2013年普通高等学校招生全国统一考试（四川卷）数学理

一、选择题：本答题共有10小题，每小题5分.在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的.

1.(5分)设集合A={x|x+2=0}，集合B={x|x^2-4=0}，则A∩B=(　　)

A.{-2}

B.{2}

C.{-2，2}

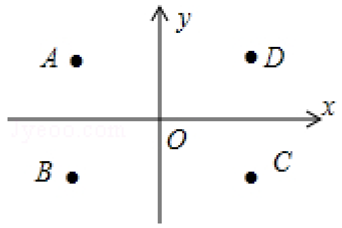
D.∅

解析：由A中的方程x+2=0，解得x=-2，即A={-2}；

由B中的方程x^2-4=0，解得x=2或-2，即B={-2，2}，则A∩B={-2}.

答案：A

2.(5分)如图，在复平面内，点A表示复数z的共轭复数，则复数z对应的点是(　　)



A.A

B.B

C.C

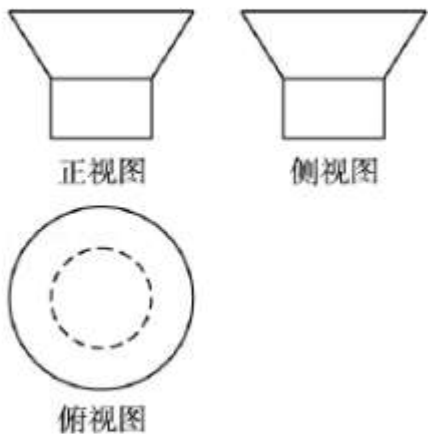
D.D

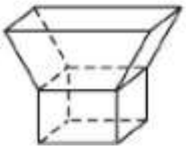
解析：两个复数是共轭复数，两个复数的实部相同，虚部相反，对应的点关于x轴对称.

所以点A表示复数z的共轭复数的点是B.

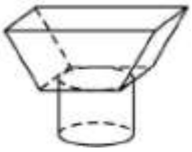
答案：B.

3.(5分)一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的直观图可以是(　　)



A. 

B. 

C. 

D. 

解析：由俯视图可知，原几何体的上底面应该是圆面，由此排除选项 A 和选项 C.
而俯视图内部只有一个虚圆，所以排除 B.
答案：D.

4.(5 分)设 x∈Z，集合 A 是奇数集，集合 B 是偶数集.若命题 p：∀x∈A，2x∈B，则(　　)

A. ¬p：∀x∈A，2x∉B

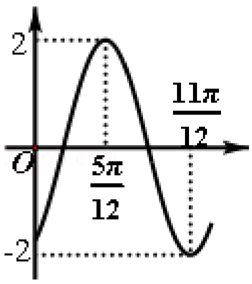
B. ¬p：∀x∉A，2x∉B

C. ¬p：∃x∉A，2x∈B

D. ¬p：∃x∈A，2x∉B

解析：因为全称命题的否定是特称命题，
所以设 x∈Z，集合 A 是奇数集，集合 B 是偶数集.若命题 p：∀x∈A，2x∈B，
则¬p：∃x∈A，2x∉B.
答案：D.

5.(5 分)函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\phi)$$(\omega>0,\ -\frac{\pi}{2}<\phi<\frac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，则 ω，φ 的值分别是(　　)



A. $2,\ -\frac{\pi}{3}$

B. $2,\ -\frac{\pi}{6}$

C. 4，$-\frac{\pi}{6}$

D. 4，$\frac{\pi}{3}$

解析：∵在同一周期内，函数在 x=$\frac{5\pi}{12}$时取得最大值，x=$\frac{11\pi}{12}$时取得最小值，

∴函数的周期 T 满足$\frac{T}{2}=\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$，

由此可得 T=$\frac{2\pi}{\omega}$=π，解得 ω=2，得函数表达式为 f(x)=2sin(2x+φ)

又∵当 x=$\frac{5\pi}{12}$时取得最大值 2，∴2sin(2·$\frac{5\pi}{12}$+φ)=2，可得$\frac{5\pi}{6}+\phi=\frac{\pi}{2}$+2kπ(k∈Z)

