# 2018年北京市房山区高考一模试卷数学文

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.若集合M={-1，0，1，2}，N={y|y=2x+1，x∈M}，则集合M∩N等于(　　)

A.{-1，1}

B.{1，2}

C.{-1，1，3，5}

D.{-1，0，1，2}

解析：集合M={-1，0，1，2}，

N={y|y=2x+1，x∈M}={-1，1，3，5}，

所以M∩N={-1，1}.

答案：A

2.已知x，y满足约束条件$\begin{cases}x+y\le 3,\\ y\ge x,\\ x\ge 1,\end{cases}$那么x+3y的最大值是(　　)

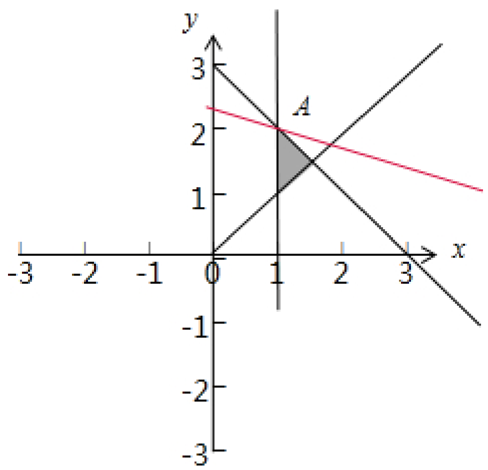
A.4

B.6

C.7

D.8

解析：作出x，y满足约束条件$\begin{cases}x+y\le 3,\\ y\ge x,\\ x\ge 1,\end{cases}$表示的平面区域，




得到如图的三角形及其内部，由$\begin{cases}x=1,\\ x+y=3,\end{cases}$可得A(1，2)，z=x+3y，将直线进行平移，

当 l 经过点 A 时，目标函数 z 达到最大值
∴z 最大值=1+2×3=7.
答案：C

3.下列函数中，与函数 $y=x^3$ 的单调性和奇偶性相同的函数是(　　)

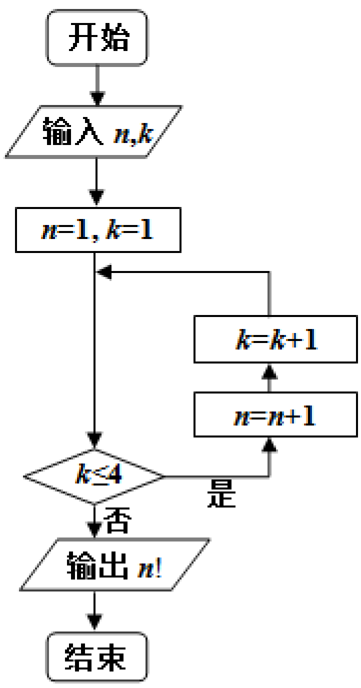
A. $y=\sqrt{x}$

B. y=lnx
C. y=tanx
D. $y=e^x-e^{-x}$
解析：根据题意，函数 $y=x^3$ 为奇函数，在 R 上增函数，据此分析选项：

对于 A，$y=\sqrt{x}$，其定义域为[0，+∞)，不关于原点对称，为非奇非偶函数，不符合题意；

对于 B，y=lnx，其定义域为(0，+∞)，不关于原点对称，为非奇非偶函数，不符合题意；
对于 C，y=tanx，为正切函数，是奇函数但在 R 上不是增函数，不符合题意；
对于 D，$y=e^x-e^{-x}$，$f(-x)=e^{-x}-e^{x}=-(e^{x}-e^{-x})=-f(x)$，f(x)为奇函数，且 $f'(x)=e^x+e^{-x}\geq 2$，为增函数，符合题意.
答案：D

4.阶乘(factorial)是基斯顿-卡曼于 1808 年发明的运算符号，n 的阶乘 n!=1×2×3×…×n.例如：2!=1×2，3!=1×2×3.执行如图所示的程序框图.则输出 n!的值是(　　)




