

一、选择题(本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一个是正确的，请把正确的选项选出来)

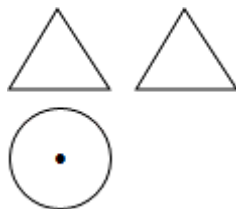
1. (4 分) 若 a 与 1 互为相反数，则 $|a+1|$ 等于()

- A. -1
- B. 0
- C. 1
- D. 2

解析：因为互为相反数的两数和为 0，所以 $a+1=0$ ；
因为 0 的绝对值是 0，则 $|a+1|=|0|=0$ 。

答案：B.

2. (4 分) 如图是某几何体的三视图，该几何体是()



- A. 圆柱
- B. 圆锥
- C. 正三棱柱
- D. 正三棱锥

解析：根据几何体的三视图即可知道几何体是圆锥。

答案：B.

3. (4 分) 某种细胞的直径是 0.000067 厘米，将 0.000067 用科学记数法表示为()

- A. 6.7×10^{-5}
- B. 6.7×10^{-6}
- C. 0.67×10^{-5}
- D. 6.7×10^{-6}

解析： \because 0.000067 中第一位非零数字前有 5 个 0，
 \therefore 0.000067 用科学记数法表示为 6.7×10^{-5} 。

答案：A.

4. (4 分) 在天水市汉字听写大赛中，10 名学生得分情况如表

人数	3	4	2	1
分数	80	85	90	95

那么这 10 名学生所得分数的中位数和众数分别是()

- A. 85 和 82.5
- B. 85.5 和 85
- C. 85 和 85
- D. 85.5 和 80

解析：在这一组数据中 85 是出现次数最多的，故众数是 85；

而将这组数据从小到大的顺序排列 80, 80, 80, 85, 85, 85, 85, 90, 90, 95,

处于中间位置的那个数是 85, 85, 那么由中位数的定义可知，这组数据的中位数是 $\frac{85+85}{2}$
=85.

答案：C.

5. (4 分) 二次函数 $y=ax^2+bx-1$ ($a \neq 0$) 的图象经过点 (1, 1), 则 $a+b+1$ 的值是()

A. -3

B. -1

C. 2

D. 3

解析：∵二次函数 $y=ax^2+bx-1$ ($a \neq 0$) 的图象经过点 (1, 1),

∴ $a+b-1=1$,

∴ $a+b=2$,

∴ $a+b+1=3$.

答案：D.

6. (4 分) 一个圆柱的侧面展开图是两邻边分别为 6 和 8 的矩形，则该圆柱的底面圆半径是 ()

A. $\frac{3}{\pi}$

B. $\frac{4}{\pi}$

C. $\frac{3}{\pi}$ 或 $\frac{4}{\pi}$

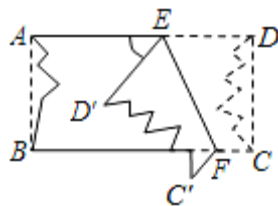
D. $\frac{6}{\pi}$ 或 $\frac{8}{\pi}$

解析：若 6 为圆柱的高，8 为底面周长，此时底面半径为 $\frac{8}{2\pi} = \frac{4}{\pi}$ ；

若 8 为圆柱的高，6 为底面周长，此时底面半径为 $\frac{6}{2\pi} = \frac{3}{\pi}$.

答案：C.

7. (4 分) 如图，将矩形纸带 ABCD，沿 EF 折叠后，C、D 两点分别落在 C'、D' 的位置，经测量得 $\angle EFB=65^\circ$ ，则 $\angle AED'$ 的度数是()



A. 65°

B. 55°

C. 50°

D. 25°

解析：∵ $AD \parallel BC$, $\angle EFB = 65^\circ$,

∴ $\angle DEF = 65^\circ$,

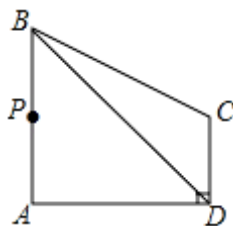
∴ $\angle DED' = 2\angle DEF = 130^\circ$,

∴ $\angle AED' = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

答案：C.

