2010年普通高等学校招生全国统一考试江苏卷数学全解全析

数学Ⅰ试题

> ## 注 意 事 项
>
> 考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求
>
> 1.本试卷共4页，包含填空题（第1题——第14题）、解答题（第15题——第20题）。本卷满分160分，考试时间为120分钟。考试结束后，请将本卷和答题卡一并交回。
>
> 2.答题前，请您务必将自己的姓名、准考证号用0.5毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
>
> 3.请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与您本人是否相符。
>
> 4.请在答题卡上按照晤顺序在对应的答题区域内作答，在其他位置作答一律无效。作答必须用0.5毫米黑色墨水的签字笔。请注意字体工整，笔迹清楚。
>
> 5.如需作图，须用2B铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。
>
> 6.请保持答题卡卡面清洁，不要折叠、破损。

参考公式：

锥体的体积公式: $V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$，其中S是锥体的底面积，h是高。

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共70分。请把答案填写在答题卡相应的位置上.

1、设集合A={-1,1,3}，B={a+2,a^2+4},A∩B={3}，则实数a=______▲______.

[解析] 考查集合的运算推理。3∈B, a+2=3, a=1.

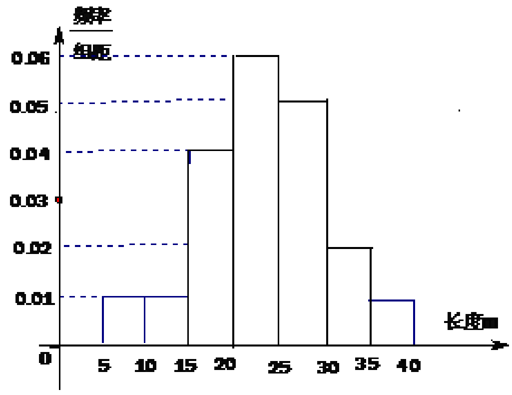
2、设复数z满足z(2-3i)=6+4i（其中i为虚数单位），则z的模为______▲______.

[解析] 考查复数运算、模的性质。z(2-3i)=2(3+2 i), 2-3i与3+2 i的模相等，z的模为2。

3、盒子中有大小相同的3只白球，1只黑球，若从中随机地摸出两只球，两只球颜色不同的概率是_▲__.

[解析]考查古典概型知识。$p=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

4、某棉纺厂为了了解一批棉花的质量，从中随机抽取了100根棉花纤维的长度（棉花纤维的长度是棉花质量的重要指标），所得数据都在区间[5,40]中，其频率分布直方图如图所示，则其抽样的100根中，有_▲___根在棉花纤维的长度小于20mm。



[解析]考查频率分布直方图的知识。

100×（0.001+0.001+0.004）×5=30

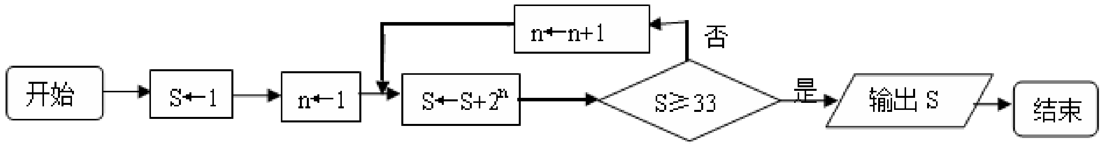
5、设函数 $f(x)=x(e^x+ae^{-x})(x\in R)$ 是偶函数，则实数 a=____▲______

[解析]考查函数的奇偶性的知识。$g(x)=e^x+ae^{-x}$ 为奇函数，由 g(0)=0，得 a=－1。

6、在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 上一点 M，点 M 的横坐标是 3，则 M 到双曲线右焦点的距离是___▲_______

[解析]考查双曲线的定义。$\frac{MF}{d}=e=\frac{4}{2}=2$，$d$ 为点 M 到右准线 $x=1$ 的距离，d =2，MF=4。

7、右图是一个算法的流程图，则输出 S 的值是______▲_______



[解析]考查流程图理解。$1+2+2^2+\cdots+2^4=31<33,$ 输出 $S=1+2+2^2+\cdots+2^5=63$。

8、函数 $y=x^2(x>0)$ 的图像在点 (a_k,a_k^2) 处的切线与 x 轴交点的横坐标为 a_{k+1},k 为正整数，a_1=16，则 $a_1+a_3+a_5$=____▲_____

[解析]考查函数的切线方程、数列的通项。

在点 (a_k,a_k^2) 处的切线方程为：$y-a_k^2=2a_k(x-a_k),$ 当 $y=0$ 时，解得 $x=\frac{a_k}{2}$，

所以 $a_{k+1}=\frac{a_k}{2}, a_1+a_3+a_5=16+4+1=21$。

9、在平面直角坐标系 xOy 中，已知圆 $x^2+y^2=4$ 上有且仅有四个点到直线 12x-5y+c=0 的距离为 1，则实数 c 的取值范围是______▲_____

[解析]考查圆与直线的位置关系。　圆半径为 2，

圆心（0，0）到直线 12x-5y+c=0 的距离小于 1，$\frac{|c|}{13}<1$，c 的取值范围是（-13，13）。

10、定义在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的函数 y=6cosx 的图像与 y=5tanx 的图像的交点为 P，过点 P 作 $PP_1\perp x$ 轴于点 P_1，直线 PP_1 与 y=sinx 的图像交于点 P_2,则线段 P_1P_2 的长为_______▲_____。

