 中，由 $CE=C_1E=\sqrt{3}$，$CC_1=2$，可得 $C_1G=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，在 $\text{Rt}\Delta B_1C_1G$ 中，$B_1G=\dfrac{\sqrt{42}}{3}$，所以 $\sin\angle B_1GC_1=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，即二面角 B_1-CE-C_1 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

(III) 解：连接 D_1E，过点 M 作 $MH\perp ED_1$ 于点 H，可得 $MH\perp$ 平面 ADD_1A_1，连接 AH, AM，则 $\angle MAH$ 为直线 AM 与平面 ADD_1A_1 所成的角.

设 $AM=x$，从而在 $Rt\Delta AHM$ 中，有 $MH=\dfrac{\sqrt{2}}{6}x$, $AH=\dfrac{\sqrt{34}}{6}x$. 在 $Rt\Delta C_1D_1E$ 中，$C_1D_1=1$, $ED_1=\sqrt{2}$，得 $EH=\sqrt{2}MH=\dfrac{1}{3}x$. 在 ΔAEH 中，$\angle AEH=135^\circ$,

$AE=1$，由 $AH^2=AE^2+EH^2-2AE\cdot EH\cos135^\circ$,得 $\frac{17}{18}x^2=1+\frac{1}{9}x^2+\frac{\sqrt{2}}{3}x$，

整理得 $5x^2-2\sqrt{2}x-6=0$，解得 $x=\sqrt{2}$．所以线段 AM 的长为 $\sqrt{2}$．

（18） 本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线的方程、向量的运算等基础知识。考查用代数方法研究圆锥曲线的性质。考查运算求解能力，以及用方程思想解决问题的能力。满分 13 分。

（I）解：设 $F(-c,0)$，由 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，知 $a=\sqrt{3}c$.过点 F 且与 x 轴垂直的直线为 $x=-c$，代人椭圆方程有 $\frac{(-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，解得 $y=\pm\frac{\sqrt{6}b}{3}$，于是 $\frac{2\sqrt{6}b}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，解得 $b=\sqrt{2}$，又 $a^2-c^2=b^2$，从而 $a=\sqrt{3},c=1$，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$.

（II）解：设点 $C(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$，由 $F(-1,0)$ 得直线 CD 的方程为 $y=k(x+1)$，

由方程组 $\begin{cases} y=k(x+1), \\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 消去 y，整理得 $(2+3k^2)x^2+6k^2x+3k^2-6=0$.

求解可得 $x_1+x_2=-\frac{6k^2}{2+3k^2}$， $x_1x_2=\frac{3k^2-6}{2+3k^2}$. 因为 $A(-\sqrt{3},0),B(\sqrt{3},0)$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}&=(x_1+\sqrt{3},y_1)\cdot(\sqrt{3}-x_2,-y_2)+(x_2+\sqrt{3},y_2)\cdot(\sqrt{3}-x_1,-y_1)\\&=6-2x_1x_2-2y_1y_2=6-2x_1x_2-2k^2(x_1+1)(x_2+1)\\&=6-(2+2k^2)x_1x_2-2k^2(x_1+x_2)-2k^2\\&=6+\frac{2k^2+12}{2+3k^2}.\end{aligned}$$

由已知得 $6+\frac{2k^2+12}{2+3k^2}$=8，解得 $k=\pm\sqrt{2}$.

（19） 本小题主要考查等差数列的概念，等比数列的概念、通项公式、前 n 项和公式，数列的基本性质等基础知识。考查分类讨论的思想，考查运算能力、分析问题和解决问题的能力. 满分 14 分.

（I）解：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，因为 S_3+a_3,S_5+a_5,S_4+a_4 成等差数列，所以 $S_5+a_5-S_3-a_3=S_4+a_4-S_5-a_5$，即 $4a_5=a_3$，于是 $q^2=\frac{a_5}{a_3}=\frac{1}{4}$.

又$\{a_n\}$不是递减数列且$a_1=\dfrac{3}{2}$，所以$q=-\dfrac{1}{2}$. 故等比数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{3}{2^n}.$$

（II）解：由（I）得 $S_n=1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=\begin{cases}1+\dfrac{1}{2^n}, n\text{为奇数}, \\ 1-\dfrac{1}{2^n}, n\text{为偶数}.\end{cases}$

当 n 为奇数时，S_n 随 n 的增大而减小，所以 $1< S_n\le S_1=\dfrac{3}{2}$，

$$\text{故 } 0< S_n-\frac{1}{S_n}\leqslant S_1-\frac{1}{S_1}=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{6}.$$

当 n 为偶数时，S_n 随 n 的增大而增大，所以 $\dfrac{3}{4}=S_2\leqslant S_n<1$，

$$\text{故 } 0> S_n-\frac{1}{S_n}\geqslant S_2-\frac{1}{S_2}=\frac{3}{4}-\frac{4}{3}=-\frac{7}{12}.$$

综上，对于$n\in N^*$, 总有$-\dfrac{7}{12}\leqslant S_n-\dfrac{1}{S_n}\leqslant\dfrac{5}{6}$.

所以数列$\{T_n\}$最大项的值为$\dfrac{5}{6}$，最小项的值为$-\dfrac{7}{12}$.

（20） 本小题主要考查函数的概念、函数的零点、导数的运算、利用导数研究函数的单调性、不等式等基础知识. 考查函数思想、化归思想. 考查抽象概括能力、综合分析问题和解决问题的能力. 满分 14 分。

（I）解：函数 $f(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$.

$f'(x)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间是$\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$，单调递增区间是$\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$.

（II）证明：$0< x\leqslant 1$ 时，$f(x)\leqslant 0$.

设 $t>0$，令 $h(x)=f(x)-t$， $x\in[1,+\infty)$.由（I）知， $h(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内单调递增. $h(1)=-t<0, h(e^{'})=e^{2t}\ln e^{t}-t=t\left(e^{2t}-1\right)>0$.故存在唯一的 $s\in(1,+\infty)$，使得 $t=f(s)$ 成立.

（III）**证明**：因为 $s=g(t)$，由（II）知， $t=f(s)$， $s>1$，从而

$$\frac{\ln g(t)}{\ln t}=\frac{\ln s}{\ln f(s)}=\frac{\ln s}{\ln(s^2\ln s)}=\frac{\ln s}{2\ln s+\ln\ln s}=\frac{u}{2u+\ln u},$$

其中 $u=\ln s$.要使 $\frac{2}{5}<\frac{\ln g(t)}{\ln t}<\frac{1}{2}$ 成立，只需 $0<\ln u<\frac{u}{2}$.

当 $t>e^2$ 时，若 $s=g(t)\le e$，则由 $f(s)$ 的单调性，有 $t=f(s)\le f(e)=e^2$，矛盾，所以 $s>e$，即 $u>1$，从而 $\ln u>0$ 成立.

另一方面，令 $F(u)=\ln u-\frac{u}{2}, u\succ 1, F^{'}(u)=\frac{1}{u}-\frac{1}{2}$，令

$F^{'}(u)=0$，得 $u=2$，当 $1<u<2$ 时， $F^{'}(u)>0$，当 $u>2$ 时， $F^{'}(u)<0$

故 $u>1$， $F(u)\leqslant F(2)<0$. 因此 $\ln u<\frac{u}{2}$ 成立.

综上，当 $t>e^2$ 时，有 $\frac{2}{5}<\frac{\ln g(t)}{\ln t}<\frac{1}{2}$.