8. (4分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$, $AB = AD = 2\sqrt{2}$, $CD = \sqrt{2}$, 点 P 在四边

形 $ABCD$ 的边上. 若点 P 到 BD 的距离为 $\frac{3}{2}$, 则点 P 的个数为()



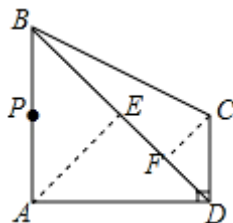
A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

解析：过点 A 作 $AE \perp BD$ 于 E , 过点 C 作 $CF \perp BD$ 于 F ,



∵ $\angle BAD = \angle ADC = 90^\circ$, $AB = AD = 2\sqrt{2}$, $CD = \sqrt{2}$,

∴ $\angle ABD = \angle ADB = 45^\circ$,

∴ $\angle CDF = 90^\circ - \angle ADB = 45^\circ$,

∴ $\sin \angle ABD = \frac{AE}{AB}$,

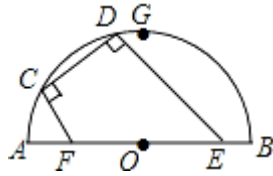
∴ $AE = AB \cdot \sin \angle ABD = 2\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 > \frac{3}{2},$$

所以在 AB 和 AD 边上有符合 P 到 BD 的距离为 $\frac{3}{2}$ 的点 2 个.

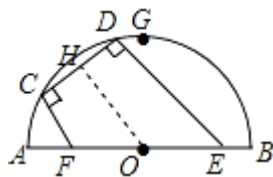
答案：A.

9. (4分) 如图, AB 为半圆所在 $\odot O$ 的直径, 弦 CD 为定长且小于 $\odot O$ 的半径 (C 点与 A 点不重合), $CF \perp CD$ 交 AB 于点 F, $DE \perp CD$ 交 AB 于点 E, G 为半圆弧上的中点. 当点 C 在 \widehat{AC} 上运动时, 设 \widehat{AC} 的长为 x , $CF+DE=y$. 则下列图象中, 能表示 y 与 x 的函数关系的图象大致是 ()



- A.
- B.
- C.
- D.

解析: 作 $OH \perp CD$ 于点 H,



- $\therefore H$ 为 CD 的中点,
- $\therefore CF \perp CD$ 交 AB 于 F , $DE \perp CD$ 交 AB 于 E ,
- $\therefore OH$ 为直角梯形的中位线,
- \therefore 弦 CD 为定长,
- $\therefore CF+DE=y$ 为定值.

答案: B.

10. (4分) 定义运算: $a \otimes b = a(1-b)$. 下面给出了关于这种运算的几种结论: ① $2 \otimes (-2) = 6$, ② a

$\otimes b = b \otimes a$, ③ 若 $a+b=0$, 则 $(a \otimes a) + (b \otimes b) = 2ab$, ④ 若 $a \otimes b = 0$, 则 $a=0$ 或 $b=1$, 其中结论正确的序号是()

- A. ①④
- B. ①③
- C. ②③④
- D. ①②④

解析: 根据题意得: $2 \otimes (-2) = 2 \times (1+2) = 6$, 选项①正确;

$a \otimes b = a(1-b) = a-ab$, $b \otimes a = b(1-a) = b-ab$, 不一定相等, 选项②错误;

$(a \otimes a) + (b \otimes b) = a(1-a) + b(1-b) = a+b-a^2-b^2 \neq 2ab$, 选项③错误;

若 $a \otimes b = a(1-b) = 0$, 则 $a=0$ 或 $b=1$, 选项④正确.

答案: A

二、填空题(本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 只要求填写最简结果)

11. (4分) 相切两圆的半径分别是 5 和 3, 则该两圆的圆心距是_____.

解析: 若两圆内切, 圆心距为 $5-3=2$;

若两圆外切, 圆心距为 $5+3=8$,

答案: 2 或 8

12. (4分) 不等式组 $\begin{cases} 2x+1 > 0 \\ \frac{3x-1}{2} < \frac{2x+1}{3} \end{cases}$ 的所有整数解是_____.

解析: $\begin{cases} 2x+1 > 0 \text{ ①} \\ \frac{3x-1}{2} < \frac{2x+1}{3} \text{ ②} \end{cases}$,

解不等式①得, $x > -\frac{1}{2}$,

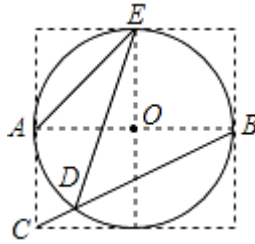
解不等式②得, $x < 1$,

所以不等式组的解集为 $-\frac{1}{2} < x < 1$,

所以原不等式组的整数解是 0.

答案: 0.