∵ $-\frac{\pi}{2}<\phi<\frac{\pi}{2}$，∴取 k=0，得 φ=$-\frac{\pi}{3}$

答案：A

6.(5 分)抛物线 $y^2=4x$ 的焦点到双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的渐近线的距离是(　　)

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 1

D. $\sqrt{3}$

解析：∵抛物线方程为 $y^2=4x$∴2p=4，可得$\frac{p}{2}$=1，抛物线的焦点 F(1，0)

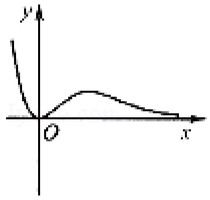
又∵双曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$∴$a^2=1$ 且 $b^2=3$，可得 a=1 且 b=$\sqrt{3}$，

双曲线的渐近线方程为 y=±$\frac{b}{a}$x，即 y=±$\sqrt{3}$x，化成一般式得：$\sqrt{3}x\pm y=0$.

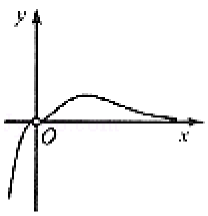
因此，抛物线 $y^2=4x$ 的焦点到双曲线渐近线的距离为 d=$\frac{|\sqrt{3}\times 1\pm 0|}{\sqrt{3+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

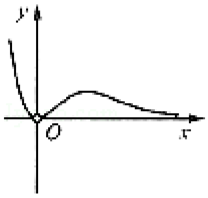
答案：B

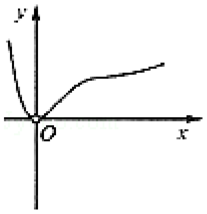
7.(5 分)函数 $y=\frac{x^3}{3^x-1}$的图象大致是(　　)



A.

B. 

C. 

D. 

解析：要使函数有意义，则 $3^x-1\neq 0$，解得 $x\neq 0$，∴函数的定义域为$\{x|x\neq 0\}$，排除 A.
当 $x<0$ 时，$y>0$，排除 B.
当 $x\to+\infty$时，$y\to 0$，排除 D.
答案：C.

8.(5 分)从 1，3，5，7，9 这五个数中，每次取出两个不同的数分别记为 a，b，共可得到 lga-lgb 的不同值的个数是(　　)

A.9
B.10
C.18
D.20

解析：首先从 1，3，5，7，9 这五个数中任取两个不同的数排列，共有 $A_5^2=20$种排法，

因为$\frac{3}{1}=\frac{9}{3}$，$\frac{1}{3}=\frac{3}{9}$，所以从 1，3，5，7，9 这五个数中，每次取出两个不同的数分别记为 a，b，

共可得到 lga-lgb 的不同值的个数是：20-2=18.
答案：C.

9.(5 分)节日前夕，小李在家门前的树上挂了两串彩灯，这两串彩灯的第一次闪亮相互独立，且都在通电后的 4 秒内任一时刻等可能发生，然后每串彩灯以 4 秒为间隔闪亮，那么这两串彩灯同时通电后，它们第一次闪亮的时候相差不超过 2 秒的概率是(　　)

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

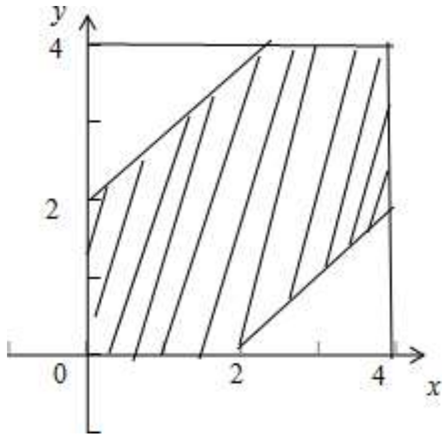
C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{7}{8}$

解析：设两串彩灯第一次闪亮的时刻分别为 x，y，由题意可得 0≤x≤4，0≤y≤4，

它们第一次闪亮的时候相差不超过 2 秒，则|x-y|≤2，

由几何概型可得所求概率为上述两平面区域的面积之比，



由图可知所求的概率为：$\frac{16-2\times\frac{1}{2}\times2\times2}{16}=\frac{3}{4}$

答案：C

10.(5 分)设函数 $f(x)=\sqrt{e^{x}+x-a}$ (a∈R，e 为自然对数的底数)，若曲线 y=sinx 上存在点$(x_0，y_0)$使得 $f(f(y_0))=y_0$，则 a 的取值范围是(　　)

