

2018年普通高等学校招生全国统一考试(新课标II)数学文

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $i(2+3i)=()$

- A. $3-2i$
- B. $3+2i$
- C. $-3-2i$
- D. $-3+2i$

解析：利用复数的代数形式的乘除运算法则直接求解。

$$i(2+3i)=2i+3i^2=-3+2i.$$

答案：D

2. 已知集合 $A=\{1, 3, 5, 7\}$, $B=\{2, 3, 4, 5\}$, 则 $A \cap B=()$

- A. $\{3\}$
- B. $\{5\}$
- C. $\{3, 5\}$
- D. $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

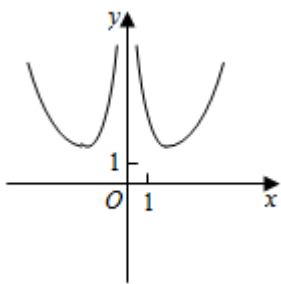
解析：利用交集定义直接求解。

$$\because \text{集合 } A=\{1, 3, 5, 7\}, B=\{2, 3, 4, 5\},$$

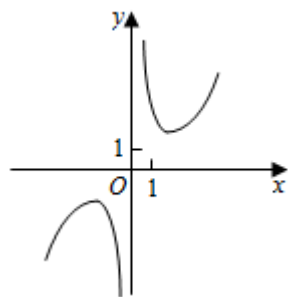
$$\therefore A \cap B=\{3, 5\}.$$

答案：C

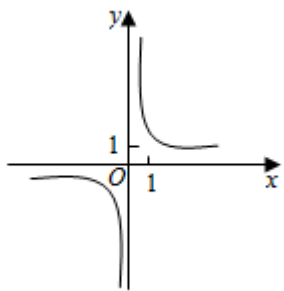
3. 函数 $f(x)=\frac{e^x - e^{-x}}{x^2}$ 的图象大致为()



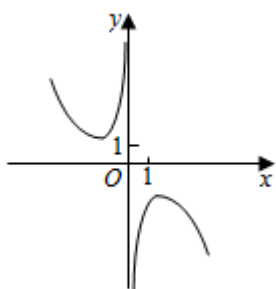
A.



B.



C.



D.

解析：判断函数的奇偶性，利用函数的定点的符号的特点分别进行判断即可.

$$\text{函数 } f(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{(-x)^2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{x^2} = -f(x),$$

则函数 $f(x)$ 为奇函数，图象关于原点对称，排除 A；

当 $x=1$ 时， $f(1) = e - \frac{1}{e} > 0$ ，排除 D；

当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $f(x) \rightarrow +\infty$ ，排除 C.

答案：B

4. 已知向量 \vec{a} ， \vec{b} 满足 $|\vec{a}|=1$ ， $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ ，则 $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = ()$

- A. 4
- B. 3
- C. 2
- D. 0

解析：根据向量的数量积公式计算即可.

$$\text{向量 } \vec{a}, \vec{b} \text{ 满足 } |\vec{a}|=1, \vec{a} \cdot \vec{b} = -1, \text{ 则 } \vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 1 = 3.$$

答案：B

5. 从 2 名男同学和 3 名女同学中任选 2 人参加社区服务，则选中的 2 人都是女同学的概率为 ()

- A. 0.6
- B. 0.5
- C. 0.4
- D. 0.3

解析：(适合理科生)从 2 名男同学和 3 名女同学中任选 2 人参加社区服务，共有 $C_5^2=10$ 种，

其中全是女生的有 $C_3^2=3$ 种,

故选中的 2 人都是女同学的概率 $P=\frac{3}{10}=0.3$,

(适合文科生), 设 2 名男生为 a, b, 3 名女生为 A, B, C,

则任选 2 人的种数为 ab, aA, aB, aC, bA, bB, bC, AB, AC, BC 共 10 种, 其中全是女生为 AB, AC, BC 共 3 种,

故选中的 2 人都是女同学的概率 $P=\frac{3}{10}=0.3$.