[解析] 考查三角函数的图象、数形结合思想。线段 P_1P_2 的长即为 sinx 的值，

且其中的 x 满足 6cosx=5tanx，解得 sinx=$\frac{2}{3}$。线段 P_1P_2 的长为 $\frac{2}{3}$

11、已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\ge 0\\ 1, \quad x<0\end{cases}$,则满足不等式 $f(1-x^2)>f(2x)$ 的 x 的范围是__▲___。

[解析] 考查分段函数的单调性。$\begin{cases}1-x^2>2x\\1-x^2>0\end{cases}\Rightarrow x\in(-1,\sqrt{2}-1)$

12、设实数 x,y 满足 3≤ $\boldsymbol{xy^2}$ ≤8，4≤ $\dfrac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{y}}$ ≤9，则 $\dfrac{\boldsymbol{x}^3}{\boldsymbol{y}^4}$ 的最大值是____▲_____。

[解析] 考查不等式的基本性质，等价转化思想。

$(\dfrac{x^2}{y})^2\in[16,81]$，$\dfrac{1}{xy^2}\in[\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{3}]$，$\dfrac{x^3}{y^4}=(\dfrac{x^2}{y})^2\cdot\dfrac{1}{xy^2}\in[2,27]$，$\dfrac{\boldsymbol{x}^3}{\boldsymbol{y}^4}$ 的最大值是 27。

13、在锐角三角形 ABC，A、B、C 的对边分别为 a、b、c，$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=6\cos C$，则 $\dfrac{\tan C}{\tan A}+\dfrac{\tan C}{\tan B}$=____▲_____。

[解析] 考查三角形中的正、余弦定理三角函数知识的应用，等价转化思想。一题多解。

（方法一）考虑已知条件和所求结论对于角 A、B 和边 a、b 具有轮换性。

当 A=B 或 a=b 时满足题意，此时有：$\cos C=\dfrac{1}{3}$，$\tan^2\dfrac{C}{2}=\dfrac{1-\cos C}{1+\cos C}=\dfrac{1}{2}$，$\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\tan A=\tan B=\dfrac{1}{\tan\dfrac{C}{2}}=\sqrt{2}$，$\dfrac{\tan C}{\tan A}+\dfrac{\tan C}{\tan B}=4$。

（方法二）$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=6\cos C\Rightarrow 6ab\cos C=a^2+b^2$，$6ab\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=a^2+b^2, a^2+b^2=\dfrac{3c^2}{2}$

$$\frac{\tan C}{\tan A}+\frac{\tan C}{\tan B}=\frac{\sin C}{\cos C}\cdot\frac{\cos B\sin A+\sin B\cos A}{\sin A\sin B}=\frac{\sin C}{\cos C}\cdot\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=\frac{1}{\cos C}\cdot\frac{\sin^2 C}{\sin A\sin B}$$

由正弦定理，得：上式$==\dfrac{1}{\cos C}\cdot\dfrac{c^2}{ab}=\dfrac{c^2}{\dfrac{1}{6}(a^2+b^2)}=\dfrac{c^2}{\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{3c^2}{2}}=4$

14、将边长为 1m 正三角形薄片，沿一条平行于底边的直线剪成两块，其中一块是梯形，记 $S=\dfrac{(\text{梯形的周长})^2}{\text{梯形的面积}}$，则 S 的最小值是____▲_____。

[解析] 考查函数中的建模应用，等价转化思想。一题多解。

设剪成的小正三角形的边长为x，则：$S=\dfrac{(3-x)^2}{\frac{1}{2}\cdot(x+1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(1-x)}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{(3-x)^2}{1-x^2}(0<x<1)$

（方法一）利用导数求函数最小值。

$S(x)=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{(3-x)^2}{1-x^2}$，$S'(x)=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{(2x-6)\cdot(1-x^2)-(3-x)^2\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}$

$=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{(2x-6)\cdot(1-x^2)-(3-x)^2\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{-2(3x-1)(x-3)}{(1-x^2)^2}$

$S'(x)=0,0<x<1,x=\dfrac{1}{3}$，

当$x\in(0,\dfrac{1}{3}]$时，$S'(x)<0,$递减；当$x\in[\dfrac{1}{3},1)$时，$S'(x)>0,$递增；

故当$x=\dfrac{1}{3}$时，S 的最小值是$\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$。

（方法二）利用函数的方法求最小值。

令$3-x=t,t\in(2,3),\dfrac{1}{t}\in(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2})$，则：$S=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{t^2}{-t^2+6t-8}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{-\frac{8}{t^2}+\frac{6}{t}-1}$

故当$\dfrac{1}{t}=\dfrac{3}{8},x=\dfrac{1}{3}$时，S 的最小值是$\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$。

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分，请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明或演算步骤.