13. (4分) 如图, 边长为 1 的小正方形构成的网格中, 半径为 1 的 $\odot O$ 在格点上, 则 $\angle AED$ 的正切值为_____.



解析：由图可得， $\angle AED = \angle ABC$ ，
 $\because \odot O$ 在边长为 1 的网格格点上，
 $\therefore AB = 2, AC = 1$ ，

$$\text{则 } \tan \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}，$$

$$\therefore \tan \angle AED = \frac{1}{2}。$$

$$\text{答案： } \frac{1}{2}。$$

14. (4分) 一元二次方程 $x^2 + 3 - 2\sqrt{3}x = 0$ 的解是_____。

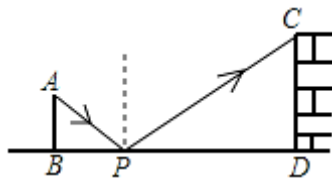
解析： $x^2 + 3 - 2\sqrt{3}x = 0$

$$(x - \sqrt{3})^2 = 0$$

$$\therefore x_1 = x_2 = \sqrt{3}。$$

$$\text{答案： } x_1 = x_2 = \sqrt{3}。$$

15. (4分) 如图是一位同学设计的用手电筒来测量某古城墙高度的示意图。点 P 处放一水平的平面镜，光线从点 A 出发经平面镜反射后刚好到古城墙 CD 的顶端 C 处，已知 $AB \perp BD, CD \perp BD$ ，测得 $AB = 2$ 米， $BP = 3$ 米， $PD = 12$ 米，那么该古城墙的高度 CD 是_____米。



解析：由题意可得： $\angle APE = \angle CPE$ ，

$$\therefore \angle APB = \angle CPD，$$

$$\because AB \perp BD, CD \perp BD，$$

$$\therefore \angle ABP = \angle CDP = 90^\circ，$$

$$\therefore \triangle ABP \sim \triangle CDP，$$

$$\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{CD}{PD}，$$

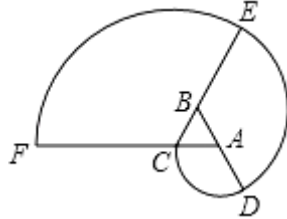
$$\because AB = 2 \text{ 米}, BP = 3 \text{ 米}, PD = 12 \text{ 米},$$

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{CD}{12},$$

CD=8 米.

答案: 8.

16. (4 分) 如图, $\triangle ABC$ 是正三角形, 曲线 CDEF 叫做正三角形的渐开线, 其中弧 CD、弧 DE、弧 EF 的圆心依次是 A、B、C, 如果 AB=1, 那么曲线 CDEF 的长是_____.



解析: 弧 CD 的长是 $\frac{120\pi \times 1}{180} = \frac{2\pi}{3}$,

弧 DE 的长是: $\frac{120\pi \times 2}{180} = \frac{4\pi}{3}$,

弧 EF 的长是: $\frac{120\pi \times 3}{180} = 2\pi$,

则曲线 CDEF 的长是: $\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} + 2\pi = 4\pi$.

答案: 4π .

17. (4 分) 下列函数 (其中 n 为常数, 且 $n > 1$)

① $y = \frac{n}{x}$ ($x > 0$); ② $y = (n-1)x$; ③ $y = \frac{1-n^2}{x}$ ($x > 0$); ④ $y = (1-n)x+1$; ⑤ $y = -x^2+2nx$ ($x < 0$) 中, y

的值随 x 的值增大而增大的函数有_____个.

解析: ① $y = \frac{n}{x}$ ($x > 0$), $n > 1$, y 的值随 x 的值增大而减小;

② $y = (n-1)x$, $n > 1$, y 的值随 x 的值增大而增大;

③ $y = \frac{1-n^2}{x}$ ($x > 0$) $n > 1$, y 的值随 x 的值增大而增大;

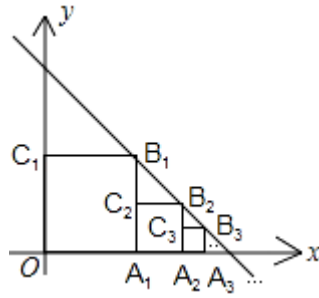
④ $y = (1-n)x+1$, $n > 1$, y 的值随 x 的值增大而减小;

⑤ $y = -x^2+2nx$ ($x < 0$) 中, $n > 1$, y 的值随 x 的值增大而增大;

y 的值随 x 的值增大而增大的函数有 3 个.