答案: D

6. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a>0, b>0$) 的离心率为 $\sqrt{3}$, 则其渐近线方程为()

A. $y = \pm\sqrt{2}x$

B. $y = \pm\sqrt{3}x$

C. $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

D. $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}x$

解析: 根据双曲线离心率的定义求出 a, c 的关系, 结合双曲线 a, b, c 的关系进行求解即可.

\because 双曲线的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3}$,

$$\text{则 } \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2}} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 1} = \sqrt{3 - 1} = \sqrt{2},$$

即双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\sqrt{2}x$.

答案: A

7. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $BC=1, AC=5$, 则 $AB=()$

A. $4\sqrt{2}$

B. $\sqrt{30}$

C. $\sqrt{29}$

D. $2\sqrt{5}$

解析：利用二倍角公式求出 C 的余弦函数值，利用余弦定理转化求解即可。

$$\text{在}\triangle ABC\text{中，}\cos\frac{C}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos C=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5},$$

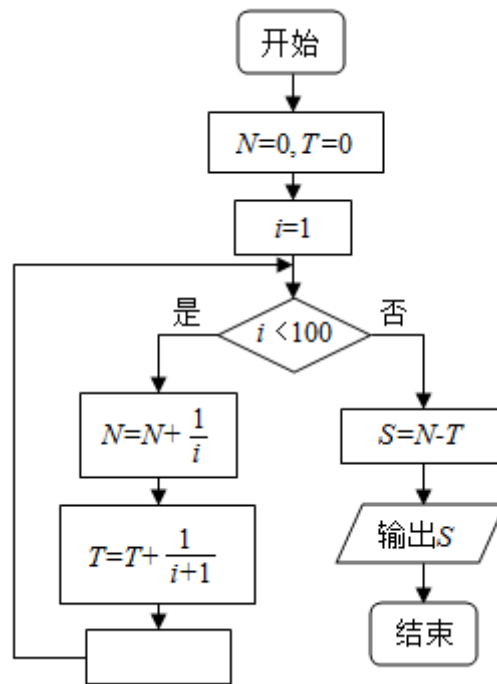
BC=1, AC=5,

$$\text{则 } AB = \sqrt{BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cos C} = \sqrt{1 + 25 + 2 \times 1 \times 5 \times \frac{3}{5}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

答案：A

8. 为计算 $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$ ，设计了如图的程序框图，则在空白框中应填入

()



- A. $i=i+1$
- B. $i=i+2$
- C. $i=i+3$
- D. $i=i+4$

解析：模拟程序框图的运行过程知，该程序运行后输出的是

$$S = N - T = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right),$$

累加步长是 2，则在空白处应填入 $i=i+2$ 。

答案：B

9. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 CC_1 的中点, 则异面直线 AE 与 CD 所成角的正切值为 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

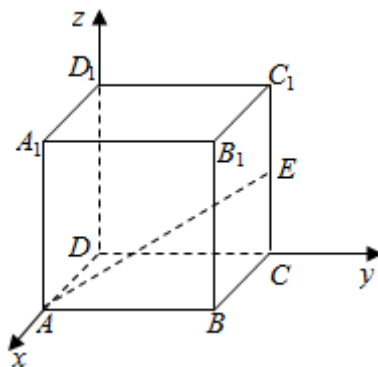
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

解析: 以 D 为原点, DA 为 x 轴, DC 为 y 轴, DD_1 为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 利用向量法能求出异面直线 AE 与 CD 所成角的正切值.