A. 2
B. 6
C. 24
D. 120
解析：当 k=1 时，满足进行循环的条件，n=2，k=2；
当 k=2 时，满足进行循环的条件，n=3，k=3；

当 k=3 时，满足进行循环的条件，n=4，k=4；
当 k=4 时，满足进行循环的条件，n=5，k=5；
当 k=5 时，不满足进行循环的条件，
故输出的 n!=5!=120.
答案：D

5.圆 $x^2+y^2=4$ 被直线 $y=-\sqrt{3}x+b$ 截得的劣弧所对的圆心角的大小为 120°，则 b 的值(　　)

A. ±2

B. $\pm 2\sqrt{3}$

C. 2

D. $\sqrt{3}$

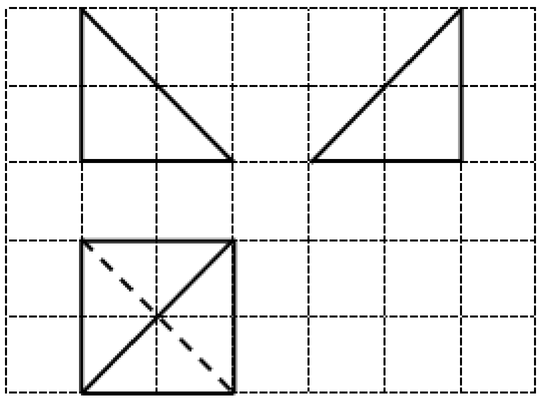
解析：根据题意，圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心为(0，0)，半径 r=2，

若圆 $x^2+y^2=4$ 被直线 $y=-\sqrt{3}x+b$ 截得的劣弧所对的圆心角的大小为 120°，

则圆心到直线的距离 $d=\frac{r}{2}=1$，即 $\frac{|-b|}{\sqrt{1+3}}=1$，解可得 b=±2.

答案：A

6.如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗线画出的是某多面体的三视图，则该多面体的表面积为(　　)



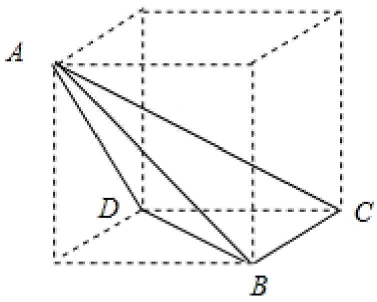
A. $8+4\sqrt{2}$

B. $2+2\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

C. $2+6\sqrt{3}$

D. $2+4\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

解析：由题意可知几何体的直观图如图：是正方体列出为 2 的一部分，A-BCD，




三棱锥的表面积为：$\frac{1}{2}\times 2\times 2+2\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(2\sqrt{2}\right)^{2}=2+4\sqrt{2}+2\sqrt{3}$.

答案：D

7.“a＞2”是“函数 f(x)=$\log_a x$(a＞0，且 a≠1)的图象与函数 f(x)=$x^2-4x+4$ 的图象的交点个数为 2 个的(　　)

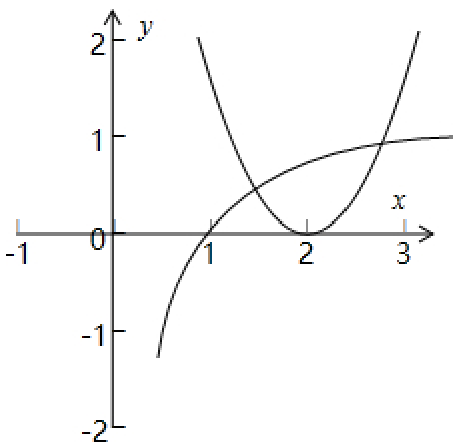
A.充分而不必要条件

B.必要而不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

解析：根据题意，当 a＞2 时，函数 f(x)=$\log_a x$(a＞0，且 a≠1)的图象与函数 f(x)=$x^2-4x+4$ 的图象如图，有 2 个交点，