答案: 3.

18. (4 分) 正方形 $OA_1B_1C_1$ 、 $A_1A_2B_2C_2$ 、 $A_2A_3B_3C_3$, 按如图放置, 其中点 A_1 、 A_2 、 A_3 在 x 轴的正半轴上, 点 B_1 、 B_2 、 B_3 在直线 $y = -x+2$ 上, 则点 A_3 的坐标为_____.



解析：设正方形 $OA_1B_1C_1$ 的边长为 t ，则 $B_1(t, t)$ ，所以 $t = -t + 2$ ，解得 $t = 1$ ，得到 $B_1(1, 1)$ ；

设正方形 $A_1A_2B_2C_2$ 的边长为 a ，则 $B_2(1+a, a)$ ， $a = -(1+a) + 2$ ，解得 $a = \frac{1}{2}$ ，得到 $B_2(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ ；

设正方形 $A_2A_3B_3C_3$ 的边长为 b ，则 $B_3(\frac{3}{2}+b, b)$ ， $b = -(\frac{3}{2}+b) + 2$ ，解得 $b = \frac{1}{4}$ ，得到 $B_3(\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$ ，

所以 $A_3(\frac{7}{4}, 0)$ 。

答案：($\frac{7}{4}, 0$)。

三、解答题(本大题共 3 小题，共 28 分。解答时写出必要的文字说明及演算过程。)

19. (9 分) 计算：

$$(1) (\pi - 3)^0 + \sqrt{18} - 2\cos 45^\circ - \left(\frac{1}{8}\right)^{-1}$$

$$(2) \text{若 } x + \frac{1}{x} = 3, \text{ 求 } \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} \text{ 的值.}$$

解析：(1) 根据 0 指数幂、二次根式的化简、特殊角的三角函数值、负指数幂的定义解答；

(2) 分子分母同时除以 x^2 ，配方后整体代入即可解答。

$$\text{答案：(1) 原式} = 1 + 3\sqrt{2} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 8 = 2\sqrt{2} - 7;$$

$$(2) \text{原式} = \frac{1}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1}$$

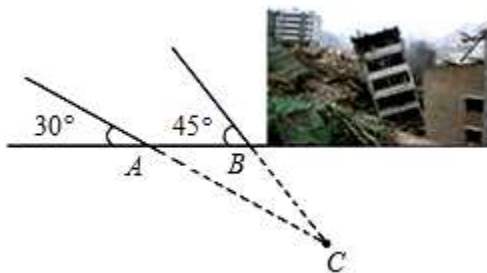
$$= \frac{1}{3^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{9 - 1}$$

$$= \frac{1}{8}.$$

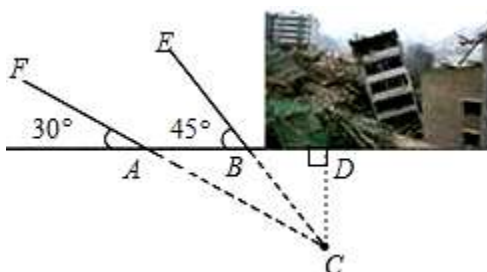
20. (9 分) 2015 年 4 月 25 日 14 时 11 分，尼泊尔发生 8.1 级地震，震源深度 20 千米。中国救援队火速赶往灾区救援，探测出某建筑物废墟下方点 C 处有生命迹象。在废墟一侧某面上选

两探测点 A、B，AB 相距 2 米，探测线与该面的夹角分别是 30° 和 45° (如图). 试确定生命所在点 C 与探测面的距离. (参考数据 $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$)



解析：首先过 C 作 $CD \perp AB$ ，设 $CD=x$ 米，则 $DB=CD=x$ 米， $AD=\sqrt{3}CD=\sqrt{3}x$ 米，再根据 AB 相距 2 米可得方程 $\sqrt{3}x-x=2$ ，再解即可.

答案：过 C 作 $CD \perp AB$ ，



设 $CD=x$ 米，

$\because \angle ABE=45^\circ$ ，

$\therefore \angle CBD=45^\circ$ ，

$\therefore DB=CD=x$ 米，

$\because \angle CAD=30^\circ$ ，

$\therefore AD=\sqrt{3}CD=\sqrt{3}x$ 米，

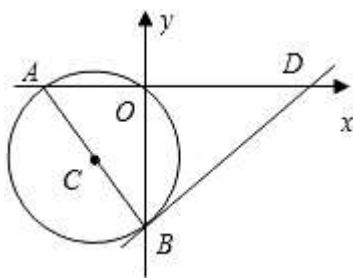
$\because AB$ 相距 2 米，

$\therefore \sqrt{3}x-x=2$ ，

解得： $x=\frac{200}{73}$.