15、（本小题满分 14 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，点 A(－1,－2)、B(2,3)、C(－2,－1)。

(1)求以线段 AB、AC 为邻边的平行四边形两条对角线的长；

(2)设实数 t 满足($\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{OC}$)·$\overrightarrow{OC}$=0，求 t 的值。

[解析]本小题考查平面向量的几何意义、线性运算、数量积，考查运算求解能力。满分 14 分。

（1）（方法一）由题设知$\overrightarrow{AB}=(3,5),\overrightarrow{AC}=(-1,1)$，则

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(2,6),\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=(4,4).$

所以$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{10},|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=4\sqrt{2}.$

故所求的两条对角线的长分别为$4\sqrt{2}$、$2\sqrt{10}$。

（方法二）设该平行四边形的第四个顶点为D，两条对角线的交点为E，则:

E为B、C的中点，E（0，1）

又E（0，1）为A、D的中点，所以D（1，4）

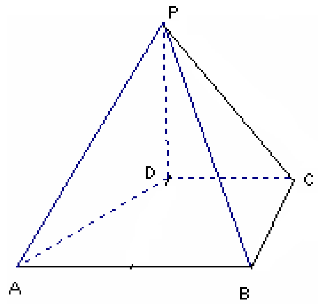
故所求的两条对角线的长分别为BC=$4\sqrt{2}$、AD=$2\sqrt{10}$；

（2）由题设知：$\overrightarrow{OC}=(-2,-1)$，$\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{OC}=(3+2t,5+t)$。

由($\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}-\boldsymbol{t}\overrightarrow{\boldsymbol{OC}}$)·$\overrightarrow{\boldsymbol{OC}}$=0，得：$(3+2t,5+t)\cdot(-2,-1)=0$，

从而$5t=-11,$ 所以$t=-\dfrac{11}{5}$。

或者：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{OC}^2$，$\overrightarrow{AB}=(3,5),\ t=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|^2}=-\dfrac{11}{5}$



16、（本小题满分14分）

如图，在四棱锥P-ABCD中，PD⊥平面ABCD，PD=DC=BC=1，AB=2，AB∥DC，∠BCD=90^0。

(1)求证：PC⊥BC;

(2)求点A到平面PBC的距离。

[解析] 本小题主要考查直线与平面、平面与平面的位置关系，考查几何体的体积，考查空间想象能力、推理论证能力和运算能力。满分14分。

（1）证明：因为PD⊥平面ABCD，BC⊂平面ABCD，所以PD⊥BC。

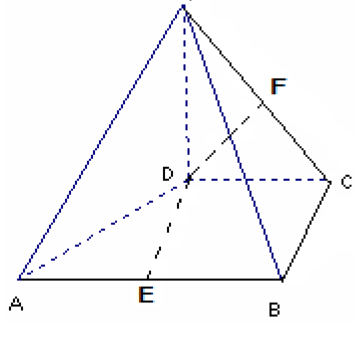
由∠BCD=90^0，得CD⊥BC，

又PD$\bigcap$DC=D，PD、DC⊂平面PCD，

所以BC⊥平面PCD。

因为PC⊂平面PCD，故PC⊥BC。

（2）（方法一）分别取AB、PC的中点E、F，连DE、DF，则：



易证DE∥CB，DE∥平面PBC，点D、E到平面PBC的距离相等。

又点A到平面PBC的距离等于E到平面PBC的距离的2倍。

由（1）知：BC⊥平面PCD，所以平面PBC⊥平面PCD于PC，

因为PD=DC，PF=FC，所以DF⊥PC，所以DF⊥平面PBC于F。

易知DF=$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故点A到平面PBC的距离等于$\sqrt{2}$。

（方法二）体积法：连结 AC。设点 A 到平面 PBC 的距离为 h。

因为 AB∥DC，∠BCD=90^0，所以∠ABC=90^0。

从而 AB=2，BC=1，得ΔABC的面积$S_{\Delta ABC}=1$。

由 PD⊥平面 ABCD 及 PD=1，得三棱锥 P-ABC 的体积$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot PD=\frac{1}{3}$。

因为 PD⊥平面 ABCD，DC⊂平面 ABCD，所以 PD⊥DC。

又 PD=DC=1，所以$PC=\sqrt{PD^2+DC^2}=\sqrt{2}$。

由 PC⊥BC，BC=1，得ΔPBC的面积$S_{\Delta PBC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

由$V_{A-PBC}=V_{P-ABC}$，$\frac{1}{3}S_{\Delta PBC}\cdot h=V=\frac{1}{3}$，得$h=\sqrt{2}$，

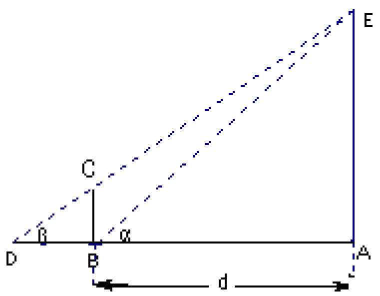
故点 A 到平面 PBC 的距离等于$\sqrt{2}$。

17、（本小题满分 14 分）

某兴趣小组测量电视塔 AE 的高度 H(单位：m)，如示意图，垂直放置的标杆 BC 的高度 h=4m，仰角∠ABE=α，∠ADE=β。

(1)该小组已经测得一组α、β的值，tanα=1.24，tanβ=1.20，请据此算出 H 的值；

(2)该小组分析若干测得的数据后，认为适当调整标杆到电视塔的距离 d（单位：m），使α与β之差较大，可以提高测量精确度。若电视塔的实际高度为 125m，试问 d 为多少时，$\alpha-\beta$最大？



[解析] 本题主要考查解三角形的知识、两角差的正切及不等式的应用。

（1）$\frac{H}{AD}=\tan\beta\Rightarrow AD=\frac{H}{\tan\beta}$，同理：$AB=\frac{H}{\tan\alpha}$，$BD=\frac{h}{\tan\beta}$。

AD—AB=DB，故得$\frac{H}{\tan\beta}-\frac{H}{\tan\alpha}=\frac{h}{\tan\beta}$，解得：$H=\frac{h\tan\alpha}{\tan\beta-\tan\alpha}=\frac{4\times1.24}{1.24-1.20}=124$。

