2017年福建省高考模拟数学文

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知复数z=m+2i，且(2+i)z是纯虚数，则实数m=(　)

A.1

B.2

C.-1

D.-2

解析：把复数z=m+2i代入(2+i)z，然后利用复数代数形式的乘法运算化简，再由已知条件列出方程组，求解可得答案.

∵(2+i)z=(2+i)(m+2i)=2m+4i+mi+2i^2=(2m-2)+(m+4)i为纯虚数，

∴$\begin{cases} 2m+2=0 \\ m+4\neq 0 \end{cases}$，

解得m=1.

答案：A.

2.若公差为2的等差数列{a_n}的前9项和为81，则a_9=(　)

A.1

B.9

C.17

D.19

解析：利用等差数列前n项和公式求出首项，由此能求出第9项.

∵公差为2的等差数列{a_n}的前9项和为81，

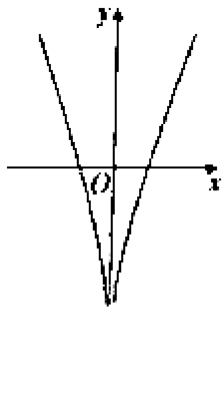
∴$S_9=9a_1+\dfrac{9\times 8}{2}\times 2=81$，

解得a_1=1，

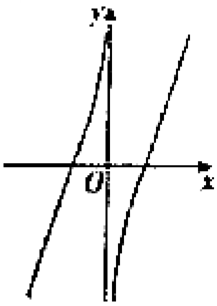
∴a_9=1+(9-1)×2=17.

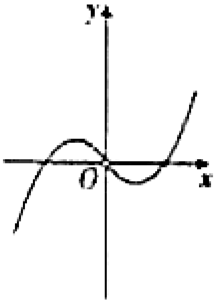
答案：C.

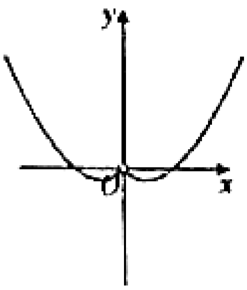
3.函数y=x^2+ln|x|的图象大致为(　)



A.

B. 

C. 

D. 

解析：先求出函数为偶函数，再根据函数值的变化趋势或函数的单调性即可判断.

∵$f(-x)=x^2+\ln|x|=f(x)$，

∴$y=f(x)$为偶函数，

∴$y=f(x)$的图象关于 y 轴对称，故排除 B，C，

当 $x\to 0$ 时，$y\to -\infty$，故排除 D，

或者根据，当 $x>0$ 时，$y=x^2+\ln x$ 为增函数，故排除 D，

答案：A.

4.已知集合 $A=\{a，1\}$，$B=\{a^2，0\}$，那么“$a=-1$”是“$A\cap B\neq\varnothing$”的(　)

A.充分而不必要条件

B.必要而不充分条件

C.充分必要条件

D.既不充分也不必要条件

解析：根据集合交集的定义结合充分条件和必要条件的定义进行判断.

当 $a=-1$ 时，$A=\{-1，1\}$，$B=\{1，0\}$，则 $A\cap B=\{1\}\neq\varnothing$成立，即充分性成立，

若 $A\cap B\neq\varnothing$，则 $a^2=1$ 或 $a^2=a$，即 $a=1$ 或 $a=-1$ 或 $a=0$，

当 $a=1$ 时，$A=\{1，1\}$不成立，

当 $a=-1$ 时，$A=\{-1，1\}$，$B=\{1，0\}$，则 $A\cap B=\{1\}\neq\varnothing$成立，

当 $a=0$ 时，$B=\{0，0\}$不成立，综上 $a=-1$，

即“$a=-1$”是“$A\cap B\neq\varnothing$”的充要条件.

答案：C.

5.当生物死亡后，其体内原有的碳14的含量大约每经过5730年衰减为原来的一半，这个时间称为“半衰期”.当死亡生物体内的碳14含量不足死亡前的千分之一时，用一般的放射性探测器就测不到了.若某死亡生物体内的碳14用该放射性探测器探测不到，则它经过的“半衰期”个数至少是(　)

A.8

B.9

C.10

D.11

解析：设死亡生物体内原有的碳14含量为1，则经过n个“半衰期”后的含量为$(\frac{1}{2})^n$，

由$(\frac{1}{2})^n<\frac{1}{1000}$得：$n\geqslant 10$

所以，若探测不到碳14含量，至少需要经过10个“半衰期”.

答案：C.