解以 D 为原点, DA 为 x 轴, DC 为 y 轴, DD_1 为 z 轴, 建立空间直角坐标系,



设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2,

则 $A(2, 0, 0)$, $E(0, 2, 1)$, $D(0, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$,

$$\vec{AE} = (-2, 2, 1), \quad \vec{CD} = (0, -2, 0),$$

设异面直线 AE 与 CD 所成角为 θ ,

$$\cos \theta = \frac{|\vec{AE} \cdot \vec{CD}|}{|\vec{AE}| |\vec{CD}|} = \frac{4}{\sqrt{9} \cdot 2} = \frac{2}{3},$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

\therefore 异面直线 AE 与 CD 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

答案: C

10. 若 $f(x) = \cos x - \sin x$ 在 $[0, a]$ 是减函数, 则 a 的最大值是()

- A. $\frac{\pi}{4}$
- B. $\frac{\pi}{2}$
- C. $\frac{3\pi}{4}$
- D. π

解析: $f(x) = \cos x - \sin x = -(\sin x - \cos x) = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,

由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

得 $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

取 $k=0$, 得 $f(x)$ 的一个减区间为 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$,

由 $f(x)$ 在 $[0, a]$ 是减函数,

得 $a \leq \frac{3\pi}{4}$.

则 a 的最大值是 $\frac{3\pi}{4}$.

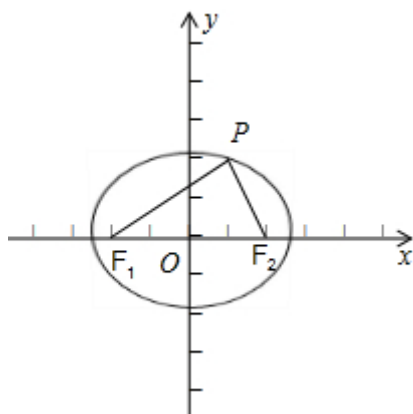
答案: C

11. 已知 F_1, F_2 是椭圆 C 的两个焦点, P 是 C 上的一点, 若 $PF_1 \perp PF_2$, 且 $\angle PF_2F_1 = 60^\circ$, 则 C 的离心率为()

- A. $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$
- B. $2 - \sqrt{3}$
- C. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
- D. $\sqrt{3}-1$

解析: 利用已知条件求出 P 的坐标, 代入椭圆方程, 然后求解椭圆的离心率即可.

F_1, F_2 是椭圆 C 的两个焦点, P 是 C 上的一点, 若 $PF_1 \perp PF_2$, 且 $\angle PF_2F_1 = 60^\circ$, 可得椭圆的焦点坐标 $F_2(c, 0)$,



所以 $P\left(\frac{1}{2}c, \frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$. 可得: $\frac{c^2}{4a^2} + \frac{3c^2}{4b^2} = 1$, 可得 $\frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{e^2} - 1\right) = 1$, 可得 $e^4 - 8e^2 + 4 = 0$,

$e \in (0, 1)$,

解得 $e = \sqrt{3} - 1$.

答案: D

12. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x) = f(1+x)$, 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(50) = (\quad)$

- A. -50
- B. 0
- C. 2
- D. 50

解析: 根据函数奇偶性和对称性的关系求出函数的周期是 4, 结合函数的周期性和奇偶性进行转化求解即可.

$\because f(x)$ 是奇函数, 且 $f(1-x) = f(1+x)$,

$\therefore f(1-x) = f(1+x) = -f(x-1)$, $f(0) = 0$,

则 $f(x+2) = -f(x)$, 则 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$,

即函数 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数,

$\because f(1) = 2$,

$\therefore f(2) = f(0) = 0$, $f(3) = f(1-2) = f(-1) = -f(1) = -2$,

$f(4) = f(0) = 0$,

则 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 2 + 0 - 2 + 0 = 0$,

则 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(50) = 12[f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] + f(49) + f(50)$

$= f(1) + f(2) = 2 + 0 = 2$,

答案: C

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 曲线 $y = 2\ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程为_____.

解析: 欲求出切线方程, 只须求出其斜率即可, 故先利用导数求出在 $x=1$ 的导数值, 再结合导数的几何意义即可求出切线的斜率. 从而问题解决.