因此，算出的电视塔的高度 H 是 124m。

（2）由题设知$d=AB$，得$\tan\alpha=\frac{H}{d},\tan\beta=\frac{H}{AD}=\frac{h}{DB}=\frac{H-h}{d}$，

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{\frac{H}{d}-\frac{H-h}{d}}{1+\frac{H}{d}\cdot\frac{H-h}{d}}=\frac{hd}{d^2+H(H-h)}=\frac{h}{d+\frac{H(H-h)}{d}}$$

$d+\frac{H(H-h)}{d}\geq 2\sqrt{H(H-h)}$，（当且仅当 $d=\sqrt{H(H-h)}=\sqrt{125\times121}=55\sqrt{5}$ 时，取等号）

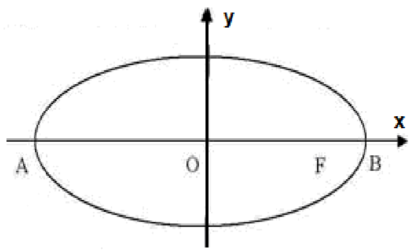
故当 $d=55\sqrt{5}$ 时，$\tan(\alpha-\beta)$ 最大。

因为 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，所以当 $d=55\sqrt{5}$ 时，α-β 最大。

故所求的 d 是 $55\sqrt{5}$ m。

18、（本小题满分 16 分）

在平面直角坐标系 xoy 中，如图，已知椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的左、右顶点为 A、B，右焦点为 F。设过点 T（t,m）的直线 TA、TB 与椭圆分别交于点 M(x_1,y_1)、$N(x_2,y_2)$，其中 m>0, $y_1>0, y_2<0$。



（1）设动点 P 满足 $PF^2-PB^2=4$，求点 P 的轨迹；

（2）设 $x_1=2, x_2=\frac{1}{3}$，求点 T 的坐标；

（3）设 $t=9$，求证：直线 MN 必过 x 轴上的一定点（其坐标与 m 无关）。

[解析] 本小题主要考查求简单曲线的方程，考查方直线与椭圆的方程等基础知识。考查运算求解能力和探究问题的能力。满分 16 分。

（1）设点 P（x，y），则：F（2，0）、B（3，0）、A（-3，0）。

由 $PF^2-PB^2=4$，得 $(x-2)^2+y^2-[(x-3)^2+y^2]=4,$ 化简得 $x=\frac{9}{2}$。

故所求点 P 的轨迹为直线 $x=\frac{9}{2}$。

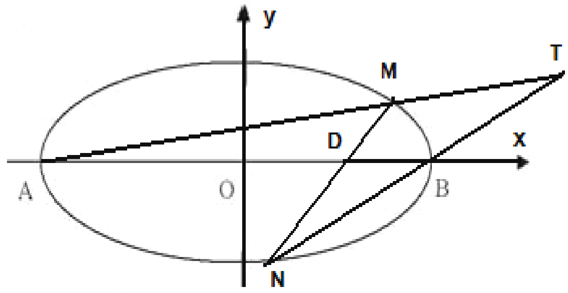
（2）将 $x_1=2, x_2=\frac{1}{3}$ 分别代入椭圆方程，以及 $y_1>0, y_2<0$ 得：M（2，$\frac{5}{3}$）、N（$\frac{1}{3}$，$-\frac{20}{9}$）

直线 MTA 方程为：$\frac{y-0}{\frac{5}{3}-0}=\frac{x+3}{2+3}$，即 $y=\frac{1}{3}x+1$，

直线 NTB 方程为：$\dfrac{y-0}{-\dfrac{20}{9}-0}=\dfrac{x-3}{\dfrac{1}{3}-3}$，即 $y=\dfrac{5}{6}x-\dfrac{5}{2}$。

联立方程组，解得：$\begin{cases}x=7\\ y=\dfrac{10}{3}\end{cases}$，

所以点 T 的坐标为 $(7,\dfrac{10}{3})$。



（3）点 T 的坐标为 $(9,m)$

直线 MTA 方程为：$\dfrac{y-0}{m-0}=\dfrac{x+3}{9+3}$，即 $y=\dfrac{m}{12}(x+3)$，

直线 NTB 方程为：$\dfrac{y-0}{m-0}=\dfrac{x-3}{9-3}$，即 $y=\dfrac{m}{6}(x-3)$。

分别与椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 联立方程组，同时考虑到 $x_1\neq -3, x_2\neq 3$，

解得：$M(\dfrac{3(80-m^2)}{80+m^2},\dfrac{40m}{80+m^2})$、$N(\dfrac{3(m^2-20)}{20+m^2},-\dfrac{20m}{20+m^2})$。

（方法一）当 $x_1\neq x_2$ 时，直线 MN 方程为：$\dfrac{y+\dfrac{20m}{20+m^2}}{\dfrac{40m}{80+m^2}+\dfrac{20m}{20+m^2}}=\dfrac{x-\dfrac{3(m^2-20)}{20+m^2}}{\dfrac{3(80-m^2)}{80+m^2}-\dfrac{3(m^2-20)}{20+m^2}}$

令 $y=0$，解得：$x=1$。此时必过点 D（1，0）；

当 $x_1=x_2$ 时，直线 MN 方程为：$x=1$，与 x 轴交点为 D（1，0）。

所以直线 MN 必过 x 轴上的一定点 D（1，0）。

（方法二）若 $x_1=x_2$，则由 $\dfrac{240-3m^2}{80+m^2}=\dfrac{3m^2-60}{20+m^2}$ 及 $m>0$，得 $m=2\sqrt{10}$，