6.已知三棱锥P-ABC的三条侧棱两两互相垂直，且$AB=\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{7}$，AC=2，则此三棱锥的外接球的体积为(　)

A.$\frac{8}{3}\pi$

B.$\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$

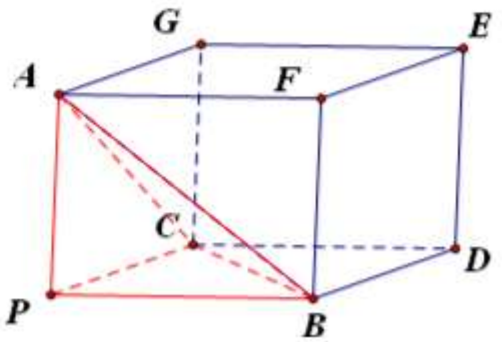
C.$\frac{16}{3}\pi$

D.$\frac{32}{3}\pi$

解析：∵$AB=\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{7}$，AC=2，

∴PA=1，$PC=\sqrt{3}$，PB=2

以PA、PB、PC为过同一顶点的三条棱，作长方体如图：



则长方体的外接球同时也是三棱锥P-ABC外接球.

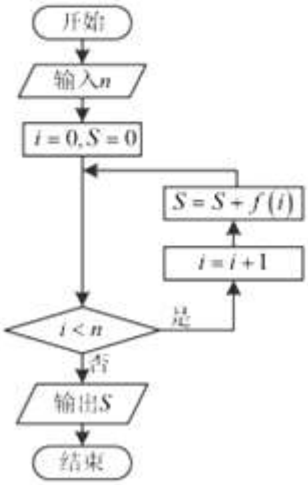
∵长方体的对角线长为$\sqrt{1+3+4}=2\sqrt{2}$，

∴球直径为 2$\sqrt{2}$，半径 R=$\sqrt{2}$，

因此，三棱锥 P-ABC 外接球的体积是$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\sqrt{2}\right)^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$.

答案：B.

7.执行如图所示的程序框图，若输入 n=2017，输出 S 的值为 0，则 f(x)的解析式可以是(　)



A. f(x)=sin($\frac{\pi}{3}$x)

B. f(x)=sin($\frac{\pi}{2}$x)

C. f(x)=cos($\frac{\pi}{3}$x)

D. f(x)=cos($\frac{\pi}{2}$x)

解析：模拟程序的运行，可得程序框图的功能是计算并输出 S=f(1)+f(2)+…+f(2017)的值，
由于 S=f(1)+f(2)+…+f(2017)=0，

观察四个选项，相位为$\frac{\pi}{3}$x 的三角函数的最小正周期为$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}$=6：

对于选项 A：

S=f(1)+f(2)+…+f(2017)=336(f(1)+f(2)+…++f(6))+f(2017)=f(2017)=f(1)=sin$\frac{\pi}{3}\neq$0，

故排除.

选项 C：

S=f(1)+f(2)+…+f(2017)=336(f(1)+f(2)+…++f(6))+f(2017)=f(2017)=f(1)=cos$\frac{\pi}{3}\neq$0，

故排除.

由于，相位为$\frac{\pi}{2}$x的三角函数的最小正周期为$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}$=4；

选项B：

S=f(1)+f(2)+…+f(2017)=504(f(1)+f(2)+…++f(4))+f(2017)=f(2017)=f(1)=sin$\frac{\pi}{2}\neq 0$，

故排除.

选项D：

S=f(1)+f(2)+…+f(2017)=504(f(1)+f(2)+…++f(4))+f(2017)=f(2017)=f(1)=cos$\frac{\pi}{2}$=0，

故正确.

答案：D.

8.已知函效f(x)=$\begin{cases} x-sinx，x<0 \\ x^3+1，x\geq 0 \end{cases}$，则下列结论正确的是( )

A.f(x)有极值

B.f(x)有零点

C.f(x)是奇函数

D.f(x)是增函数

解析：当x<0时，f(x)=x-sinx，

∴f′(x)=1-cosx≥0恒成立，

∴f(x)在(-∞，0)上为增函数，

∴f(x)<f(0)=0，

当x≥0时，f(x)=x^3+1，函数为增函数，

∴f(x)≥f(0)=1，

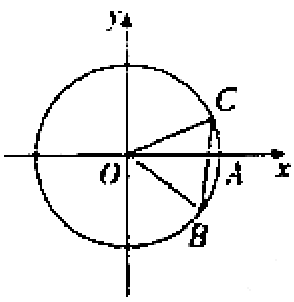
综上所述f(x)是增函数，函数无极值，无零点，

∵f(-x)≠-f(x)，f(-x)≠f(x)，

∴函数为非奇非偶函数，

答案：D

9.如图，⊙O与x轴的正半轴交点为A，点B，C在⊙O上，且B($\frac{4}{5}$，$-\frac{3}{5}$)，点C在第一象限，∠AOC=α，BC=1，则cos($\frac{5\pi}{6}$-α)=( )



A. $-\dfrac{4}{5}$

B. $-\dfrac{3}{5}$

C. $\dfrac{3}{5}$

D. $\dfrac{4}{5}$

解析：如图，B($\dfrac{4}{5}$，$-\dfrac{3}{5}$)，得 OB=OC=1，又 BC=1，

∴∠BOC=$\dfrac{\pi}{3}$，∠AOB=$\dfrac{\pi}{3}$－α，由直角三角形中的三角函数的定义可得 sin($\dfrac{\pi}{3}$－α)=sin∠AOB=$\dfrac{3}{5}$，cos∠AOB=$\dfrac{4}{5}$，