A.[1，e]

B.$[e^{-1}-1，1]$

C.[1，e+1]

D.$[e^{-1}-1，e+1]$

解析：曲线 y=sinx 上存在点$(x_0，y_0)$使得 $f(f(y_0))=y_0$，则 $y_0\in[-1，1]$，

考查四个选项，B，D 两个选项中参数值都可取 0，C，D 两个选项中参数都可取 e+1，A，B，C，D 四个选项参数都可取 1，由此可先验证参数为 0 与 e+1 时是否符合题意，即可得出正确选项，

当 a=0 时，$f(x)=\sqrt{e^{x}+x}$，此是一个增函数，且函数值恒非负，故只研究 $y_0\in[0，1]$时 $f(f(y_0))=y_0$是否成立，

由于 $f(x)=\sqrt{e^{x}+x}$是一个增函数，可得出 $f(y_0)\geq f(0)=1$，而 $f(1)=\sqrt{e+1}>1$，故 a=0，不合题意，由此知 B，D 两个选项不正确，

当 a=e+1 时，$f(x)=\sqrt{e^{x}+x-e-1}$此函数是一个增函数，$f(1)=\sqrt{e^{1}+1-e-1}=0$，而 f(0)没有意义，故 a=e+1 不合题意，故 C，D 两个选项不正确，

综上讨论知，可确定 B，C，D 三个选项不正确，故 A 选项正确.

答案：A

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.(5 分)二项式$(x+y)^5$的展开式中，含 x^2y^3的项的系数是______(用数字作答).

解析：设二项式$(x+y)^5$的展开式的通项公式为 T_{r+1}，则 $T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}\cdot y^r$，

令 r=3，则含 x^2y^3的项的系数是$C_5^3=10$.

答案：10.

12.(5 分)在平行四边形 ABCD 中，对角线 AC 与 BD 交于点 O，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AO}$，则 $\lambda=$______.

解析：∵四边形 ABCD 为平行四边形，对角线 AC 与 BD 交于点 O，∴$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，

又 O 为 AC 的中点，∴$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$，∴$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}$，

∵$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AO}$，∴$\lambda=2$.

答案：2.

13.(5 分)设 $\sin 2\alpha=-\sin\alpha$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，则 $\tan 2\alpha$ 的值是______.

解析：∵$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin\alpha$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，

∴$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$，$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$\tan\alpha=-\sqrt{3}$，

则 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{-2\sqrt{3}}{1-(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}$.

答案：$\sqrt{3}$

14.(5 分)已知 f(x)是定义域为 R 的偶函数，当 x≥0 时，$f(x)=x^2-4x$，那么，不等式 f(x+2)＜5 的解集是_______.

解析：因为 f(x)为偶函数，所以 f(|x+2|)=f(x+2)，

则 f(x+2)＜5 可化为 f(|x+2|)＜5，即$|x+2|^2-4|x+2|<5$，(|x+2|+1)(|x+2|-5)＜0，

所以|x+2|＜5，解得-7＜x＜3，所以不等式 f(x+2)＜5 的解集是(-7，3).

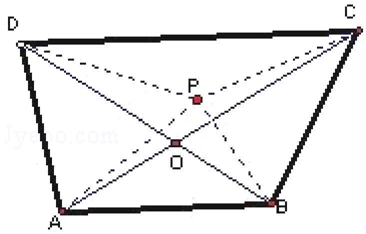
答案：(-7，3).