此时直线 MN 的方程为 $x=1$，过点 D（1，0）。

若 $x_1\neq x_2$，则 $m\neq 2\sqrt{10}$，直线 MD 的斜率 $k_{MD}=\dfrac{\dfrac{40m}{80+m^2}}{\dfrac{240-3m^2}{80+m^2}-1}=\dfrac{10m}{40-m^2}$，

直线 ND 的斜率 $k_{ND}=\dfrac{\dfrac{-20m}{20+m^2}}{\dfrac{3m^2-60}{20+m^2}-1}=\dfrac{10m}{40-m^2}$，得 $k_{MD}=k_{ND}$，所以直线 MN 过 D 点。

因此，直线 MN 必过 x 轴上的点（1，0）。

19、（本小题满分 16 分）

设各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，已知$2a_2 = a_1 + a_3$，数列$\{\sqrt{S_n}\}$是公差为d的等差数列。

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式（用n, d表示）；

（2）设c为实数，对满足$m+n=3k$且$m \neq n$的任意正整数m, n, k，不等式$S_m + S_n > cS_k$都成立。求证：c的最大值为$\frac{9}{2}$。

[解析] 本小题主要考查等差数列的通项、求和以及基本不等式等有关知识，考查探索、分析及论证的能力。满分 16 分。

（1）由题意知：$d>0$，$\sqrt{S_n} = \sqrt{S_1} + (n-1)d = \sqrt{a_1} + (n-1)d$

$2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow 3a_2 = S_3 \Rightarrow 3(S_2 - S_1) = S_3$，$3[(\sqrt{a_1}+d)^2 - a_1]^2 = (\sqrt{a_1}+2d)^2$，

化简，得：$a_1 - 2\sqrt{a_1}\cdot d + d^2 = 0, \sqrt{a_1} = d, a_1 = d^2$

$\sqrt{S_n} = d + (n-1)d = nd, S_n = n^2d^2$，

当$n \geq 2$时，$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2d^2 - (n-1)^2d^2 = (2n-1)d^2$，适合$n=1$情形。

故所求$a_n = (2n-1)d^2$

（2）（方法一）

$S_m + S_n > cS_k \Rightarrow m^2d^2 + n^2d^2 > c\cdot k^2d^2 \Rightarrow m^2 + n^2 > c\cdot k^2$，　$c < \frac{m^2+n^2}{k^2}$恒成立。

又$m+n=3k$且$m \neq n$，$2(m^2+n^2) > (m+n)^2 = 9k^2 \Rightarrow \frac{m^2+n^2}{k^2} > \frac{9}{2}$，

故$c \leq \frac{9}{2}$，即c的最大值为$\frac{9}{2}$。

（方法二）由$\sqrt{a_1} = d$及$\sqrt{S_n} = \sqrt{a_1} + (n-1)d$，得$d>0$，$S_n = n^2d^2$。

于是，对满足题设的m, n, k，$m \neq n$，有

$$S_m + S_n = (m^2+n^2)d^2 > \frac{(m+n)^2}{2}d^2 = \frac{9}{2}d^2k^2 = \frac{9}{2}S_k。$$

所以c的最大值$c_{\max} \ge \frac{9}{2}$。

另一方面，任取实数$a > \frac{9}{2}$。设k为偶数，令$m = \frac{3}{2}k+1, n = \frac{3}{2}k-1$，则$m,n,k$符合条件，且$S_m + S_n = (m^2+n^2)d^2 = d^2[(\frac{3}{2}k+1)^2 + (\frac{3}{2}k-1)^2] = \frac{1}{2}d^2(9k^2+4)$。

于是，只要$9k^2+4 < 2ak^2$，即当$k > \frac{2}{\sqrt{2a-9}}$时，$S_m + S_n < \frac{1}{2}d^2 \cdot 2ak^2 = aS_k$。

所以满足条件的$c \le \frac{9}{2}$，从而$c_{\max} \le \frac{9}{2}$。

因此c的最大值为$\frac{9}{2}$。

20、（本小题满分 16 分）

设$f(x)$是定义在区间$(1,+\infty)$上的函数，其导函数为$f'(x)$。如果存在实数a和函数$h(x)$，其中$h(x)$对任意的$x \in (1,+\infty)$都有$h(x)$>0，使得$f'(x) = h(x)(x^2 - ax + 1)$，则称函数$f(x)$具有性质$P(a)$。

(1)设函数$f(x) = \ln x + \frac{b+2}{x+1} (x>1)$，其中$b$为实数。

(i)求证：函数$f(x)$具有性质$P(b)$；　(ii)求函数$f(x)$的单调区间。

(2)已知函数$g(x)$具有性质$P(2)$。给定$x_1, x_2 \in (1,+\infty), x_1 < x_2$, 设$m$为实数，

$\alpha = mx_1 + (1-m)x_2$，$\beta = (1-m)x_1 + mx_2$，且$\alpha > 1, \beta > 1$，

若$|g(\alpha) - g(\beta)| < |g(x_1) - g(x_2)|$，求$m$的取值范围。

[解析] 本小题主要考查函数的概念、性质、图象及导数等基础知识，考查灵活运用数形结合、分类讨论的思想方法进行探索、分析与解决问题的综合能力。满分 16 分。

（1）(i) $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{b+2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}(x^2 - bx + 1)$

$\because$ $x>1$时，$h(x) = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0$恒成立，