$\because y = 2\ln x$,

$$\therefore y' = \frac{2}{x},$$

当 $x=1$ 时, $y' = 2$

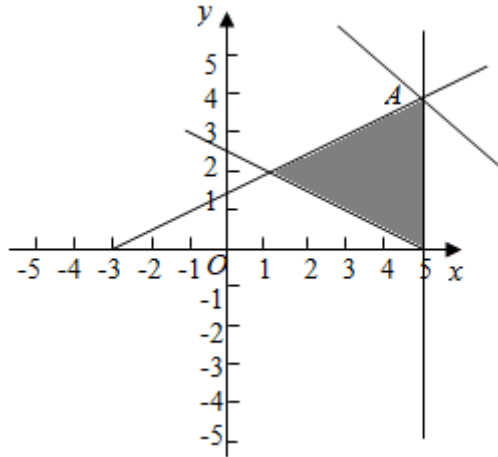
\therefore 曲线 $y=2\ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程为 $y=2x-2$.

答案: $y=2x-2$

14. 若 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} x + 2y - 5 \geq 0 \\ x - 2y + 3 \geq 0 \\ x - 5 \leq 0 \end{cases}$$
, 则 $z=x+y$ 的最大值为_____.

解析: 由约束条件作出可行域, 数形结合得到最优解, 求出最优解的坐标, 代入目标函数得答案.

由 x, y 满足约束条件
$$\begin{cases} x + 2y - 5 \geq 0 \\ x - 2y + 3 \geq 0 \\ x - 5 \leq 0 \end{cases}$$
 作出可行域如图,



化目标函数 $z=x+y$ 为 $y=-x+z$,

由图可知, 当直线 $y=-x+z$ 过 A 时, z 取得最大值,

由
$$\begin{cases} x = 5 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$$
, 解得 $A(5, 4)$,

目标函数有最大值, 为 $z=9$.

答案: 9

15. 已知 $\tan\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{5}$, 则 $\tan\alpha =$ _____.

解析: 根据三角函数的诱导公式以及两角和差的正切公式进行计算即可.

$$\therefore \tan\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{5},$$

$$\therefore \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{5},$$

$$\text{则 } \tan \alpha = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{5} + 1}{1 - \frac{1}{5} \times 1} = \frac{1+5}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

答案: $\frac{3}{2}$

16. 已知圆锥的顶点为 S, 母线 SA, SB 互相垂直, SA 与圆锥底面所成角为 30° . 若 $\triangle SAB$ 的面积为 8, 则该圆锥的体积为_____.

解析: 利用已知条件求出母线长度, 然后求解底面半径, 以及圆锥的高. 然后求解体积即可.

圆锥的顶点为 S, 母线 SA, SB 互相垂直, $\triangle SAB$ 的面积为 8, 可得: $\frac{1}{2} SA^2 = 8$, 解得 $SA = 4$,

SA 与圆锥底面所成角为 30° . 可得圆锥的底面半径为: $2\sqrt{3}$, 圆锥的高为: 2,

则该圆锥的体积为: $V = \frac{1}{3} \times \pi \times (2\sqrt{3})^2 \times 2 = 8\pi$.

答案: 8π

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_1 = -7$, $S_3 = -15$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解析: (1) 根据 $a_1 = -7$, $S_3 = -15$, 可得 $a_1 = -7$, $3a_1 + 3d = -15$, 求出等差数列 $\{a_n\}$ 的公差, 然后求出 a_n 即可.

答案: (1) \because 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -7$, $S_3 = -15$,

$$\therefore a_1 = -7, 3a_1 + 3d = -15, \text{ 解得 } a_1 = -7, d = 2,$$

$$\therefore a_n = -7 + 2(n-1) = 2n - 9.$$

(2) 求 S_n , 并求 S_n 的最小值.