∴sinα=sin($\dfrac{\pi}{3}$-∠AOB)=sin$\dfrac{\pi}{3}$cos∠AOB-cos$\dfrac{\pi}{3}$sin∠AOB$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$，

cosα=cos($\dfrac{\pi}{3}$-∠AOB)=cos$\dfrac{\pi}{3}$cos∠AOB+sin$\dfrac{\pi}{3}$sin∠AOB$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

∴cos($\dfrac{5\pi}{6}$－α)=cos$\dfrac{5\pi}{6}$cosα+sin$\dfrac{5\pi}{6}$sinα$=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{4+3\sqrt{3}}{10}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}=-\dfrac{3}{5}$.

答案：B.

10.已知直线 l 过点 A(-1，0)且与⊙B：$x^2+y^2-2x=0$ 相切于点 D，以坐标轴为对称轴的双曲线 E 过点 D，一条渐进线平行于 l，则 E 的方程为(　)

A. $\dfrac{3y^2}{4}-\dfrac{x^2}{4}=1$

B. $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{3y^2}{2}=1$

C. $\dfrac{5y^2}{3}-x^2=1$

D. $\dfrac{3y^2}{2}-\dfrac{x^2}{2}=1$

解析：可设直线 l：y=k(x+1)，

⊙B：$x^2+y^2-2x=0$ 的圆心为(1，0)，半径为 1，

由相切的条件可得，$d=\dfrac{|k+k-0|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，

解得 k=$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

直线 l 的方程为 y=$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$(x+1)，

联立 $x^2+y^2-2x=0$，解得 x=$\dfrac{1}{2}$，y=$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

即 D($\dfrac{1}{2}$，$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$)，

由题意可得渐近线方程为 y=$\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$x，

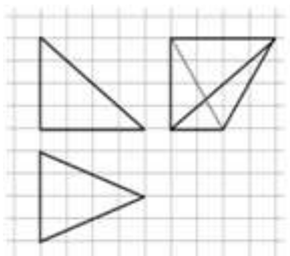
设双曲线的方程为 $y^2-\dfrac{1}{3}x^2=m(m\neq0)$，

代入 D 的坐标，可得 $m=\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{2}{3}$.

则双曲线的方程为 $\dfrac{3y^2}{2}-\dfrac{x^2}{2}=1$.

答案：D.

11.如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗线画出的是某几何体的三视图，则该几何体最长的棱长为( )



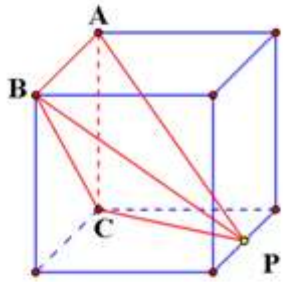
A.4$\sqrt{3}$

B.4$\sqrt{2}$

C.6

D.2$\sqrt{5}$

解析：根据几何体的三视图还原几何体形状，求出各棱的长度，比较后，可得答案.
利用“三线交汇得顶点”的方法，该几何体位三棱锥 P-ABC，如图所示：



其中，正方体棱长为4，点P是正方体其中一条棱的中点，

则：AB=AC=4，$PC=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，$BC=4\sqrt{2}AP=BP=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6$，

所以最长棱为6.

答案：C

12.已知函数f(x)=x(a-e^{-x})，曲线y=f(x)上存在不同的两点，使得曲线在这两点处的切线都与y轴垂直，则实数a的取值范围是(　)

A.($-e^2$，+∞)

B.($-e^2$，0)

C.($-e^{-2}$，+∞)

D.($-e^{-2}$，0)

解析：∵曲线y=f(x)上存在不同的两点，使得曲线在这两点处的切线都与y轴垂直，

∴f′(x)=a+(x-1)e^{-x}=0有两个不同的解，即得a=(1-x)e^{-x}有两个不同的解，

设y=(1-x)e^{-x}，则y′=(x-2)e^{-x}，∴x＜2，y′＜0，x＞2，y′＞0

∴x=2时，函数取得极小值$-e^{-2}$，

∴0＞a＞$-e^{-2}$.

答案：D.

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分

13.设向量$\vec{a}$=(1，$\sqrt{3}$)，$\vec{b}$=(m，$\sqrt{3}$)，且$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，则m=_____.

解析：根据平面向量的数量积，列出方程，即可求出m的值.

向量$\vec{a}$=(1，$\sqrt{3}$)，$\vec{b}$=(m，$\sqrt{3}$)，且$\vec{a}$，$\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，

则|$\vec{a}$|=2，|$\vec{b}$|=$\sqrt{m^2+3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}$=m+3，

根据公式$\vec{a}\cdot\vec{b}$=|$\vec{a}$||$\vec{b}$|cos＜$\vec{a}$，$\vec{b}$＞得：

m+3=2$\sqrt{m^2+3}\times\frac{1}{2}$，

解得m=-1.