答：命所在点 C 与探测面的距离是 $\frac{200}{73}$ 米.

21. (10 分) 如图，在平面直角坐标系内，O 为原点，点 A 的坐标为 $(-3, 0)$ ，经过 A、O 两点作半径为 $\frac{5}{2}$ 的 $\odot C$ ，交 y 轴的负半轴于点 B.



(1) 求 B 点的坐标;

(2) 过 B 点作 $\odot C$ 的切线交 x 轴于点 D, 求直线 BD 的解析式.

解析: (1) 由于 $\angle AOB=90^\circ$, 故 AB 是直径, 且 $AB=5$ 在 $Rt\triangle AOB$ 中, 由勾股定理可得 $BO=$

$$\sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4, \text{ 则 B 点的坐标为 } (0, -4);$$

(2) 由于 BD 是 $\odot C$ 的切线, CB 是 $\odot C$ 的半径, 故 $BD \perp AB$, 即 $\angle ABD=90^\circ$, 有 $\angle DAB + \angle ADB=90^\circ$, 又因为 $\angle BDO + \angle OBD=90^\circ$, 所以 $\angle DAB = \angle DBO$, 由于 $\angle AOB = \angle BOD=90^\circ$, 故 $\triangle ABO \sim \triangle BDO$,

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OD}, \text{ 则 } OD = \frac{OB^2}{OA} = \frac{4^2}{3} = \frac{16}{3}, \text{ D 的坐标为 } \left(\frac{16}{3}, 0\right), \text{ 把 B, D 两点坐标代入一次函数的}$$

解析式便可求出 k, b 的值, 从而求出其解析式.

答案: (1) $\because \angle AOB=90^\circ$,

$\therefore AB$ 是直径, 且 $AB=5$,

在 $Rt\triangle AOB$ 中, 由勾股定理可得 $BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,

$\therefore B$ 点的坐标为 $(0, -4)$;

(2) $\because BD$ 是 $\odot C$ 的切线, CB 是 $\odot C$ 的半径,

$\therefore BD \perp AB$, 即 $\angle ABD=90^\circ$,

$\therefore \angle DAB + \angle ADB=90^\circ$

又 $\because \angle BDO + \angle OBD=90^\circ$,

$\therefore \angle DAB = \angle DBO$,

$\because \angle AOB = \angle BOD=90^\circ$,

$\therefore \triangle ABO \sim \triangle BDO$,

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OD},$$

$$\therefore OD = \frac{OB^2}{OA} = \frac{4^2}{3} = \frac{16}{3},$$

$\therefore D$ 的坐标为 $\left(\frac{16}{3}, 0\right)$

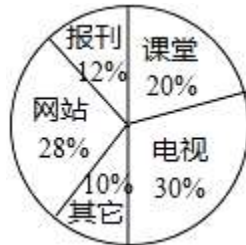
设直线 BD 的解析式为 $y=kx+b$ ($k \neq 0$, k、b 为常数),

$$\text{则有 } \begin{cases} \frac{16}{3}k + b = 0 \\ b = -4 \end{cases}, \therefore \begin{cases} k = \frac{3}{4} \\ b = -4 \end{cases},$$

\therefore 直线 BD 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x - 4$.

四、解答题(本大题共 50 分，解答时写出必要的演算步骤及推理证明过程。)

22. (8 分) 钓鱼岛是我国固有领土. 某校七年级(15)班举行“爱国教育”为主题班会时, 就有关钓鱼岛新闻的获取途径, 对本班 50 名学生进行调查(要求每位同学, 只选自己最认可的一项), 并绘制如图所示的扇形统计图.



(1) 该班学生选择“报刊”的有_____人. 在扇形统计图中, “其它”所在扇形区域的圆心角是_____度. (直接填结果)

(2) 如果该校七年级有 1500 名学生, 利用样本估计选择“网站”的七年级学生约有_____人. (直接填结果)

(3) 如果七年级(15)班班委会就这 5 种获取途径中任选两种对全校学生进行调查, 求恰好选用“网站”和“课堂”的概率. (用树状图或列表法分析解答)

解析: (1) 根据扇形统计图及调查学生总数为 50 名, 求出所求即可;

(2) 根据样本中选择“网站”的七年级学生百分数, 乘以 1500 即可得到结果;

(3) 列表得出所有等可能的情况数, 找出恰好选用“网站”和“课堂”的情况数, 即可求出所求的概率.