15.(5 分)设 P_1，P_2，…P_n为平面 α 内的 n 个点，在平面 α 内的所有点中，若点 P 到点 P_1，P_2，…P_n的距离之和最小，则称点 P 为 P_1，P_2，…P_n的一个“中位点”，例如，线段 AB 上的任意点都是端点 A，B 的中位点，现有下列命题：

①若三个点 A、B、C 共线，C 在线段 AB 上，则 C 是 A，B，C 的中位点；

②直角三角形斜边的中点是该直角三角形三个顶点的中位点；

③若四个点 A、B、C、D 共线，则它们的中位点存在且唯一；
④梯形对角线的交点是该梯形四个顶点的唯一中位点.
其中的真命题是______(写出所有真命题的序号).
解析：①若三个点 A、B、C 共线，C 在线段 AB 上，根据两点之间线段最短，则 C 是 A，B，C 的中位点，正确；
②举一个反例，如边长为 3，4，5 的直角三角形 ABC，此直角三角形的斜边的中点到三个顶点的距离之和为 5+2.5=7.5，而直角顶点到三个顶点的距离之和为 7，
∴直角三角形斜边的中点不是该直角三角形三个顶点的中位点；故错误；
③若四个点 A、B、C、D 共线，则它们的中位点是中间两点连线段上的任意一个点，故它们的中位点存在但不唯一；故错误；
④如图，在梯形 ABCD 中，对角线的交点 O，P 是任意一点，则根据三角形两边之和大于第三边得 PA+PB+PC+PD≥AC+BD=OA+OB+OC+OD，



∴梯形对角线的交点是该梯形四个顶点的唯一中位点.正确.
答案：①④.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

16.(12 分)在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_3=8$，且 a_4 为 a_2 和 a_9 的等比中项，求数列$\{a_n\}$的首项，公差及前 n 项和.
解析：设该数列的公差为 d，前 n 项和为 S_n，则利用 $a_1+a_3=8$，且 a_4 为 a_2 和 a_9 的等比中项，建立方程，即可求得数列$\{a_n\}$的首项，公差；利用等差数列的前 n 项和公式可求和..
答案：设该数列的公差为 d，前 n 项和为 S_n，
∵$a_1+a_3=8$，且 a_4 为 a_2 和 a_9 的等比中项，∴$2a_1+2d=8$，$(a_1+3d)^2=(a_1+d)(a_1+8d)$

解得 $a_1=4$，d=0 或 $a_1=1$，d=3∴前 n 项和为 $S_n=4n$ 或 $S_n=\frac{3n^2-n}{2}$.

17.(12 分)在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $2\cos^2\frac{A-B}{2}$

$\cos B-\sin(A-B)\sin B+\cos(A+C)=-\frac{3}{5}$.

(Ⅰ)求 cosA 的值；

(Ⅱ)若 $a=4\sqrt{2}$，b=5，求向量 $\overrightarrow{BA}$在 $\overrightarrow{BC}$方向上的投影.

解析：(Ⅰ)由已知条件利用三角形的内角和以及两角差的余弦函数，求出 A 的余弦值，然后求 sinA 的值；
(Ⅱ)利用 $a=4\sqrt{2}$，b=5，结合正弦定理，求出 B 的正弦函数，求出 B 的值，利用余弦定理求出 c 的大小.

答案：(Ⅰ)由 $2\cos^2\frac{A-B}{2}\cos B-\sin(A-B)\sin B+\cos(A+C)=-\frac{3}{5}$

可得 $\cos(A-B)\cos B-\sin(A-B)\sin(A+c)=-\frac{3}{5}$,

可得 $\cos(A-B)\cos B-\sin(A-B)\sin B=-\frac{3}{5}$,

即 $\cos(A-B+B)=-\frac{3}{5}$，即 $\cos A=-\frac{3}{5}$,

(Ⅱ)由正弦定理，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

由题意可知 a＞b，即 A＞B，所以 $B=\frac{\pi}{4}$,

由余弦定理可知 $(4\sqrt{2})^2=5^2+c^2-2\times5c\times(-\frac{3}{5})$. 解得 c=1，c=-7(舍去).

向量 $\overrightarrow{BA}$在 $\overrightarrow{BC}$方向上的投影：$|\overrightarrow{BA}|\cos B=c\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

18.(12 分)某算法的程序框图如图所示，其中输入的变量 x 在 1，2，3，…，24 这 24 个整数中等可能随机产生

(I)分别求出按程序框图正确编程运行时输出 y 的值为 i 的概率 p_i(i=1，2，3)；

(II)甲乙两同学依据自己对程序框图的理解，各自编程写出程序重复运行 n 次后，统计记录输出 y 的值为 i(i=1，2，3)的频数，以下是甲乙所作频数统计表的部分数据.