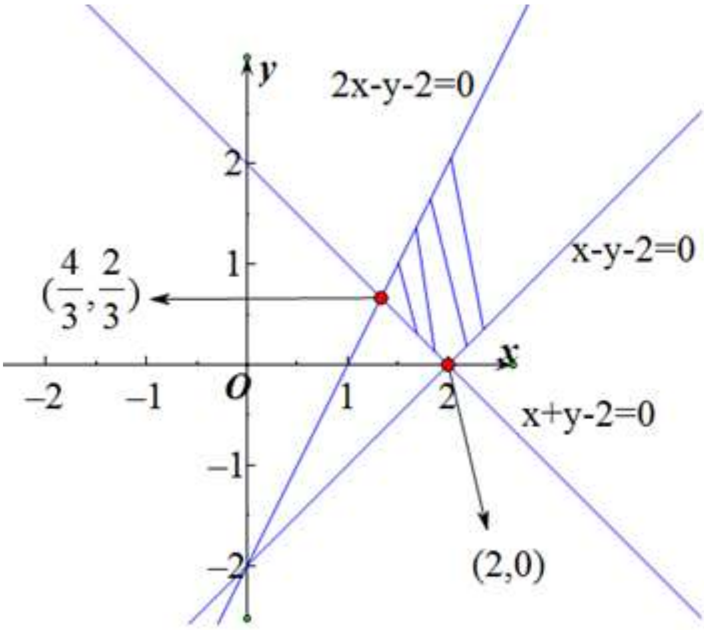
答案：-1.

14.若 x，y 满足约束条件$\begin{cases} x+y-2\ge 0 \\ x-y-2\le 0 \\ 2x-y-2\ge 0 \end{cases}$，则 z=x+2y 的最小值为_____.

解析：因为线性约束条件所决定的可行域为非封闭区域且目标函数为线性的，
最值一定在边界点处取得.

分别将点($\frac{4}{3}$，$\frac{2}{3}$)，(2，0)代入目标函数，

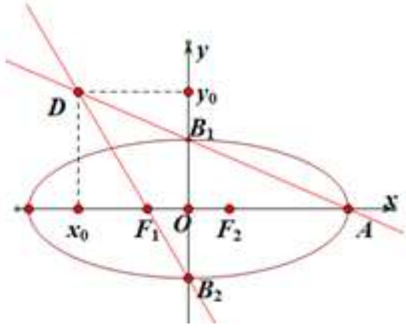
求得：$z_1=\frac{4}{3}+2\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$，$z_2=2+2\times 0=0$，所以最小值为 2.



答案：2.

15.椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞b＞0)的左、右焦点分别为 F_1，F_2，上、下顶点分别为 B_1，B_2，右顶点为 A，直线 AB_1 与 B_2F_1 交于点 D.若 $2|AB_1|=3|B_1D|$，则 C 的离心率等于_____.

解析：如图所示：



设 D(x_0，y_0)，由 $2|AB_1|=3|B_1D|$，得：$\frac{|AB_1|}{|AD|}=\frac{3}{5}$，

根据三角形相似得：$\frac{a}{a-x_0}=\frac{3}{5}=\frac{b}{y_0}$，求得：$x_0=-\frac{2}{3}a$，$y_0=\frac{5}{3}b$，

又直线 B_2F_1 的方程为 $\frac{x}{-c}+\frac{y}{-b}=1$，

将点 D($-\frac{2}{3}$a，$\frac{5}{3}$b)代入，得：$\frac{-\frac{2}{3}a}{-c}+\frac{\frac{5}{3}b}{-b}=1$，$\frac{2}{3e}=1+\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$，

$\therefore e=\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$.

答案：$\frac{1}{4}$.

16.已知函数 f(x)=sin(ωx+$\frac{\pi}{4}$)(ω＞0)在($\frac{\pi}{12}$，$\frac{\pi}{3}$)上有最大值，但没有最小值，则ω的取值范围是________.

解析：要求函数 f(x)=sin(ωx+$\frac{\pi}{4}$)(ω＞0)在($\frac{\pi}{12}$，$\frac{\pi}{3}$)上有最大值，但没有最小值，

$\therefore \omega g\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}<\omega g\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}$，

解之即可得：ω∈($\frac{3}{4}$，3).

答案：($\frac{3}{4}$，3).

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

17.△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，2bcosC-c=2a.

(Ⅰ)求 B 的大小.

解析：(Ⅰ)由余弦定理化简已知等式可得：$a^2+c^2-b^2=-ac$，进而可求 cosB=$-\frac{1}{2}$，结合范围 B∈(0，π)，可求 B 的值.

答案：(Ⅰ)∵2bcosC-c=2a，

∴由余弦定理可得：$2bg\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-c=2a$，

∴化简可得：$a^2+c^2-b^2=-ac$，

$\therefore \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{1}{2}$，

∵B∈(0，π)，

∴B=$\frac{2\pi}{3}$.