则“a＞2”是“函数 f(x)=$\log_a x$(a＞0，且 a≠1)的图象与函数 f(x)=$x^2-4x+4$ 的图象的交点个数为 2 个”的充分条件，

反之：若“函数 f(x)=$\log_a x$(a＞0，且 a≠1)的图象与函数 f(x)=$x^2-4x+4$ 的图象的交点个数为 2 个”，则函数 f(x)=$\log_a x$ 为增函数，则 a＞1，则“a＞2”是“函数 f(x)=$\log_a x$(a＞0，且 a≠1)的图象与函数 f(x)=$x^2-4x+4$ 的图象的交点个数为 2 个”的不必要条件，

则 a＞2”是“函数 f(x)=$\log_a x$(a＞0，且 a≠1)的图象，

与函数 f(x)=$x^2-4x+4$ 的图象的交点个数为 2 个的充分而不必要条件.

答案：A

8.若五位同学围成一圈依序循环报数，规定：①第一位同学首次报出的数为 2.第二位同学首次报出的数也为 2，之后每位同学所报出的数都是前两位同学所报出的数之和；②若报出

的数为 3 的倍数，则报该数的同学需拍手一次，当第 27 个数被报出时，五位同学拍手的总次数为(　　)

A.7

B.6

C.5

D.4

解析：这个数列的变化规律是：从第三个数开始递增，且是前两项之和，

那么有 1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89、144、233、377、610、987，

分别除以 3 得余数分别是 1、1、2、0、2、2、1、0、1、1、2、0、2、2、1、0，

由此可见余数的变化规律是按 1、1、2、0、2、2、1、0，

循环周期是 8.

在这一个周期内第四个数和第八个数都是 3 的倍数，

所以在三个周期内共有 6 个报出的数是三的倍数，

后面 3 个报出的数中余数是 1、1、2，没有 3 的倍数，

故第 27 个数被报出时，五位同学拍手的总次数为 6 次.

答案：B

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.抛物线 $x^2=4y$ 的焦点到双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的渐近线的距离为__________.

解析：抛物线的交点为 F(0，1)，双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的一条渐近线方程为：$y=\sqrt{3}x$，即 $\sqrt{3}x-y=0$，∴F 到渐近线的距离为 $d=\frac{1}{\sqrt{3+1}}=\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

10.如果复数(2+i)(1-mi)(其中 i 是虚数单位)是实数，则实数 m=__________.

解析：∵$(2+i)(1-mi)=(2+m)+(1-2m)i$ 为实数，∴$1-2m=0$，即 $m=\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

11.已知命题 p：∀ x∈(0，+∞)，$2^x>1$，则¬p 为__________.

解析：命题 p“：∀ x∈(0，+∞)，$2^x>1$”是全称命题，

否定时将量词对任意的 x 变为∃x，再将不等号＞变为≤即可.

答案：∃ $x_0$∈(10，+∞)，$2^x\leqslant1$

12.已知 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，则 $|\vec{a}-2\vec{b}|$=__________.

解析：$\because \left|\vec{a}\right|=1,\left|\vec{b}\right|=2$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\dfrac{\pi}{3}=1\times 2\times\dfrac{1}{2}=1$，

$\therefore \left|\vec{a}-2\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{b}\right|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}=1+16-4=13$，$\therefore \left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{13}$.

答案：$\sqrt{13}$

13.已知函数 f(x)同时满足以下条件：①周期为π；②值域为[0，1]；③f(x)−f(−x)=0.试写出一个满足条件的函数解析式 f(x)=__________.

解析：f(x)=|sinx|满足：①周期为π；②值域为[0，1]；③f(x)−f(−x)=0.

答案：|sinx|

14.设函数 $f(x)=\begin{cases} x+a, -2\le x<0, \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^x, 0\le x<1. \end{cases}$ 则①$f(\dfrac{1}{2})=$__________；

②若 f(x)有最小值，且无最大值，则实数 a 的取值范围是__________.

解析：设函数 $f(x)=\begin{cases} x+a, -2\le x<0, \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^x, 0\le x<1. \end{cases}$

① $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

②当−2≤x＜0 时，f(x)=x+a∈[−2+a，a)，

当 0≤x＜1 时，$f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\in(\dfrac{1}{2},1]$，

由 f(x)有最小值，且无最大值，可得 a＞1，且 a−2≤$\dfrac{1}{2}$，解得 1＜a≤$\dfrac{5}{2}$.