$\therefore$函数$f(x)$具有性质$P(b)$；

(ii)（方法一）设 $\varphi(x)=x^2-bx+1=(x-\frac{b}{2})^2+1-\frac{b^2}{4}$，$\varphi(x)$ 与 $f'(x)$ 的符号相同。

当 $1-\frac{b^2}{4}>0,-2<b<2$ 时，$\varphi(x)>0$，$f'(x)>0$，故此时 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上递增；

当 $b=\pm 2$ 时，对于 $x>1$，有 $f'(x)>0$，所以此时 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上递增；

当 $b<-2$ 时，$\varphi(x)$ 图像开口向上，对称轴 $x=\frac{b}{2}<-1$，而 $\varphi(0)=1$，

对于 $x>1$，总有 $\varphi(x)>0$，$f'(x)>0$，故此时 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上递增；

（方法二）当 $b\le 2$ 时，对于 $x>1$，$\varphi(x)=x^2-bx+1\ge x^2-2x+1=(x-1)^2>0$

所以 $f'(x)>0$，故此时 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上递增；

当 $b>2$ 时，$\varphi(x)$ 图像开口向上，对称轴 $x=\frac{b}{2}>1$，方程 $\varphi(x)=0$ 的两根为：

$\frac{b+\sqrt{b^2-4}}{2},\frac{b-\sqrt{b^2-4}}{2}$，而 $\frac{b+\sqrt{b^2-4}}{2}>1,\frac{b-\sqrt{b^2-4}}{2}=\frac{2}{b+\sqrt{b^2-4}}\in(0,1)$

当 $x\in(1,\frac{b+\sqrt{b^2-4}}{2})$ 时，$\varphi(x)<0$，$f'(x)<0$，故此时 $f(x)$ 在区间 $(1,\frac{b+\sqrt{b^2-4}}{2})$

上递减；同理得：$f(x)$ 在区间 $[\frac{b+\sqrt{b^2-4}}{2},+\infty)$ 上递增。

综上所述，当 $b\le 2$ 时，$f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上递增；

当 $b>2$ 时，$f(x)$ 在 $(1,\frac{b+\sqrt{b^2-4}}{2})$ 上递减；$f(x)$ 在 $[\frac{b+\sqrt{b^2-4}}{2},+\infty)$ 上递增。

(2)（方法一）由题意，得：$g'(x)=h(x)(x^2-2x+1)=h(x)(x-1)^2$

又 $h(x)$ 对任意的 $x\in(1,+\infty)$ 都有 $h(x)$ >0，

所以对任意的 $x\in(1,+\infty)$ 都有 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增。

又 $\alpha+\beta=x_1+x_2,\alpha-\beta=(2m-1)(x_1-x_2)$。

当 $m>\frac{1}{2},m\ne 1$ 时，$\alpha<\beta$，且 $\alpha-x_1=(m-1)x_1+(1-m)x_2,\beta-x_2=(1-m)x_1+(m-1)x_2$，

$\therefore(\alpha-x_1)(\beta-x_2)=-(m-1)^2(x_1-x_2)^2<0$，$\therefore \alpha<x_1<x_2<\beta$ 或 $x_1<\alpha<\beta<x_2$，

若 $\alpha<x_1<x_2<\beta$，则 $f(\alpha)<f(x_1)<f(x_2)<f(\beta)$，

$\therefore |g(\alpha)-g(\beta)|>g(x_1)-g(x_2)|$,不合题意。 $\therefore x_1<\alpha<\beta<x_2$,

即$\begin{cases}x_1<mx_1+(1-m)x_2\\(1-m)x_1+mx_2<x_2\end{cases}$,解得$m<1$, $\therefore \frac{1}{2}<m<1$。

当$m=\frac{1}{2}$时, $\alpha=\beta$, $0=|g(\alpha)-g(\beta)|<|g(x_1)-g(x_2)|$,符合题意。

当$m<\frac{1}{2}$时, $\alpha>\beta$,且$\alpha-x_2=m(x_1-x_2),\beta-x_1=-m(x_1-x_2)$,

同理有$x_1<\beta<\alpha<x_2$,即$\begin{cases}x_1<(1-m)x_1+mx_2\\mx_1+(1-m)x_2<x_2\end{cases}$,解得$m>0$,$\therefore 0<m<\frac{1}{2}$,

综合以上讨论,得:所求m的取值范围是(0,1)。

(方法二)由题设知,$g(x)$的导函数$g'(x)=h(x)(x^2-2x+1)$,其中函数$h(x)>0$对于任意的$x\in(1,+\infty)$都成立。所以,当$x>1$时,$g'(x)=h(x)(x-1)^2>0$,从而$g(x)$在区间$(1,+\infty)$上单调递增。

①当$m\in(0,1)$时,有$\alpha=mx_1+(1-m)x_2>mx_1+(1-m)x_1=x_1$,

$\alpha=mx_1+(1-m)x_2<mx_2+(1-m)x_2=x_2$,得$\alpha\in(x_1,x_2)$,同理可得$\beta\in(x_1,x_2)$,所以由$g(x)$的单调性知$g(\alpha)$、$g(\beta)\in(g(x_1),g(x_2))$,

从而有$|g(\alpha)-g(\beta)|<|g(x_1)-g(x_2)|$,符合题设。

②当$m\le 0$时, $\alpha=mx_1+(1-m)x_2\ge mx_2+(1-m)x_2=x_2$,

$\beta=(1-m)x_1+mx_2\le(1-m)x_1+mx_1=x_1$, 于是由$\alpha>1,\beta>1$及$g(x)$的单调性知$g(\beta)\le g(x_1)<g(x_2)\le g(\alpha)$,所以$|g(\alpha)-g(\beta)|\geqslant|g(x_1)-g(x_2)|$,与题设不符。