(Ⅱ)若 a=3，且 AC 边上的中线长为$\frac{\sqrt{19}}{2}$，求 c 的值.

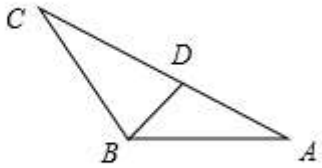
解析：(Ⅱ)由(Ⅰ)可得：$b^2=a^2+c^2+ac=c^2+3c+9$，取 AC 中点 D，连接 BD，由余弦定理可求

$\cos C=\frac{a^2+\frac{b^2}{4}-\frac{19}{4}}{ab}$，整理可得$9+b^2-c^2=2\left(9+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}\right)$，联立即可解得 c 的值.

答案：(Ⅱ)由(Ⅰ)可得：$b^2=a^2+c^2+ac=c^2+3c+9$，①

又∵$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

取 AC 中点 D，连接 BD，



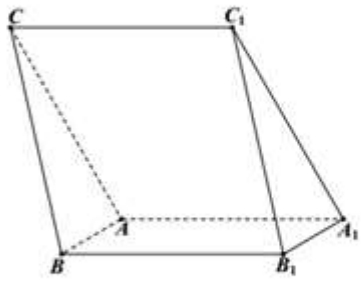
在△CBD 中，$\cos C=\frac{BC^2+CD^2-BD^2}{2BC\cdot CD}=\frac{a^2+\frac{b^2}{4}-\frac{19}{4}}{ab}$，

$\therefore 9+b^2-c^2=2\left(9+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}\right)$，②

把①代入②，化简可得：$c^2-3c-10=0$，

解得：c=5 或 c=-2(舍去)，可得：c=5.

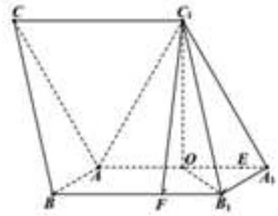
18.如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 ACC_1A_1⊥侧面 ABB_1A_1，$\angle B_1A_1A=\angle C_1A_1A=60°$，$AA_1=AC=4$，AB=1.



(Ⅰ)求证：$A_1B_1\perp B_1C_1$.

解析：(Ⅰ)取 AA_1 中点 O，连结 OC_1，AC_1，推导出 $OC_1\perp AA_1$，$OC_1\perp A_1B_1$，$A_1B_1\perp OB_1$，从而 A_1B_1⊥平面 OB_1C_1，由此能证明 $A_1B_1\perp B_1C_1$.

答案：(Ⅰ)证明：取 AA_1 中点 O，连结 OC_1，AC_1，OB_1，



∵$AA_1=AC=A_1C_1=4$，$\angle C_1A_1A=60°$，∴$\triangle AC_1A_1$为正三角形，

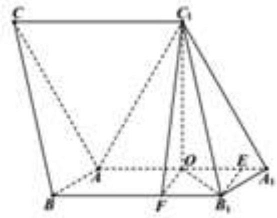
∴$OC_1\perp AA_1$，$OC_1=2\sqrt{3}$，

又侧面 $ACC_1A_1\perp$侧面 ABB_1A_1，面 $ACC_1A_1\cap$面 $ABB_1A_1=AA_1$，$OC_1\subset$面 ACC_1A_1，
∴$OC_1\perp$平面 ABB_1A_1，
又 $A_1B_1\subset$平面 ABB_1A_1，∴$OC_1\perp A_1B_1$，
在$\triangle OA_1B_1$中，∵$\angle OA_1B_1=60°$，$A_1B_1=AB=1$，$OA_1=2$，

∴$OB_1^2=1+4-2\times1\times2\times\cos60°=3$，解得 $OB_1=\sqrt{3}$，

∴$OA_1^2=OB_12+A_1B_1^2$，∴$A_1B_1\perp OB_1$，
又 $OB_1\cap OC_1=O$，$OB_1\subset$平面 OB_1C_1，$OC_1\subset$平面 OB_1C_1，
∴$A_1B_1\perp$平面 OB_1C_1，
∵$B_1C_1\subset$平面 OB_1C_1，∴$A_1B_1\perp B_1C_1$.