解析: (2) 由 $a_1 = -7$, $d = 2$, $a_n = 2n - 9$, 得 $S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{1}{2} (2n^2 - 16n) = n^2 - 8n = (n-4)^2 - 16$, 由此可

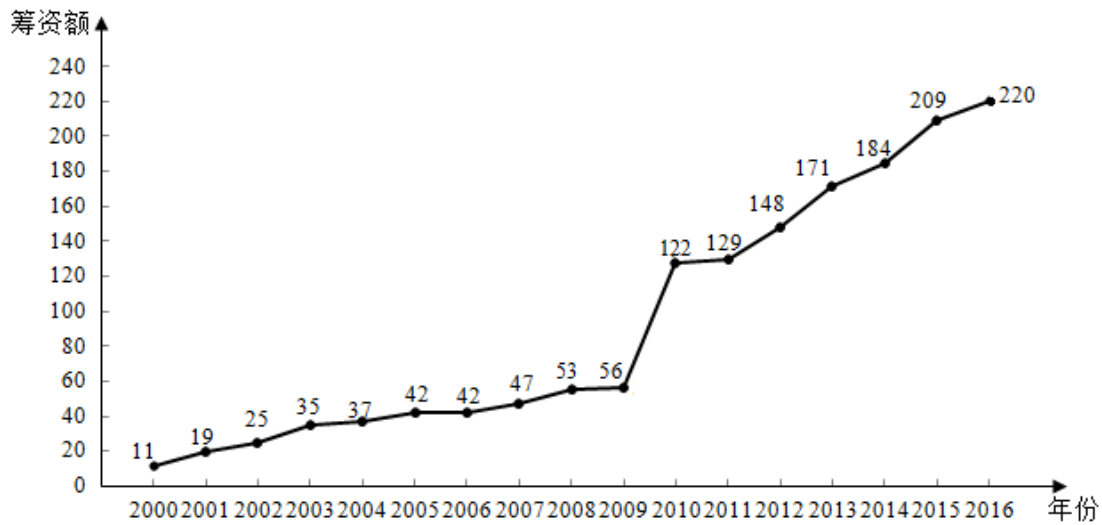
求出 S_n 以及 S_n 的最小值.

答案: (2) $\because a_1 = -7$, $d = 2$, $a_n = 2n - 9$,

$$\therefore S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{1}{2} (2n^2 - 16n) = n^2 - 8n = (n-4)^2 - 16,$$

\therefore 当 $n = 4$ 时, 前 n 项的和 S_n 取得最小值为 -16.

18. 如图是某地区 2000 年至 2016 年环境基础设施投资额 y (单位: 亿元) 的折线图.



为了预测该地区 2018 年的环境基础设施投资额, 建立了 y 与时间变量 t 的两个线性回归模型. 根据 2000 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 1, 2, ..., 17) 建立模型①: $\hat{y} = -30.4 + 13.5t$; 根据 2010 年至 2016 年的数据 (时间变量 t 的值依次为 1, 2, ..., 7) 建立模型②: $\hat{y} = 99 + 17.5t$.

(1) 分别利用这两个模型, 求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值.

解析: (1) 根据模型①计算 $t=19$ 时 \hat{y} 的值, 根据模型②计算 $t=9$ 时 \hat{y} 的值即可.

答案: (1) 根据模型①: $\hat{y} = -30.4 + 13.5t$,

计算 $t=19$ 时, $\hat{y} = -30.4 + 13.5 \times 19 = 226.1$,

利用这个模型, 求出该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值是 226.1 亿元.

根据模型②: $\hat{y} = 99 + 17.5t$,

计算 $t=9$ 时, $\hat{y} = 99 + 17.5 \times 9 = 256.5$,

利用这个模型, 求该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值是 256.5 亿元.

(2) 你认为用哪个模型得到的预测值更可靠? 并说明理由.

解析: (2) 从总体数据和 2000 年到 2009 年间递增幅度以及 2010 年到 2016 年间递增的幅度比较,

即可得出模型②的预测值更可靠些.

答案: (2) 模型②得到的预测值更可靠;

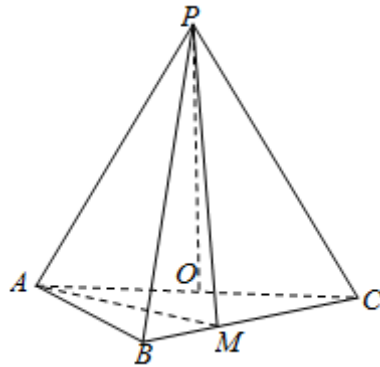
因为从总体数据看, 该地区从 2000 年到 2016 年的环境基础设施投资额是逐年上升的,

而从 2000 年到 2009 年间递增的幅度较小些,

从 2010 年到 2016 年间递增的幅度较大些,

所以, 利用模型②的预测值更可靠些.