答案: (1) 根据题意得: $50 \times 12\% = 6$ (人), $360^\circ \times 10\% = 36^\circ$,

则该班学生选择“报刊”的有 6 人. 在扇形统计图中, “其它”所在扇形区域的圆心角是 36 度;

故答案为: 6; 36;

(2) 根据题意得: $1500 \times 28\% = 420$ (人);

故答案为: 420;

(3) 列表如下: (A 表示报刊; B 表示网站; C 表示其它; D 表示课堂; E 表示电视)

	A	B	C	D	E
A	---	(B, A)	(C, A)	(D, A)	(E, A)
B	(A, B)	---	(C, B)	(D, B)	(E, B)
C	(A, C)	(B, C)	---	(D, C)	(E, C)
D	(A, D)	(B, D)	(C, D)	---	(E, D)
E	(A, E)	(B, E)	(C, E)	(D, E)	---

所有等可能的情况有 20 种, 恰好选用“网站”和“课堂”的情况有 2 种,

$$\text{则 } P = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}.$$

23. (8 分) 天水“伏羲文化节”商品交易会上, 某商人将每件进价为 8 元的纪念品, 按每件 9 元出售, 每天可售出 20 件. 他想采用提高售价的办法来增加利润, 经实验, 发现这种纪念品每件提价 1 元, 每天的销售量会减少 4 件.

(1) 写出每天所得的利润 y (元) 与售价 x (元/件) 之间的函数关系式.

(2) 每件售价定为多少元, 才能使一天所得的利润最大? 最大利润是多少元?

解析：(1)根据题中等量关系为：利润=(售价-进价)×售出件数，根据等量关系列出函数关系式；

(2)将(1)中的函数关系式配方，根据配方后的方程式即可求出 y 的最大值.

答案：(1)根据题中等量关系为：利润=(售价-进价)×售出件数，

列出方程式为： $y=(x-8)[20-4(x-9)]$ ，

即 $y=-4x^2+88x-448(9\leq x\leq 14)$ ；

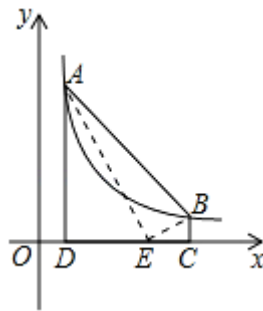
(2)将(1)中方程式配方得：

$y=-4(x-11)^2+36$ ，

\therefore 当 $x=11$ 时， $y_{\text{最大}}=36$ 元，

答：售价为 11 元时，利润最大，最大利润是 36 元.

24. (10分)如图，点 $A(m, 6)$ 、 $B(n, 1)$ 在反比例函数图象上， $AD\perp x$ 轴于点 D ， $BC\perp x$ 轴于点 C ， $DC=5$.



(1)求 m 、 n 的值并写出该反比例函数的解析式.

(2)点 E 在线段 CD 上， $S_{\triangle ABE}=10$ ，求点 E 的坐标.

解析：(1)根据题意列出关于 m 与 n 的方程组，求出方程组的解得到 m 与 n 的值，确定出 A 与 B 坐标，设出反比例函数解析式，将 A 坐标代入即可确定出解析式；

(2)设 $E(x, 0)$ ，表示出 DE 与 CE ，连接 AE ， BE ，三角形 ABE 面积=四边形 $ABCD$ 面积-三角形 ADE 面积-三角形 BCE 面积，求出即可.

答案：(1)由题意得：
$$\begin{cases} 6m = n \\ m + 5 = n \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} m = 1 \\ n = 6 \end{cases}$$