(II)求三棱锥 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面积.
解析：(II)在平行四边形 ABB_1A_1 中，过 B_1 作 $B_1E\perp1$ 于点 E，过 O 作 $OF\perp BB_1$ 于点 F，则 OFB_1E 为矩形推导出 $BB_1\perp OC_1$，$C_1F\perp BB_1$，由此能求出三棱锥 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面积.
答案：(II)依题意，$S_{ABB_1A_1}=2\times\frac{1}{2}\times A_1B_1\times AA_1\times\sin60°=8\sqrt{3}$，
在平行四边形 ABB_1A_1 中，过 B_1 作 $B_1E\perp AA_1$ 于点 E，过 O 作 $OF\perp BB_1$ 于点 F，



则 OFB_1E 为矩形，∴$OF=B_1E$，
由(I)知 $OC_1\perp$平面 ABB_1A_1，$BB_1\subset$平面 ABB_1A_1，
∴$BB_1\perp OC_1$，
∵$BB_1\perp OF$，$OC_1\cap OF=O$，$OC_1\subset$平面 OC_1F，$OF\subset$平面 OC_1F，
∴$BB_1\perp$平面 OC_1F，∵$C_1F\subset$平面 OC_1F，
∴$C_1F\perp BB_1$，

∵$B_1E=A_1B_1\cdot\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

在 $Rt\triangle OC_1F$ 中，$OC_1=2\sqrt{3}$，$OF=B_1E=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore C_1F=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{51}}{2}$,

$\therefore S_{BCC_1B_1}=BB_1\times C_1F=2\sqrt{51}$,

∴三棱锥 ABC-$A_1B_1C_1$ 的侧面积 $S=2\sqrt{3}+8\sqrt{3}+2\sqrt{51}=10\sqrt{3}+2\sqrt{51}$.

19. 某公司生产一种产品，第一年投入资金 1 000 万元，出售产品收入 40 万元，预计以后每年的投入资金是上一年的一半，出售产品所得收入比上一年多 80 万元，同时，当预计投入的资金低于 20 万元时，就按 20 万元投入，且当年出售产品收入与上一年相等.

(Ⅰ)求第 n 年的预计投入资金与出售产品的收入.
解析：(Ⅰ)设第 n 年的投入资金和收入金额分别为 a_n 万元，b_n 万元，根据题意可得 $\{a_n\}$ 是首项为 1000，公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列，$\{b_n\}$ 是首项为 40，公差为 80 的等差数列，问题得以解决.
答案：(Ⅰ)设第 n 年的投入资金和收入金额分别为 a_n 万元，b_n 万元，
依题意得，当投入的资金不低于 20 万元，即 $a_n\geqslant 20$，$a_n=\dfrac{1}{2}a_n+1b_n=b_n+1+80$，$n\geqslant 2$，
此时 $\{a_n\}$ 是首项为 1000，公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列，
$\{b_n\}$ 是首项为 40，公差为 80 的等差数列，
所以 $a_n=1000\times(\dfrac{1}{2})^{n-1}$，$b_n=80n-40$，
令 $a_n<20$，得 $2^{n-1}>50$，解得 $n\geqslant 7$
所以 $a_n=\begin{cases}1000\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1},1\le n\le 6\\20，n\ge 7\end{cases}$，$b_n=\begin{cases}80n-40,1\le n\le 6\\440，n\ge 7\end{cases}$.

(Ⅱ)预计从哪一年起该公司开始盈利?(注：盈利是指总收入大于总投入)
解析：(Ⅱ)根据等差数列的求和公式和等比数列的求和公式得到 S_n，再根据数列的函数特征，即可求出答案.

答案：(Ⅱ) $S_n=\dfrac{n\left[40+\left(80n-40\right)\right]}{2}-\dfrac{1000\times\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\dfrac{1}{2}}=2000\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+40n^2-2000$,

所以 $S_n-S_{n-1}=-2000\times(\dfrac{1}{2})^n+80n-40$，$n\geqslant 2$，
因为 $f(x)=-2000\times(\dfrac{1}{2})^x+80x-40$ 为增函数，$f(3)<0$，$f(4)<0$，
所以当 $2\leqslant n\leqslant 3$ 时，$S_{n+1}>S_n$，当 $4\leqslant n\leqslant 6$ 时，$S_{n+1}<S_n$，
又因为 $S_1<0$，$S_6=-528.75<0$，

所以 $1\leqslant n\leqslant 6$，$S_n<0$，即前 6 年未盈利，
当 $n\geqslant 7$，$S_n=S_6+(b_7-a_7)+(b_8-a_8)+\cdots+(b_n-a_n)=-528.75+420(n-6)$，
令 $S_n>0$，得 $n\geqslant 8$
综上，预计公司从第 8 年起开始盈利.

20.已知点 F(1，0)，直线 l：x=-1，直线 l' 垂直 l 于点 P，线段 PF 的垂直平分线交 l' 于点 Q.

(Ⅰ)求点 Q 的轨迹 C 的方程.
解析：(Ⅰ)由抛物线的定义可知：Q 到直线 x=-1 的距离与到点 F 的距离相等，点 Q 的轨迹是以 F 为焦点，l 为准线方程的抛物线，即可求得点 Q 的轨迹 C 的方程.
答案：(Ⅰ)由题意可知丨QP丨=丨QF丨，即 Q 到直线 x=-1 的距离与到点 F 的距离相等，
∴点 Q 的轨迹是以 F 为焦点，l 为准线方程的抛物线，
设抛物线的方程 $y^2=2px(p>0)$，则 p=2，
∴点 Q 的轨迹 C 的方程 $y^2=4x$.