甲的频数统计图(部分)

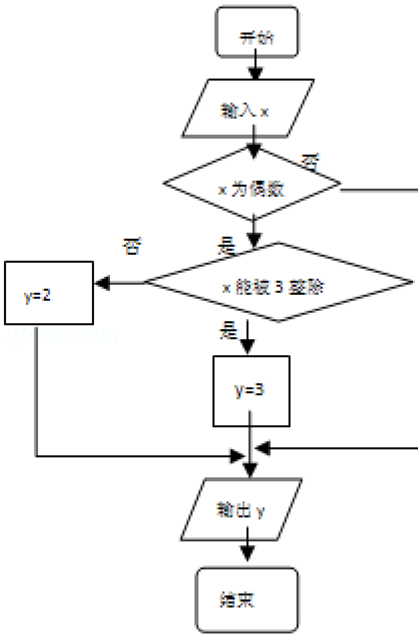
运行次数 n	输出 y 的值为 1 的频数	输出 y 的值为 2 的频数	输出 y 的值为 3 的频数
30	14	6	10
…	…	…	…
2100	1027	376	697

乙的频数统计图(部分)

运行次数 n	输出 y 的值为 1 的频数	输出 y 的值为 2 的频数	输出 y 的值为 3 的频数
30	12	11	7
…	…	…	…
2100	1051	696	353

当 n=2100 时，根据表中的数据，分别写出甲、乙所编程序各自输出 y 的值为 i(i=1，2，3)的频率(用分数表示)，并判断两位同学中哪一位所编程序符合要求的可能系较大；

(III)将按程序摆图正确编写的程序运行 3 次，求输出 y 的值为 2 的次数 ξ 的分布列及数学期望.



解析：(I)变量 x 是在 1，2，3，…，24 这 24 个整数中随机产生的一个数，共有 24 种可能，由程序框图可得 y 值为 1，2，3 对应的情况，由古典概型可得；(II)由题意可得当 n=2100 时，甲、乙所编程序各自输出的 y 值为 1，2，3 时的频率，可得答案；(III)随机变量 ξ 的可能取值为：0，1，2，3，分别求其概率可得分布列和期望.

答案：(I)变量 x 是在 1，2，3，…，24 这 24 个整数中随机产生的一个数，共有 24 种可能，当 x 从 1，3，5，7，9，11，13，15，17，19，21，23 这 12 个数中产生时，输出的 y 值为 1，故 $P_1=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$；

当 x 从 2，4，8，10，14，16，20，22 这 8 个数中产生时，输出的 y 值为 2，故 $P_2=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$；

当 x 从 6，12，18，24 这 4 个数中产生时，输出的 y 值为 3，故 $P_3=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$；

故输出的 y 值为 1 的概率为$\frac{1}{2}$，输出的 y 值为 2 的概率为$\frac{1}{3}$，输出的 y 值为 3 的概率为$\frac{1}{6}$；

(II)当 n=2100 时，甲、乙所编程序各自输出的 y 值为 i(i=1，2，3)的频率如下：

	输出 y 值为 1 的频率	输出 y 值为 2 的频率	输出 y 值为 3 的频率
甲	$\frac{1027}{2100}$	$\frac{376}{2100}$	$\frac{697}{2100}$
乙	$\frac{1051}{2100}$	$\frac{696}{2100}$	$\frac{353}{2100}$

比较频率趋势与概率，可得乙同学所编程序符合算法要求的可能性较大；

(III)随机变量 ξ 的可能取值为：0，1，2，3，$P(\xi=0)=C_3^0\times\left(\frac{1}{3}\right)^0\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，

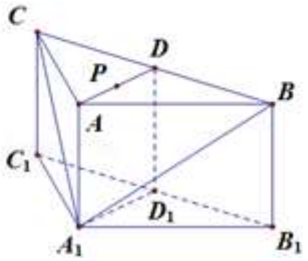
$P(\xi=1)=C_3^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

$P(\xi=2)=C_3^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{9}$，$P(\xi=3)=C_3^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{27}$，故 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

所以所求的数学期望 $E\xi=0\times\frac{8}{27}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{27}=1$

19.(12 分)如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧棱 $AA_1\perp$ 底面 ABC，$AB=AC=2AA_1$，$\angle BAC=120°$，D，D_1 分别是线段 BC，B_1C_1 的中点，P 是线段 AD 的中点.