$\therefore A(1, 6)$ ， $B(6, 1)$ ，

设反比例函数解析式为 $y=\frac{k}{x}$ ，

将 $A(1, 6)$ 代入得： $k=6$ ，

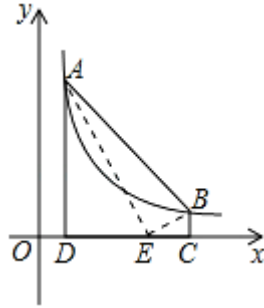
则反比例解析式为 $y=\frac{6}{x}$ ；

(2)设 $E(x, 0)$ ，则 $DE=x-1$ ， $CE=6-x$ ，

$\because AD\perp x$ 轴， $BC\perp x$ 轴，

$\therefore \angle ADE=\angle BCE=90^\circ$ ，

连接 AE ， BE ，



则 $S_{\triangle ABE} = S_{\text{四边形 } ABCD} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle BCE}$

$$= \frac{1}{2} (BC+AD) \cdot DC - \frac{1}{2} DE \cdot AD - \frac{1}{2} CE \cdot BC$$

$$= \frac{1}{2} \times (1+6) \times 5 - \frac{1}{2} (x-1) \times 6 - \frac{1}{2} (6-x) \times 1$$

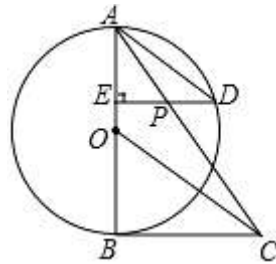
$$= \frac{35}{2} - \frac{5}{2}x$$

$= 10,$

解得: $x=3,$

则 $E(3, 0).$

25. (12分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, BC 切 $\odot O$ 于点 B, OC 平行于弦 AD, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E, 连结 AC, 与 DE 交于点 P. 求证:



- (1) $AC \cdot PD = AP \cdot BC;$
 (2) $PE = PD.$

解析: (1) 首先根据 AB 是 $\odot O$ 的直径, BC 是切线, 可得 $AB \perp BC$, 再根据 $DE \perp AB$, 判断出 $DE \parallel BC$, $\triangle AEP \sim \triangle ABC$, 所以 $\frac{EP}{BC} = \frac{AE}{AB}$; 然后判断出 $\frac{ED}{BC} = \frac{2AE}{AB}$, 即可判断出 $ED = 2EP$, 据此判断出 $PE = PD$ 即可.

(2) 首先根据 $\triangle AEP \sim \triangle ABC$, 判断出 $\frac{AP}{AC} = \frac{PE}{BC}$; 然后根据 $PE = PD$, 可得 $\frac{AP}{AC} = \frac{PD}{BC}$, 据此

判断出 $AC \cdot PD = AP \cdot BC$ 即可.

答案: (1) \because AB 是 $\odot O$ 的直径, BC 是切线,

$\therefore AB \perp BC,$

$\because DE \perp AB,$

$\therefore DE \parallel BC,$

$\therefore \triangle AEP \sim \triangle ABC,$

$\therefore \frac{EP}{BC} = \frac{AE}{AB} \dots \textcircled{1},$

又∵AD//OC,
 ∴∠DAE=∠COB,
 ∴△AED∽△OBC,
 ∴ $\frac{ED}{BC} = \frac{AE}{OB} = \frac{AE}{\frac{1}{2}AB} = \frac{2AE}{AB} \dots \textcircled{2}$,

由①②, 可得 ED=2EP,

∴PE=PD.

(2) ∵AB 是⊙O 的直径, BC 是切线,

∴AB⊥BC,

∴DE⊥AB,

∴DE//BC,

∴△AEP∽△ABC,

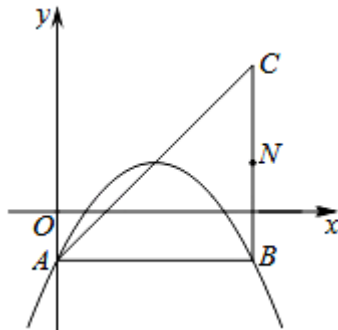
∴ $\frac{AP}{AC} = \frac{PE}{BC}$,

∵PE=PD,

∴ $\frac{AP}{AC} = \frac{PD}{BC}$,

∴AC·PD=AP·BC.

26. (12分) 在平面直角坐标系中, 已知 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ (b、c 为常数) 的顶点为 P, 等腰直角三角形 ABC 的顶点 A 的坐标为 (0, -1), 点 C 的坐标为 (4, 3), 直角顶点 B 在第四象限.



(1) 如图, 若抛物线经过 A、B 两点, 求抛物线的解析式.

(2) 平移 (1) 中的抛物线, 使顶点 P 在直线 AC 上并沿 AC 方向滑动距离为 $\sqrt{2}$ 时, 试证明: 平移后的抛物线与直线 AC 交于 x 轴上的同一点.

(3) 在 (2) 的情况下, 若沿 AC 方向任意滑动时, 设抛物线与直线 AC 的另一交点为 Q, 取 BC 的中点 N, 试探究 NP+BQ 是否存在最小值? 若存在, 求出该最小值; 若不存在, 请说明理由.