答案：$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；(1，$\dfrac{5}{2}$].

三、解答题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

15.已知数列{$a_n$}是等差数列，$a_3+a_8=37$，$a_7=23$.

(Ⅰ)求数列{$a_n$}的通项公式；

(Ⅱ)设 $b_n=a_n+2^n$，求数列{$b_n$}的前 n 项和 $S_n$.

解析：(Ⅰ)直接利用已知条件求出数列的通项公式；

(Ⅱ)利用等差和等比数列的通项公式求和.

答案：(Ⅰ)由等差数列{$a_n$}中设首项为 $a_1$，公差为 d，

由于：$a_3+a_8=37$，$a_7=23$.则：$\begin{cases} a_3+a_8=37, \\ a_7=23, \end{cases}$ 解得 $a_1=5$，

所以$d=\dfrac{32-5}{10-1}=3$. 所以 $a_n=3n+2$.

(Ⅱ) $b_n=a_n+2^n=3n+2+2^n$,

由(Ⅰ)知，$S_n=\dfrac{n(5+3n+2)}{2}+\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}=\dfrac{n(7+3n)}{2}+2^{n+1}-2$.

16. 在△ABC 中，内角 A，B，C 的对分别为 a，b，c，且 $\cos2B+\cos B=0$.

(1)求角 B 的值；

(2)求 $b=\sqrt{7}$，$a+c=5$，求△ABC 的面积.

解析：(1)首先利用三角函数关系式的恒等变换求出：$(2\cos B-1)(\cos B+1)=0$，进一步利用特殊值求出 B 的度数.

(2)直接利用(1)的结论和余弦定理求出 ac 的值，最后求出三角形的面积.

答案：(1)△ABC 中，内角 A，B，C 的对分别为 a，b，c，且 $\cos2B+\cos B=0$.

则：$2\cos^2B+\cos B+1=0$，整理得：$(2\cos B-1)(\cos B+1)=0$，

解得：$\cos B=\dfrac{1}{2}$ (-1 舍去). 则：$B=\dfrac{\pi}{3}$.

(2)利用余弦定理：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,

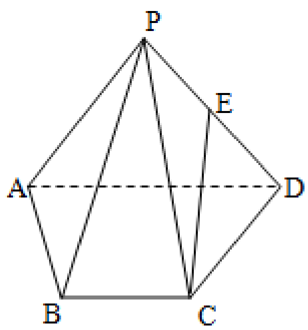
由于：$b=\sqrt{7}$，$a+c=5$，解得：$ac=6$. 所以：$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

17. 2017 年冬，北京雾霾天数明显减少. 据环保局统计三个月的空气质量，达到优良的天数超过 70 天，重度污染的天数仅有 4 天. 主要原因是政府对治理雾霾采取了有效措施，如①减少机动车尾气排放；②实施了煤改电或煤改气工程；③关停了大量的排污企业；④部分企业季节性的停产. 为了解农村地区实施煤改气工程后天燃气使用情况，从某乡镇随机抽取 100 户，进行月均用气量调查，得到的用气量数据(单位：千立方米)均在区间(0，5]内，将数据按区间列表如下：

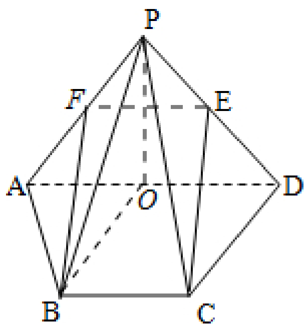
| 分组 | 频数 | 频率 |
|---|---|---|
| (0，1] | 14 | 0.14 |
| (1，2] | x | m |
| (2，3] | 55 | 0.55 |
| (3，4] | 4 | 0.04 |
| (4，5] | 2 | 0.02 |
| 合计 | 100 | 1 |