19. 如图，在三棱锥 P-ABC 中， $AB=BC=2\sqrt{2}$ ， $PA=PB=PC=AC=4$ ，O 为 AC 的中点。



(1) 证明：PO ⊥ 平面 ABC.

解析：(1) 证明：可得 $AB^2+BC^2=AC^2$ ，即 $\triangle ABC$ 是直角三角形，又 $\triangle POA \cong \triangle POB \cong \triangle POC$ ，可得 $\angle POA = \angle POB = \angle POC = 90^\circ$ ，即可证明 $PO \perp$ 平面 ABC.

答案：(1) 证明：∵ $AB=BC=2\sqrt{2}$ ， $AC=4$ ，∴ $AB^2+BC^2=AC^2$ ，即 $\triangle ABC$ 是直角三角形，

又 O 为 AC 的中点，∴ $OA=OB=OC$ ，

∵ $PA=PB=PC$ ，∴ $\triangle POA \cong \triangle POB \cong \triangle POC$ ，∴ $\angle POA = \angle POB = \angle POC = 90^\circ$ ，

∴ $PO \perp AC$ ， $PO \perp OB$ ， $OB \cap AC = O$ ，∴ $PO \perp$ 平面 ABC.

(2) 若点 M 在棱 BC 上，且 $MC=2MB$ ，求点 C 到平面 POM 的距离.

解析：(2) 设点 C 到平面 POM 的距离为 d. 由 $V_{P-OMC} = V_{C-POM} \Rightarrow \frac{1}{3} \times S_{\triangle POM} \times d = \frac{1}{3} \times S_{\triangle OCM} \times PO$ ，

解得 d 即可

答案：(2) 由 (1) 得 $PO \perp$ 平面 ABC， $PO = \sqrt{PA^2 - AO^2} = 2\sqrt{3}$ ，

在 $\triangle COM$ 中， $OM = \sqrt{OC^2 + CM^2 - 2OC \cdot CM \cos 45^\circ} = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

$$S_{\triangle POM} = \frac{1}{2} \times PO \times OM = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{5}}{3} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

$$S_{\triangle OCM} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times S_{\triangle ABC} = \frac{4}{3}$$

设点 C 到平面 POM 的距离为 d. 由 $V_{P-OMC} = V_{C-POM} \Rightarrow \frac{1}{3} \times S_{\triangle POM} \times d = \frac{1}{3} \times S_{\triangle OCM} \times PO$ ，

解得 $d = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ ，

∴ 点 C 到平面 POM 的距离为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

20. 设抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 F , 过 F 且斜率为 $k(k>0)$ 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, $|AB|=8$.

(1) 求 l 的方程.

解析: (1) 方法一: 设直线 AB 的方程, 代入抛物线方程, 根据抛物线的焦点弦公式即可求得 k 的值, 即可求得直线 l 的方程;

方法二: 根据抛物线的焦点弦公式 $|AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta}$, 求得直线 AB 的倾斜角, 即可求得直线 l 的斜率, 求得直线 l 的方程.

答案: (1) 方法一: 抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 当直线的斜率不存在时, $|AB|=4$, 不满足;

设直线 AB 的方程为: $y=k(x-1)$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} y = k(x-1) \\ y^2 = 4x \end{cases}, \text{整理得: } k^2x^2 - 2(k^2+2)x + k^2 = 0, \text{ 则 } x_1+x_2 = \frac{2(k^2+2)}{k^2}, x_1x_2=1,$$

$$\text{由 } |AB| = x_1+x_2+p = \frac{2(k^2+2)}{k^2} + 2 = 8, \text{ 解得: } k^2=1, \text{ 则 } k=1,$$

\therefore 直线 l 的方程 $y=x-1$.