(I)在平面 ABC 内，试做出过点 P 与平面 A_1BC 平行的直线 l，说明理由，并证明直线 $l\perp$ 平面 ADD_1A_1；

(II)设(I)中的直线 l 交 AB 于点 M，交 AC 于点 N，求二面角 $A-A_1M-N$ 的余弦值.

解析:(I)在平面 ABC 内过点 P 作直线 $l\parallel BC$,根据线面平行的判定定理得直线 $l\parallel$ 平面 A_1BC. 由等腰三角形“三线合一”得到 $AD\perp BC$，从而得到 $AD\perp l$，结合 $AA_1\perp l$ 且 AD、AA_1 是平面 ADD_1A_1 内的相交直线，证出直线 $l\perp$ 平面 ADD_1A_1；

(II)连接 A_1P，过点 A 作 $AE\perp A_1P$ 于 E，过 E 点作 $EF\perp A_1M$ 于 F，连接 AF.根据面面垂直判定定理，证出平面 $A_1MN\perp$ 平面 A_1AE，

从而得到 $AE\perp$ 平面 A_1MN，结合 $EF\perp A_1M$，由三垂线定理得 $AF\perp A_1M$，可得∠AFE 就是二面角 $A-A_1M-N$ 的平面角.设 $AA_1=1$，分别在 $Rt\triangle A_1AP$ 中和△AEF 中算出 AE、AF 的长，在 Rt△AEF 中，根据三角函数的定义算出 sin∠AFE 的值，结合同角三角函数的平方关系算出 cos∠AFE 的值，从而得出二面角 $A-A_1M-N$ 的余弦值.

答案：(I)在平面 ABC 内，过点 P 作直线 $l\parallel BC$，

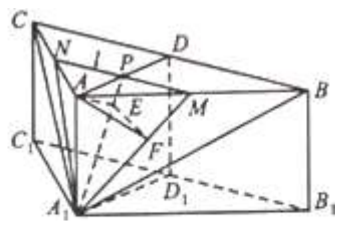
∵直线 $l\not\subset$ 平面 A_1BC，$BC\subset$ 平面 A_1BC，∴直线 $l\parallel$ 平面 A_1BC，

∵△ABC 中，AB=AC，D 是 BC 的中点，∴$AD\perp BC$，结合 $l\parallel BC$ 得 $AD\perp l$，

∵$AA_1\perp$ 平面 ABC，$l\subset$ 平面 ABC，∴$AA_1\perp l$，

∵AD、AA_1 是平面 ADD_1A_1 内的相交直线，∴直线 $l\perp$ 平面 ADD_1A_1；

(II)连接 A_1P，过点 A 作 $AE\perp A_1P$ 于 E，过 E 点作 $EF\perp A_1M$ 于 F，连接 AF，



由(I)知 $MN\perp$ 平面 A_1AE，结合 $MN\subset$ 平面 A_1MN 得平面 $A_1MN\perp$ 平面 A_1AE，

∵平面 A_1MN∩平面 $A_1AE=A_1P$，$AE\perp A_1P$，∴$AE\perp$平面 A_1MN，
∵$EF\perp A_1M$，EF 是 AF 在平面 A_1MN 内的射影，
∴$AF\perp A_1M$，可得∠AFE 就是二面角 $A-A_1M-N$ 的平面角，
设 $AA_1=1$，则由 $AB=AC=2AA_1$，$\angle BAC=120°$，可得$\angle BAD=60°$，$AB=2$ 且 $AD=1$，
又∵P 为 AD 的中点，∴M 是 AB 的中点，得 $AP=\frac{1}{2}$，$AM=1$，
Rt△A_1AP 中，$A_1P=\sqrt{AP^2+AA_1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$；Rt△$A_1AM$ 中，$A_1M=\sqrt{2}$，
∴$AE=\frac{AP\cdot AA_1}{A_1P}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$AF=\frac{AM\cdot AA_1}{A_1M}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，
∴Rt△AEF 中，$\sin\angle AFE=\frac{AE}{AF}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，可得 $\cos\angle AFE=\sqrt{1-\sin^2\angle AFE}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，
即二面角 $A-A_1M-N$ 的余弦值等于$\frac{\sqrt{15}}{5}$.