(Ⅱ)已知点 H(1，2)，过 F 且与 x 轴不垂直的直线交 C 于 A，B 两点，直线 AH，BH 分别交 l 于点 M，N，求证：以 MN 为直径的圆必过定点.
解析：(Ⅱ)求得焦点坐标，设直线方程，代入抛物线方程，求得直线直线 AH，BH 的斜率分别为 k_1，k_2，求得 M 和 N 的坐标，由韦达定理求得 $y_M\cdot y_N=4$，$y_M+y_N=-\dfrac{4}{m}$，代入圆的方程，即可求得 x 和 y 的值，则以 MN 为直径的圆必过定点.
答案：(Ⅱ)证明：由题意可知：设直线 AB：$x=my+1(m\neq 0)$，

$\begin{cases} y^2=4x \\ x=my+1 \end{cases}$，整理得：$y^2-4my-4=0$，

设 $A(\dfrac{y_1^2}{4}，y_1)$，$B(\dfrac{y_2^2}{4}，y_2)$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1\cdot y_2=-4$，

又 H(1，2)，设直线 AH，BH 的斜率分别为 k_1，k_2，

则 $k_1=\dfrac{y_1-2}{\dfrac{y_1^2}{4}-1}=\dfrac{4}{y_1+2}$，$k_2=\dfrac{y_2-2}{\dfrac{y_2^2}{4}-1}=\dfrac{4}{y_2+2}$，

直线 AH：$y-2=\dfrac{4}{y_1+2}(x-1)$，BH：$y-2=\dfrac{4}{y_2+2}(x-1)$，

设 $M(-1，y_M)$，$N(-1，y_N)$，

令 x=-1，得：$y_M=2-\dfrac{8}{y_1+2}=\dfrac{2(y_1-2)}{y_1+2}$，

同理，得：$y_N=2-\dfrac{8}{y_2+2}=\dfrac{2(y_2-2)}{y_2+2}$，

$$y_M \cdot y_N=\frac{2\left(y_1-2\right)}{y_1+2}\cdot\frac{2\left(y_2-2\right)}{y_2+2}=\frac{4\left[y_1y_2-2\left(y_1+y_2\right)+4\right]}{y_1y_2+2\left(y_1+y_2\right)+4}=\frac{4\left(-4-2\times 4m+4\right)}{-4+2\times 4m+4}=-4\ ,$$

$$y_M+y_N=\left(2-\frac{8}{y_1+2}\right)+\left(2-\frac{8}{y_2+2}\right)=4-8\left(\frac{1}{y_1+2}+\frac{1}{y_2+2}\right)=4-\frac{8\left[\left(y_1+y_2\right)+4\right]}{y_1y_2+2\left(y_1+y_2\right)+4}\ ,$$

$$=4-\frac{8\left[4m+4\right]}{-4+2\times 4m+4}=-\frac{4}{m},$$

由 MN 为直径的圆的方程为 $(x+1)^2+(y-y_M)(y-y_N)=0$，

整理得：$x^2+2x-3+y^2+\frac{4}{m}y=0$，

令 $\begin{cases} y=0 \\ x^2+2x-3+y^2=0 \end{cases}$，解得：x=-3，x=1，

∴以 MN 为直径的圆必过定点(-3，0)，(1，0).

21.已知函数 $f(x)=(ax-1)e^x$，a∈R.

(Ⅰ)讨论 f(x)的单调区间.

解析：(Ⅰ)求出 f(x)的定义域，以及导数，讨论 a=0，a＞0，a＜0，判断导数符号，解不等式即可得到所求单调区间.

答案：(Ⅰ)f(x)的定义域为 R，且 $f'(x)=(ax+a-1)e^x$.

当 a=0 时，$f'(x)=-e^x<0$，此时 f(x)的单调递减区间为(-∞，+∞)；

当 a＞0 时，由 $f'(x)>0$，得 $x>-\frac{a-1}{a}$，由 $f'(x)<0$，得 $x<-\frac{a-1}{a}$.

此时 f(x)的单调减区间为 $(-\infty，-\frac{a-1}{a})$，单调增区间为 $(-\frac{a-1}{a}，+\infty)$；

当 a＜0 时，由 $f'(x)>0$，得 $x<-\frac{a-1}{a}$，由 $f'(x)<0$，得 $x>-\frac{a-1}{a}$.

此时 f(x)的单调减区间为 $(-\frac{a-1}{a}，+\infty)$，单调增区间为 $(-\infty，-\frac{a-1}{a})$.

(Ⅱ)当 m＞n＞0 时，证明：$me^n+n<ne^m+m$.

解析：(Ⅱ)运用分析法证明.要证 $me^n+n<ne^m+m$，即证 $me^n-m<ne^m-n$，也就是证 $\frac{e^n-1}{n}<\frac{e^m-1}{m}$，

令 $g(x)=\frac{e^x-1}{x}$，x＞0，求出导数，再令 $h(x)=xe^x-e^x+1$，求出导数，判断单调性，即可得证.