解析: (1) 先求出点 B 的坐标, 然后利用待定系数法求出抛物线的函数表达式;

(2) 如答题图 2, 设顶点 P 在直线 AC 上并沿 AC 方向滑动距离 $\sqrt{2}$ 时, 到达 P', 作 P' M//y 轴, PM//x 轴, 交于 M 点, 根据直线 AC 的斜率求得△P' PM 是等腰直角三角形, 进而求得抛物线向上平移 1 个单位, 向右平移 1 个单位, 从而求得平移后的解析式, 进而求得与 x 轴的交点, 与直线 AC 的交点, 即可证得结论;

(3) 如答图 3 所示, 作点 B 关于直线 AC 的对称点 B', 由分析可知, 当 B'、Q、F (AB 中点) 三点共线时, NP+BQ 最小, 最小值为线段 B'F 的长度.

答案: (1) ∵ 等腰直角三角形 ABC 的顶点 A 的坐标为 (0, -1), C 的坐标为 (4, 3)

∴ 点 B 的坐标为 (4, -1).

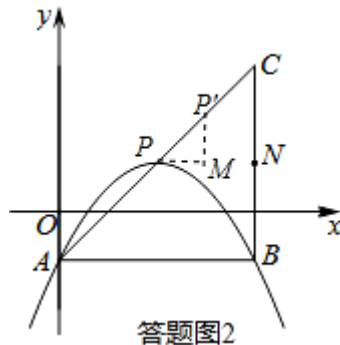
∴ 抛物线过 A(0, -1), B(4, -1) 两点,

$$\therefore \begin{cases} c = -1 \\ -\frac{1}{2} \times 16 + 4b + c = -1 \end{cases},$$

解得: $b=2, c=-1$,

∴ 抛物线的函数表达式为: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$.

(2) 如答题图 2, 设顶点 P 在直线 AC 上并沿 AC 方向滑动距离 $\sqrt{2}$ 时, 到达 P', 作 P'M // y 轴, PM // x 轴, 交于 M 点,



∴ 点 A 的坐标为 (0, -1), 点 C 的坐标为 (4, 3),

∴ 直线 AC 的解析式为 $y=x-1$,

∴ 直线的斜率为 1,

∴ $\triangle P'PM$ 是等腰直角三角形,

∴ $PP' = \sqrt{2}$,

∴ $P'M = PM = 1$,

∴ 抛物线向上平移 1 个单位, 向右平移 1 个单位,

∴ $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$,

∴ 平移后的抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$,

令 $y=0$, 则 $0 = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$,

解得 $x_1=1, x_2=5$,

∴ 平移后的抛物线与 x 轴的交点为 (1, 0), (5, 0),

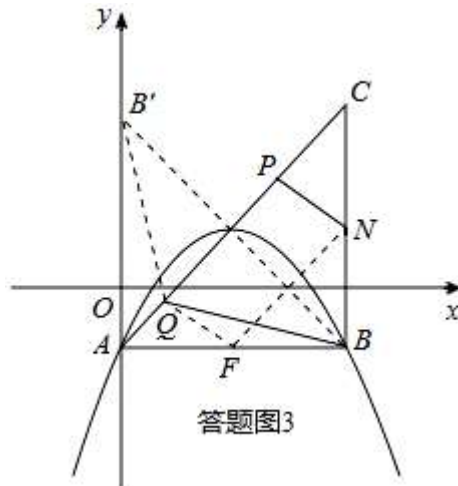
$$\text{解} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2 \\ y = x-1 \end{cases}, \text{ 得} \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \text{ 或} \begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$$

∴ 平移后的抛物线与 AC 的交点为 (1, 0),

∴ 平移后的抛物线与直线 AC 交于 x 轴上的同一点 (1, 0).

(3) 如答图 3, 取点 B 关于 AC 的对称点 B', 易得点 B' 的坐标为 (0, 3), BQ=B'Q, 取 AB 中点 F,

连接 QF, FN, QB', 易得 FN//PQ, 且 FN=PQ,



∴ 四边形 PQFN 为平行四边形.

∴ NP=FQ.

∴ NP+BQ=FQ+B'Q ≥ FB' = $\sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$.

∴ 当 B'、Q、F 三点共线时, NP+BQ 最小, 最小值为 $2\sqrt{5}$.