20.(13 分)已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的两个焦点分别为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，且椭圆 C 经过点 $P(\frac{4}{3},\frac{1}{3})$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的离心率：
(Ⅱ)设过点 A(0，2)的直线 l 与椭圆 C 交于 M，N 两点，点 Q 是线段 MN 上的点，且$\frac{2}{|AQ|^2}=\frac{1}{|AM|^2}+\frac{1}{|AN|^2}$，求点 Q 的轨迹方程.

解析：(I)由题设条件结合椭圆的性质直接求出 a，c 的值，即可得到椭圆的离心率；
(II)由题设过点 A(0，2)的直线 l 与椭圆 C 交于 M，N 两点，可设出直线的方程与椭圆的方程联立，由于两曲线交于两点，故判断式大于 0 且可利用根与系数的关系建立 M，N 两点的坐标与直线的斜率 k 的等量关系，然后再设出点 Q 的坐标，用两点 M，N 的坐标表示出$\frac{2}{|AQ|^2}=\frac{1}{|AM|^2}+\frac{1}{|AN|^2}$，再综合计算即可求得点 Q 的轨迹方程.

答案：(I)∵椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$的两个焦点分别为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，且椭圆 C 经过点 $P(\frac{4}{3},\frac{1}{3})$.

∴$c=1$，$2a=PF_1+PF_2=\sqrt{(\frac{4}{3}+1)^2+\frac{1}{9}}+\sqrt{(\frac{4}{3}-1)^2+\frac{1}{9}}=2\sqrt{2}$，即 $a=\sqrt{2}$

∴椭圆的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$…4 分

(II)由(I)知，椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，设点 Q 的坐标为(x，y)

(1)当直线 l 与 x 轴垂直时，直线 l 与椭圆 C 交于(0，1)、(0，-1)两点，此时点 Q 的坐标为(0，$2-\frac{3\sqrt{5}}{5}$)

(2)当直线 l 与 x 轴不垂直时，可设其方程为 y=kx+2，

因为M，N 在直线 l 上，可设点 M，N 的坐标分别为(x_1，kx_1+2)，(x_2，kx_2+2)，则

$|AM|^2=(1+k^2)x_1^2$，$|AN|^2=(1+k^2)x_2^2$，又$|AQ|^2=(1+k^2)x^2$，

$\frac{2}{|AQ|^2}=\frac{1}{|AM|^2}+\frac{1}{|AN|^2}$

$\therefore \frac{2}{(1+k^2)x^2}=\frac{1}{(1+k^2)x_1^2}+\frac{1}{(1+k^2)x_2^2}$，即$\frac{2}{x^2}=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=$

$\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1^2x_2^2}$…①

将 y=kx+2 代入$\frac{x^2}{2}+y^2=1$中，得$(2k^2+1)x^2+8kx+6=0$…②

由△=$(8k)^2-24(2k^2+1)>0$，得 $k^2>\frac{3}{2}$,

由②知 $x_1+x_2=-\frac{8k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{6}{2k^2+1}$，代入①中化简得 $x^2=\frac{18}{10k^2-3}$…③

因为点 Q 在直线 y=kx+2 上，所以 $k=\frac{y-2}{x}$，代入③中并化简得 $10(y-2)^2-3x^2=18$，

由③及 $k^2>\frac{3}{2}$可知 $0<x^2<\frac{3}{2}$，即 $x\in(-\frac{\sqrt{6}}{2}，0)\cup(0，\frac{\sqrt{6}}{2})$，

由题意，Q(x，y)在椭圆 C 内，所以$-1\leqslant y\leqslant 1$，

又由 $10(y-2)^2-3x^2=18$ 得$(y-2)^2\in[\frac{9}{5}，\frac{9}{4})$且$-1\leqslant y\leqslant 1$，则 $y\in(\frac{1}{2}，2-\frac{3\sqrt{5}}{5})$，

所以，点 Q 的轨迹方程为 $10(y-2)^2-3x^2=18$，其中 $x\in(-\frac{\sqrt{6}}{2}，\frac{\sqrt{6}}{2})$，$y\in(\frac{1}{2}，2-\frac{3\sqrt{5}}{5})$.