③当$m\ge 1$时,同理可得$\alpha\le x_1,\beta\ge x_2$,进而得$|g(\alpha)-g(\beta)|\geqslant|g(x_1)-g(x_2)|$,与题设不符。

因此综合①、②、③得所求的m的取值范围是(0,1)。

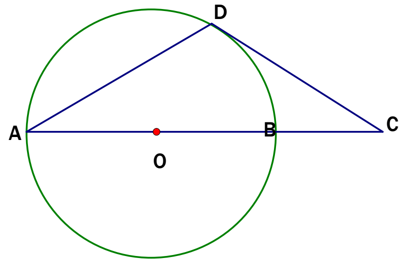
数学Ⅱ(附加题)

21.**[选做题]**本题包括 A、B、C、D 四小题,**请选定其中两题,并在相应的答题区域内作答。**

若多做，则按作答的前两题评分。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

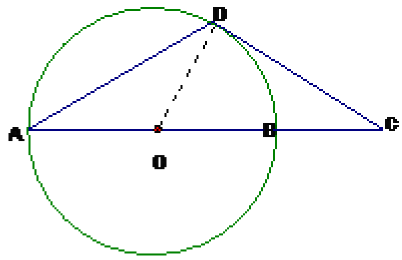
A． 选修 4-1：几何证明选讲

（本小题满分 10 分）



AB 是圆 O 的直径，D 为圆 O 上一点，过 D 作圆 O 的切线交 AB 延长线于点 C，若 DA=DC，求证：AB=2BC。

[解析] 本题主要考查三角形、圆的有关知识，考查推理论证能力。



（方法一）证明：连结 OD，则：OD⊥DC，

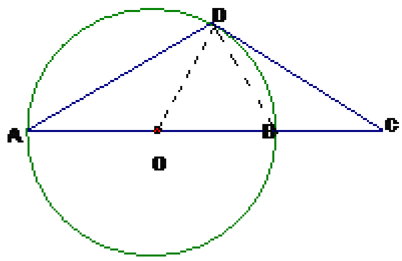
又 OA=OD，DA=DC，所以∠DAO=∠ODA=∠DCO，

∠DOC=∠DAO+∠ODA=2∠DCO，

所以∠DCO=30^0，∠DOC=60^0，

所以 OC=2OD，即 OB=BC=OD=OA，所以 AB=2BC。

（方法二）证明：连结 OD、BD。



因为 AB 是圆 O 的直径，所以∠ADB=90^0，AB=2 OB。

因为 DC 是圆 O 的切线，所以∠CDO=90^0。

又因为 DA=DC，所以∠DAC=∠DCA，

于是△ADB≌△CDO，从而 AB=CO。

即 2OB=OB+BC，得 OB=BC。

故 AB=2BC。

B．选修 4-2：矩阵与变换

（本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A(0,0)，B(-2,0)，C(-2,1)。设 k 为非零实数，矩阵 M=$\begin{bmatrix} \boldsymbol{k} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,N=$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，点 A、B、C 在矩阵 MN 对应的变换下得到点分别为 A_1、B_1、C_1，$\triangle A_1B_1C_1$ 的面积是△ABC 面积的 2 倍，求 k 的值。

[解析] 本题主要考查图形在矩阵对应的变换下的变化特点，考查运算求解能力。满分 10 分。

解：由题设得 $MN = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

由$\begin{bmatrix}0 & k\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2 & -2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & k\\0 & -2 & -2\end{bmatrix}$，可知 A_1（0，0）、B_1（0，-2）、C_1（k，-2）。

计算得△ABC 面积的面积是 1，△$A_1B_1C_1$ 的面积是$|k|$，则由题设知：$|k|=2\times1=2$。

所以 k 的值为 2 或-2。

C．选修 4-4：坐标系与参数方程

（本小题满分 10 分）

在极坐标系中，已知圆 ρ=2cos θ 与直线 3ρcos θ+4ρsin θ+a=0 相切，求实数 a 的值。

[解析] 本题主要考查曲线的极坐标方程等基本知识，考查转化问题的能力。满分 10 分。

解：$\rho^2=2\rho\cos\theta$，圆 ρ=2cos θ 的普通方程为：$x^2+y^2=2x,(x-1)^2+y^2=1$，

直线 3ρcos θ+4ρsin θ+a=0 的普通方程为：$3x+4y+a=0$，

又圆与直线相切，所以$\dfrac{|3\cdot1+4\cdot0+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1,$解得：$a=2$，或$a=-8$。

D． 选修 4-5：不等式选讲

（本小题满分 10 分）

设 a、b 是非负实数，求证：$a^3+b^3\geq\sqrt{ab}(a^2+b^2)$。

[解析] 本题主要考查证明不等式的基本方法，考查推理论证的能力。满分 10 分。

（方法一）证明：$a^3+b^3-\sqrt{ab}(a^2+b^2)=a^2\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})+b^2\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})[(\sqrt{a})^5-(\sqrt{b})^5]$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2[(\sqrt{a})^4+(\sqrt{a})^3(\sqrt{b})+(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2+(\sqrt{a})(\sqrt{b})^3+(\sqrt{b})^4]$

因为实数 a、b⩾0，$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq0,[(\sqrt{a})^4+(\sqrt{a})^3(\sqrt{b})+(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2+(\sqrt{a})(\sqrt{b})^3+(\sqrt{b})^4]\geq0$