(Ⅰ)求表中 x，m 的值；
(Ⅱ)若同组中的每个数据用该组区间的中点值代替，估计该乡镇每户月平均用气量；
(Ⅲ)从用气量高于 3 千立方米的用户中任选 2 户，进行燃气使用的满意度调查，求这 2 户用气量处于不同区间的概率.
解析：(Ⅰ)由频率分布表能求出表中 x，m 的值.
(Ⅱ)由频率分布表能估计该乡镇每户月平均用气量.
(Ⅲ)设(3，4]组内数据为 a，b，c，d(4，5]组内数据为：e，f，从月均用气量高于 3 千立方米的中随机抽取 2 户，利用列举法能求出这 2 户用气量处于不同区间的概率.
答案：(Ⅰ)由频率分布表得：x=100-75=25，$m=\frac{25}{100}=0.25$.
(Ⅱ)由频率分布表估计该乡镇每户月平均用气量为：$\frac{1}{100}(0.5\times14+1.5\times25+2.5\times55+3.5\times4+4.5\times2)=2.05$.
(Ⅲ)设(3，4]组内数据为 a，b，c，d(4，5]组内数据为：e，f，
从月均用气量高于 3 千立方米的中随机抽取 2 户的基本事件空间为Ω={(a，b)，(a，c)，(a，d)，(a，e)，(a，f)，(b，c)，(b，d)，(b，e)，(b，f)，(c，d)，(c，e)，(c，f)，(d，e)，(d，f)，(e，f)}，共有 15 种情况，设随机抽取 2 户不在同一组为事件 A，则 A 中共有：(a，e)，(a，f)，(b，e)，(b，f)，(c，e)，(c，f)，(d，e)，(d，f)共有 8 种情况，这 2 户用气量处于不同区间的概率 $P(A)=\frac{8}{15}$.

18.如图，四棱锥 P-ABCD 中，△PAD 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形，$PD=CD=\sqrt{2}$，PC=2，BC 平行且等于$\frac{1}{2}$AD，CD⊥AD.




(Ⅰ)若 E 为 PD 中点，求证：CE∥平面 PAB；
(Ⅱ)求证：CD⊥平面 PAD；
(Ⅲ)求四棱锥 P-ABCD 的体积.
解析：(Ⅰ)取 PA 的中点 F，连接 EF，BF，由三角形中位线定理可得 BCEF 为平行四边形，得到 CE∥BF，再由线面平行的判定可得 CE∥平面 PAB；
(Ⅱ)由已知结合勾股定理可得 CD⊥PD，又 CD⊥AD，利用线面垂直的判定可得 CD⊥平面 PAD；
(Ⅲ)由(Ⅱ)知，平面 PAD⊥平面 ABCD，在等腰直角三角形 PAD 中，取 AD 的中点 O，可得 PO⊥AD.进一步得到 PO⊥平面 ABCD，则 PO 为四棱锥 P-ABCD 的高，再由棱锥体积公式求四棱锥 P-ABCD 的体积.
答案：(Ⅰ)取 PA 的中点 F，连接 EF，BF，




在△APD 中，E F 分别为 PA，PD 的中点，

∴EF∥$\frac{1}{2}$AD 且 EF=$\frac{1}{2}$AD，∵BC∥$\frac{1}{2}$AD 且 BC=$\frac{1}{2}$AD，∴EF∥BC 且 EF=BC，

∴四边形 FECB 为平行四边形，∴FB∥CE.

∵CE⊄平面 PAB，BF⊂平面 PAB，∴CE∥平面 PAB；

(Ⅱ)∵PD=CD=$\sqrt{2}$，PC=2，∴$PD^2+DC^2=PC^2$，则 PD⊥DC，

又 CD⊥AD，而 PD∩AD=D，∴CD⊥平面 PAD；

(Ⅲ)由(Ⅱ)知，CD⊥平面 PAD，

而 CD⊂平面 ABCD，则平面 PAD⊥平面 ABCD，

在等腰直角三角形 PAD 中，取 AD 的中点 O，∴PO⊥AD.