方法二: 抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 设直线 AB 的倾斜角为 θ , 由抛物线的弦长公

$$\text{式 } |AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta} = \frac{4}{\sin^2 \theta} = 8, \text{ 解得: } \sin^2 \theta = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}, \text{ 则直线的斜率 } k=1,$$

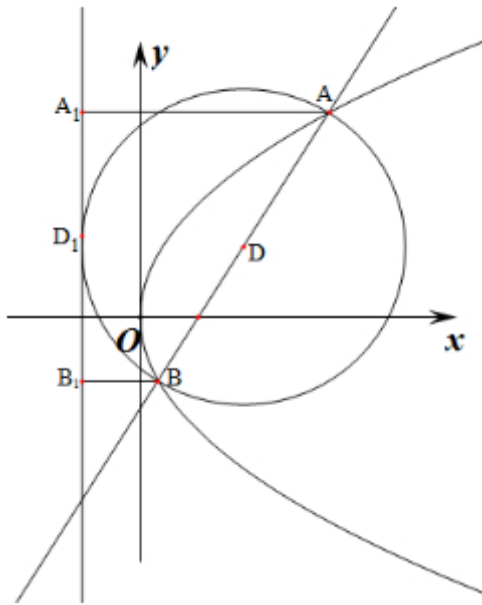
\therefore 直线 l 的方程 $y=x-1$.

(2) 求过点 A, B 且与 C 的准线相切的圆的方程.

解析: (2) 根据过 A, B 分别向准线 l 作垂线, 根据抛物线的定义即可求得半径, 根据中点坐标公式, 即可求得圆心, 求得圆的方程.

答案: (2) 过 A, B 分别向准线 $x=-1$ 作垂线, 垂足分别为 A_1, B_1 , 设 AB 的中点为 D , 过 D 作

$$DD_1 \perp \text{准线 } l, \text{ 垂足为 } D, \text{ 则 } |DD_1| = \frac{1}{2} (|AA_1| + |BB_1|),$$



由抛物线的定义可知： $|AA_1|=|AF|$ ， $|BB_1|=|BF|$ ，则 $r=|DD_1|=4$ ，
以 AB 为直径的圆与 $x=-1$ 相切，且该圆的圆心为 AB 的中点 D ，
由 (1) 可知： $x_1+x_2=6$ ， $y_1+y_2=x_1+x_2-2=4$ ，
则 $D(3, 2)$ ，
过点 A, B 且与 C 的准线相切的圆的方程 $(x-3)^2+(y-2)^2=16$ 。

21. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)$ 。

(1) 若 $a=3$ ，求 $f(x)$ 的单调区间。

解析：(1) 利用导数，求出极值点，判断导函数的符号，即可得到结果。

答案：(1) 当 $a=3$ 时， $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)$ ，

所以 $f'(x)=x^2-6x-3$ 时，令 $f'(x)=0$ 解得 $x=3\pm 2\sqrt{3}$ ，

当 $x\in(-\infty, 3-2\sqrt{3})$ ， $x\in(3+2\sqrt{3}, +\infty)$ 时， $f'(x)>0$ ，函数是增函数，

当 $x\in(3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3})$ 时， $f'(x)<0$ ，函数是单调递减，

综上， $f(x)$ 在 $(-\infty, 3-2\sqrt{3})$ ， $(3+2\sqrt{3}, +\infty)$ ，上是增函数，在 $(3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3})$ 上递减。

(2) 证明： $f(x)$ 只有一个零点。

解析：(2) 分离参数后求导，先找点确定零点的存在性，再利用单调性确定唯一性。

答案：(2) 证明：因为 $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$ ，

所以 $f(x)=0$ 等价于 $\frac{x^3}{3(x^2+x+1)} - a = 0$,

$$\text{令 } g(x) = \frac{x^3}{3(x^2+x+1)} - a,$$

则 $g'(x) = \frac{x^2[(x+1)^2+2]}{3(x^2+x+1)^2} > 0$, 仅当 $x=0$ 时, $g'(x)=0$, 所以 $g(x)$ 在 \mathbb{R} 上是增函数;