答案：(Ⅱ)证明：要证 $me^n+n<ne^m+m$，即证 $me^n-m<ne^m-n$，

也就是证 $m(e^n-1)<n(e^m-1)$.

也就是证 $\frac{e^n-1}{n}<\frac{e^m-1}{m}$，

令 $g(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$，x＞0，$g'(x)=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}$，

再令 $h(x)=xe^x-e^x+1$，$h'(x)=e^x+xe^x-e^x=xe^x>0$，
可得 h(x)在 x＞0 递增，即有 h(x)＞h(0)=0，
则 g′(x)＞0，g(x)在(0，+∞)递增，

由 m＞n＞0，可得 $\dfrac{e^n-1}{n}<\dfrac{e^m-1}{m}$，

故原不等式成立.

请考生在第(22)、(23)两题中任选一题作答.注意：只能做所选定的题目.如果多做，则按所做第一个题目计分，作答时请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.
[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22.在极坐标系中，曲线 C_1：$\rho=2\cos\theta$，曲线 C_2：$\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$.以极点为坐标原点，极轴为 x 轴正半轴建立直角坐标系 xOy，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\dfrac{1}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（t 为参数).

(Ⅰ)求 C_1，C_2 的直角坐标方程.
解析：(Ⅰ)曲线 C_1：$\rho=2\cos\theta$，即 $\rho^2=2\rho\cos\theta$，利用互化公式可得直角坐标方程.
曲线 C_2：$\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$ 即 $\rho^2\sin^2\theta=4\rho\cos\theta$，利用互化公式可得直角标准方程.
答案：(Ⅰ)曲线 C_1：$\rho=2\cos\theta$，即 $\rho^2=2\rho\cos\theta$，化为直角坐标方程：$x^2+y^2=2x$.
曲线 C_2：$\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$ 即 $\rho^2\sin^2\theta=4\rho\cos\theta$，化为直角标准方程：$y^2=4x$.

(Ⅱ)C 与 C_1，C_2 交于不同四点，这四点在 C 上的排列顺次为 P，Q，R，S，求||PQ|-|RS||的值.
解析：(Ⅱ)设四点在 C 上的排列顺次为 P，Q，R，S，其参数分别为 t_1，t_2，t_3，t_4.曲线 C 的参数方程代入抛物线方程可得：$3t^2-8t-32=0$.$\triangle_1>0$，可得 t_1+t_4.曲线 C 的参数方程代入圆的方程可得：$t^2+t=0$.$\triangle_2>0$，可得 t_2+t_3.∴$||PQ|-|RS||=|(t_2-t_1)-(t_4-t_3)|=|(t_2+t_3)-(t_1+t_4)|$即可得出.
答案：(Ⅱ)设四点在 C 上的排列顺次为 P，Q，R，S，其参数分别为 t_1，t_2，t_3，t_4.

曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+\dfrac{1}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（t 为参数)代入抛物线方程可得：$3t^2-8t-32=0$.$\triangle_1>0$，可得 $t_1+t_4=\dfrac{8}{3}$.

曲线 C 的参数方程为$\begin{cases} x=2+\dfrac{1}{2}t \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)代入圆的方程可得：$t^2+t=0$. $\triangle_2>0$，可得 $t_2+t_3=-1$.

∴$||PQ|-|RS||=|(t_2-t_1)-(t_4-t_3)|=|(t_2+t_3)-(t_1+t_4)|=|1+\dfrac{8}{3}|=\dfrac{11}{3}$.

[选修 4-5 不等式选讲]

23.已知函数 $f(x)=|x-a|+|2x-1|$.

(Ⅰ)当 a=1 时，解不等式 $f(x)\geqslant 2$.
解析：(Ⅰ)分类讨论，即可解不等式.
答案：(Ⅰ)当 a=1 时，不等式 $f(x)\geqslant 2$，即$|x-1|+|2x-1|\geqslant 2$.
$x<\dfrac{1}{2}$时，不等式可化为 $1-x+1-2x\geqslant 2$，解得 $x\leqslant 0$，∴$x\leqslant 0$；
$\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时，不等式可化为 $1-x+2x-1\geqslant 2$，解得 $x\geqslant 2$，∴x 无解；
$x>1$ 时，不等式可化为 $x-1+2x-1\geqslant 2$，解得 $x\geqslant\dfrac{4}{3}$，∴$x\geqslant\dfrac{4}{3}$；
综上所述，不等式的解集为$(-\infty,0]\cup[\dfrac{4}{3},+\infty)$.

(Ⅱ)求证：$f(x)\geqslant|a-\dfrac{1}{2}|$.
解析：(Ⅱ)利用绝对值不等式，即可证明.
答案：(Ⅱ)证明：$f(x)=|x-a|+|2x-1|\geqslant|a-x|+|x-\dfrac{1}{2}|\geqslant|a-\dfrac{1}{2}|$.