∵平面 PAD∩平面 ABCD=AD，∴PO⊥平面 ABCD，

∴PO 为四棱锥 P-ABCD 的高，

则 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot PO=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(1+2)\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

19.已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞b＞0)过点(0，-1)，离心率 e=$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程；

(Ⅱ)过点 F(1，0)作斜率为 k(k≠0)的直线 l，l 与椭圆 C 交于 M，N 两点，若线段 MN 的垂直平分线交 x 轴于点 P，求证：|MN|=2$\sqrt{2}$|PF|.

解析：(Ⅰ)运用椭圆的离心率公式和基本量 a，b，c 的关系，解方程可得 a，即可得到所求椭圆方程；

(Ⅱ)设直线 l 的方程为 y=k(x-1)，代入椭圆方程，运用韦达定理和中点坐标公式，由两直线垂直的条件：斜率之积为-1，以及垂直平分线的性质，化简即可得证.

答案：(Ⅰ)椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞b＞0)过点(0，-1)，离心率 e=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

可得 b=1，e=$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$a^2-b^2=c^2$，解得 a=$\sqrt{2}$，b=1，所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

(Ⅱ)设直线 l 的方程为 y=k(x-1)，代入椭圆方程$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，

得$(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$，由$\triangle=16k^4-4(1+2k^2)(2k^2-2)>0$，
可得$k\neq0$，设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，线段MN中点$Q(x_0,y_0)$，

那么$x_1+x_2=\frac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$，$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2k^2}{1+2k^2}$，$y_0=k(x_0-1)=-\frac{k}{1+2k^2}$，

设$P(p,0)$，根据题意PQ⊥MN，所以$y_0x_0-p=\frac{-\frac{k}{1+2k^2}}{\frac{2k^2}{1+2k^2}-p}=-\frac{1}{k}$，得$p=\frac{k^2}{1+2k^2}$，

所以$|PF|=1-\frac{k^2}{1+2k^2}=\frac{1+k^2}{1+2k^2}$，

$$\left|MN\right|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\left(\frac{4k^2}{1+2k^2}\right)^2-\frac{8k^2-8}{1+2k^2}=\frac{2\sqrt{2}\left(1+k^2\right)}{1+2k^2},$$

可得$|MN|=2\sqrt{2}|PF|$.

20.已知函数$f(x)=(2x+1)\ln x-\frac{1}{2}x^2-2x$，l为曲线C：$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线.
(Ⅰ)求l的方程；
(Ⅱ)求$f(x)$的单调区间；
(Ⅲ)设$g(x)=f'(x)+x-a$，若关于x的不等式$g(x)<0$有解，求实数a的取值范围.
解析：(Ⅰ)求出函数的导数，计算$f(1)$，$f'(1)$，求出切线方程即可；
(Ⅱ)求出函数的导数，解关于导函数的不等式，求出函数的单调区间即可；
(Ⅲ)求出函数的导数，根据函数的单调性求出$g(x)$的最小值，得到关于a的不等式，解出即可.

答案：(Ⅰ)$f'(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-x$.所以$f(1)=-\frac{5}{2}$，切点为(1，-52)，$f'(1)=0$，所以l的方程为$y=-\frac{5}{2}$；

(Ⅱ)定义域为$\{x|x>0\}$，$f'(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-x$，

设$g(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-x$，$g'(x)=-\frac{\left(x-1\right)^2}{x^2}\leqslant0$恒成立，

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数，且$g(1)=0$，
则当$x\in(0,1)$时，$g(x)>0$，即$f'(x)>0$，则当$x\in(1,+\infty)$时，$g(x)<0$，即$f'(x)<0$，
所以$f(x)$的单调递增区间为$(0,1)$，$f(x)$的单调递减区间$(1,+\infty)$.

(Ⅲ)因为$g(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-a$，$g'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{2x-1}{x^2}$，

当$x\in(0,\frac{1}{2})$时，$g'(x)<0$，当$x\in(\frac{1}{2},+\infty)$时，$g'(x)>0$，

所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值为$g\left(\frac{1}{2}\right)=2\ln\frac{1}{2}+2-a=2-2\ln 2-a$，

所以若关于 $x$ 的不等式 $g(x)<0$ 有解，则 $2-2\ln 2-a<0$，即 $a>2-2\ln 2$.