$g(x)$ 至多有一个零点, 从而 $f(x)$ 至多有一个零点.

$$\text{又因为 } f(3a-1) = -6a^2 + 2a - \frac{1}{3} = -6\left(a - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} < 0,$$

$$f(3a+1) = \frac{1}{3} > 0,$$

故 $f(x)$ 有一个零点,

综上, $f(x)$ 只有一个零点.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

[选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

22. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 4 \sin \theta \end{cases}$, (θ 为参数), 直线 l 的参数

$$\text{方程为 } \begin{cases} x = 1 + t \cos \alpha \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases}, \text{ (} t \text{ 为参数).}$$

(1) 求 C 和 l 的直角坐标方程.

解析: (1) 直接利用转换关系, 把参数方程与直角坐标方程进行转化.

$$\text{答案: (1) 曲线 } C \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = 4 \sin \theta \end{cases} \text{ (} \theta \text{ 为参数),}$$

$$\text{转换为直角坐标方程为: } \frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1.$$

$$\text{直线 } l \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = 1 + t \cos \alpha \\ y = 2 + t \sin \alpha \end{cases} \text{ (} t \text{ 为参数).}$$

$$\text{转换为直角坐标方程为: } \sin \alpha x - \cos \alpha y + 2 \cos \alpha - \sin \alpha = 0.$$

(2) 若曲线 C 截直线 l 所得线段的中点坐标为 $(1, 2)$, 求 l 的斜率.

解析: (2) 利用直线和曲线的位置关系, 在利用中点坐标求出结果.

答案：(2)把直线的参数方程代入椭圆的方程得到： $\frac{(2+t\sin\alpha)^2}{16} + \frac{(1+t\cos\alpha)^2}{4} = 1$,

整理得： $(4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)t^2 + (8\cos\alpha + 4\sin\alpha)t - 8 = 0$,

则： $t_1 + t_2 = -\frac{8\cos\alpha + 4\sin\alpha}{4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$,

由于(1, 2)为中点坐标,

所以： $\frac{t_1 + t_2}{2} = 0$,

则： $8\cos\alpha + 4\sin\alpha = 0$,

解得： $\tan\alpha = -2$,

即：直线l的斜率为-2.

[选修4-5：不等式选讲](10分)

23. 设函数 $f(x) = 5 - |x+a| - |x-2|$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集.

解析：(1)去绝对值, 化为分段函数, 求出不等式的解集即可.

答案：(1)当 $a=1$ 时, $f(x) = 5 - |x+1| - |x-2| = \begin{cases} 2x+4, & x \leq -1 \\ 2, & -1 < x < 2 \\ -2x+6, & x \geq 2 \end{cases}$.

当 $x \leq -1$ 时, $f(x) = 2x+4 \geq 0$, 解得 $-2 \leq x \leq -1$,

当 $-1 < x < 2$ 时, $f(x) = 2 \geq 0$ 恒成立, 即 $-1 < x < 2$,

当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = -2x+6 \geq 0$, 解得 $2 \leq x \leq 3$,

综上所述不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集为 $[-2, 3]$.

(2) 若 $f(x) \leq 1$, 求 a 的取值范围.

解析：(2)由题意可得 $|x+a| + |x-2| \geq 4$, 根据绝对值的几何意义即可求出

答案：(2) $\because f(x) \leq 1$,

$\therefore 5 - |x+a| - |x-2| \leq 1$,

$\therefore |x+a| + |x-2| \geq 4$,

$\therefore |x+a| + |x-2| = |x+a| + |2-x| \geq |x+a+2-x| = |a+2|$,

$\therefore |a+2| \geq 4$,

解得 $a \leq -6$ 或 $a \geq 2$,

故 a 的取值范围 $(-\infty, -6] \cup [2, +\infty)$.