21.(14 分)已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2+2x+a，x<0\\ \ln x，x>0\end{cases}$，其中 a 是实数，设 A($x_1$，f($x_1$))，B($x_2$，f($x_2$))为该函数图象上的点，且 $x_1<x_2$.

(Ⅰ)指出函数 f(x)的单调区间；

(Ⅱ)若函数 f(x)的图象在点 A，B 处的切线互相垂直，且 $x_2<0$，求 x_2-x_1的最小值；

(Ⅲ)若函数 f(x)的图象在点 A，B 处的切线重合，求 a 的取值范围.

解析：(I)利用二次函数的单调性和对数函数的单调性即可得出；

(II)利用导数的几何意义即可得到切线的斜率，因为切线互相垂直，可得

$f'(x_1)\cdot f'(x_2)=-1$，即$(2x_1+2)(2x_2+2)=-1$.可得

$x_2-x_1=\frac{1}{2}[-(2x_1+2)+(2x_2+2)]$，再利用基本不等式的性质即可得出；

(III)当$x_1<x_2<0$或$0<x_1<x_2$时，$\because f'(x_1)\neq f'(x_2)$，故不成立，$\therefore x_1<0<x_2$.分别写出切线的方程，根据两条直线重合的充要条件即可得出，再利用导数即可得出..

答案：(I)当$x<0$时，$f(x)=(x+1)^2+a$，∴f(x)在(-∞，-1)上单调递减，在(-1，0)上单调递增；

当$x>0$时，$f(x)=\ln x$，在(0，+∞)单调递增.

(II)$\because x_1<x_2<0$，$\therefore f(x)=x^2+2x+a$，$\therefore f'(x)=2x+2$，

∴函数f(x)在点A，B处的切线的斜率分别为$f'(x_1)$，$f'(x_2)$，

∵函数f(x)的图象在点A，B处的切线互相垂直，$\therefore f'(x_1)\cdot f'(x_2)=-1$，

$\therefore (2x_1+2)(2x_2+2)=-1$. $\therefore 2x_1+2<0$，$2x_2+2>0$，

$\therefore x_2-x_1=\frac{1}{2}[-(2x_1+2)+(2x_2+2)]\geqslant\sqrt{[-(2x_1+2)](2x_2+2)}=1$，当且仅当$-(2x_1+2)=2x_2+2=1$，即$x_1=-\frac{3}{2}$，$x_2=-\frac{1}{2}$时等号成立.

∴函数f(x)的图象在点A，B处的切线互相垂直，且$x_2<0$，求x_2-x_1的最小值为1.

(III)当$x_1<x_2<0$或$0<x_1<x_2$时，$\because f'(x_1)\neq f'(x_2)$，故不成立，$\therefore x_1<0<x_2$.

当$x_1<0$时，函数f(x)在点$A(x_1,f(x_1))$，处的切线方程为

$y-(x_1^2+2x_1+a)=(2x_1+2)(x-x_1)$，即$y=(2x_1+2)x-x_1^2+a$.

当$x_2>0$时，函数f(x)在点$B(x_2,f(x_2))$处的切线方程为$y-\ln x_2=\frac{1}{x_2}(x-x_2)$，即

$y=\frac{1}{x_2}x+\ln x_2-1$.

函数f(x)的图象在点A，B处的切线重合的充要条件是$\begin{cases}\frac{1}{x_2}=2x_1+2 & ①\\ \ln x_2-1=-x_1^2+a & ②\end{cases}$，

由①及$x_1<0<x_2$可得$-1<x_1<0$，

由①②得$a=x_1^2+\ln\frac{1}{2x_1+2}-1=x_1^2-\ln(2x_1+2)-1$.

∵函数$y=x_1^2-1$，$y=-\ln(2x_1+2)$在区间(-1，0)上单调递减，

$\therefore a(x_1)=x_1^2-\ln(2x_1+2)-1$在(-1，0)上单调递减，且$x_1\to-1$时，$\ln(2x_1+2)\to-\infty$，

即$-\ln(2x_1+2)\to+\infty$，也即$a(x_1)\to+\infty$. $x_1\to0$，$a(x_1)\to-1-\ln2$.

∴a的取值范围是$(-1-\ln2,+\infty)$.