所以上式⩾0。即有$a^3+b^3\geq\sqrt{ab}(a^2+b^2)$。

（方法二）证明：由 a、b 是非负实数，作差得

$a^3+b^3-\sqrt{ab}(a^2+b^2)=a^2\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})+b^2\sqrt{b}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})[(\sqrt{a})^5-(\sqrt{b})^5]$

当 $a \ge b$ 时，$\sqrt{a} \ge \sqrt{b}$，从而 $(\sqrt{a})^5 \ge (\sqrt{b})^5$，得 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})[(\sqrt{a})^5-(\sqrt{b})^5] \ge 0$；

当 $a < b$ 时，$\sqrt{a} < \sqrt{b}$，从而 $(\sqrt{a})^5 < (\sqrt{b})^5$，得 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})[(\sqrt{a})^5-(\sqrt{b})^5] < 0$；

所以 $a^3+b^3 \ge \sqrt{ab}(a^2+b^2)$。

[必做题]第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

22、（本小题满分 10 分）

某工厂生产甲、乙两种产品，甲产品的一等品率为 80%，二等品率为 20%；乙产品的一等品率为 90%，二等品率为 10%。生产 1 件甲产品，若是一等品则获得利润 4 万元，若是二等品则亏损 1 万元；生产 1 件乙产品，若是一等品则获得利润 6 万元，若是二等品则亏损 2 万元。设生产各种产品相互独立。

（1）记 X（单位：万元）为生产 1 件甲产品和 1 件乙产品可获得的总利润，求 X 的分布列；

（2）求生产 4 件甲产品所获得的利润不少于 10 万元的概率。

[解析] 本题主要考查概率的有关知识，考查运算求解能力。满分 10 分。

解：（1）由题设知，X 的可能取值为 10，5，2，-3，且

P（X=10）=0.8×0.9=0.72，　　P（X=5）=0.2×0.9=0.18，

P（X=2）=0.8×0.1=0.08，　　P（X=-3）=0.2×0.1=0.02。

由此得 X 的分布列为：

X	10	5	2	-3
P	0.72	0.18	0.08	0.02

（2）设生产的 4 件甲产品中一等品有 n 件，则二等品有 $4-n$ 件。

由题设知 $4n-(4-n) \ge 10$，解得 $n \ge \frac{14}{5}$，

又 $n \in N$，得 $n=3$，或 $n=4$。

所求概率为 $P = C_4^3 \times 0.8^3 \times 0.2 + 0.8^4 = 0.8192$

答：生产 4 件甲产品所获得的利润不少于 10 万元的概率为 0.8192。

23、（本小题满分 10 分）

已知△ABC 的三边长都是有理数。

（1）求证 cosA 是有理数；（2）求证：对任意正整数 n，cosnA 是有理数。

[解析] 本题主要考查余弦定理、数学归纳法等基础知识，考查推理论证的能力与分析问题、解决问题的能力。满分 10 分。

（方法一）（1）证明：设三边长分别为a,b,c，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\because a,b,c$是有理数，

$b^2+c^2-a^2$是有理数，分母$2bc$为正有理数，又有理数集对于除法的具有封闭性，

$\therefore \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$必为有理数，∴cosA 是有理数。

（2）①当$n=1$时，显然 cosA 是有理数；

当$n=2$时，$\because \cos 2A=2\cos^2 A-1$，因为 cosA 是有理数，$\therefore \cos 2A$也是有理数；

②假设当$n\le k(k\ge 2)$时，结论成立，即 coskA、$\cos(k-1)A$均是有理数。

当$n=k+1$时，$\cos(k+1)A=\cos kA\cos A-\sin kA\sin A$，

$$\cos(k+1)A=\cos kA\cos A-\frac{1}{2}[\cos(kA-A)-\cos(kA+A)],$$

$$\cos(k+1)A=\cos kA\cos A-\frac{1}{2}\cos(k-1)A+\frac{1}{2}\cos(k+1)A,$$

解得：$\cos(k+1)A=2\cos kA\cos A-\cos(k-1)A$

∵cosA，$\cos kA$，$\cos(k-1)A$均是有理数，$\therefore 2\cos kA\cos A-\cos(k-1)A$是有理数，

$\therefore \cos(k+1)A$是有理数。

即当$n=k+1$时，结论成立。

综上所述，对于任意正整数 n，cosnA 是有理数。

（方法二）证明：（1）由 AB、BC、AC 为有理数及余弦定理知

$\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$是有理数。

（2）用数学归纳法证明 cosnA 和$\sin A\cdot\sin nA$都是有理数。

①当$n=1$时，由（1）知$\cos A$是有理数，从而有$\sin A\cdot\sin A=1-\cos^2 A$也是有理数。

②假设当$n=k(k\ge 1)$时，$\cos kA$和$\sin A\cdot\sin kA$都是有理数。

当$n=k+1$时，由$\cos(k+1)A=\cos A\cdot\cos kA-\sin A\cdot\sin kA$，

$\sin A\cdot\sin(k+1)A=\sin A\cdot(\sin A\cdot\cos kA+\cos A\cdot\sin kA)=(\sin A\cdot\sin A)\cdot\cos kA+(\sin A\cdot\sin kA)\cdot\cos A$，

及①和归纳假设，知$\cos(k+1)A$和$\sin A\cdot\sin(k+1)A$都是有理数。

即当$n=k+1$时，结论成立。

综合①、②可知，对任意正整数 n，cosnA 是有理数。