

2018 年浙江省台州市中考真题数学

一、选择题(本题有 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。请选出各题中一个符合题意的正确选项, 不选、多选、错选, 均不给分)

1. 比-1 小 2 的数是()

- A. 3
- B. 1
- C. -2
- D. -3

解析: 根据题意可得算式, 再计算即可. $-1-2=-3$.

答案: D.

2. 在下列四个新能源汽车车标的设计图中, 属于中心对称图形的是()



解析: A、不是中心对称图形, 本选项错误;

B、不是中心对称图形, 本选项错误;

C、不是中心对称图形, 本选项错误;

D、是中心对称图形, 本选项正确.

答案: D.

3. 计算 $\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x}$, 结果正确的是()

- A. 1
- B. x
- C. $\frac{1}{x}$
- D. $\frac{x+2}{x}$

解析：根据分式的运算法则即可求出答案.

答案：A.

4. 估计 $\sqrt{7} + 1$ 的值在()

- A. 2 和 3 之间
- B. 3 和 4 之间
- C. 4 和 5 之间
- D. 5 和 6 之间

解析：∵ $2 < \sqrt{7} < 3$,

∴ $3 < \sqrt{7} + 1 < 4$.

答案：B.

5. 某篮球运动员在连续 7 场比赛中的得分(单位：分)依次为 20, 18, 23, 17, 20, 20, 18, 则这组数据的众数与中位数分别是()

- A. 18 分, 17 分
- B. 20 分, 17 分
- C. 20 分, 19 分
- D. 20 分, 20 分

解析：根据中位数和众数的定义求解：众数是一组数据中出现次数最多的数据，注意众数可以不止一个；找中位数要把数据按从小到大的顺序排列，位于最中间的一个数(或两个数的平均数)为中位数.

答案：D.

6. 下列命题正确的是()

- A. 对角线相等的四边形是平行四边形
- B. 对角线相等的四边形是矩形
- C. 对角线互相垂直的平行四边形是菱形
- D. 对角线互相垂直且相等的四边形是正方形

解析：对角线互相平分的四边形是平行四边形，A 错误；

对角线相等的平行四边形是矩形，B 错误；

对角线互相垂直的平行四边形是菱形，C 正确；

对角线互相垂直且相等的平行四边形是正方形.

答案：C.

7. 正十边形的每一个内角的度数为()

- A. 120°
- B. 135°
- C. 140°
- D. 144°

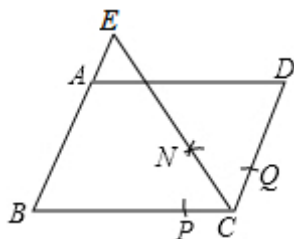
解析：∵ 一个十边形的每个外角都相等，

∴ 十边形的一个外角为 $360 \div 10 = 36^\circ$.

∴每个内角的度数为 $180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$.

答案：D.

8. 如图，在 $\square ABCD$ 中， $AB=2$ ， $BC=3$. 以点 C 为圆心，适当长为半径画弧，交 BC 于点 P ，交 CD 于点 Q ，再分别以点 P ， Q 为圆心，大于 $\frac{1}{2}PQ$ 的长为半径画弧，两弧相交于点 N ，射线 CN 交 BA 的延长线于点 E ，则 AE 的长是()



A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\frac{6}{5}$

D. $\frac{3}{2}$

解析：∵由题意可知 CF 是 $\angle BCD$ 的平分线，

∴ $\angle BCE = \angle DCE$.

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $AB \parallel CD$,

∴ $\angle DCE = \angle E$ ， $\angle BCE = \angle AEC$,

∴ $BE = BC = 3$,

∵ $AB = 2$,

∴ $AE = BE - AB = 1$.

答案：B.

9. 甲、乙两运动员在长为 100m 的直道 AB (A ， B 为直道两端点) 上进行匀速往返跑训练，两人同时从 A 点起跑，到达 B 点后，立即转身跑向 A 点，到达 A 点后，又立即转身跑向 B 点... 若甲跑步的速度为 5m/s ，乙跑步的速度为 4m/s ，则起跑后 100s 内，两人相遇的次数为()

A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

解析：设两人相遇的次数为 x ，依题意有

$$\frac{100 \times 2}{5 + 4} x = 100,$$

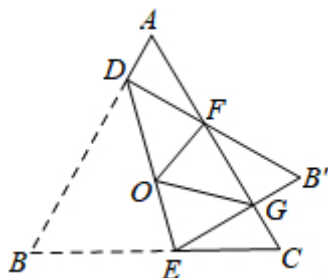
解得 $x = 4.5$,

∵ x 为整数，

∴ x 取 4.

答案：B.

10. 如图, 等边三角形 ABC 边长是定值, 点 O 是它的外心, 过点 O 任意作一条直线分别交 AB, BC 于点 D, E. 将 $\triangle BDE$ 沿直线 DE 折叠, 得到 $\triangle B'DE$, 若 $B'D, B'E$ 分别交 AC 于点 F, G, 连接 OF, OG, 则下列判断错误的是()



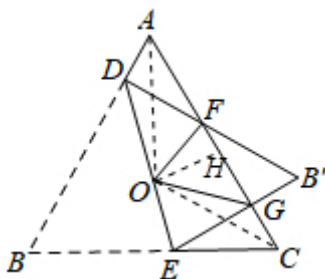
- A. $\triangle ADF \cong \triangle CGE$
- B. $\triangle B'FG$ 的周长是一个定值
- C. 四边形 FOEC 的面积是一个定值
- D. 四边形 OGB'F 的面积是一个定值

解析: A、根据等边三角形 ABC 的外心的性质可知: AO 平分 $\angle BAC$, 根据角平分线的定理和逆定理得: FO 平分 $\angle DFG$, 由外角的性质可证明 $\angle DOF = 60^\circ$, 同理可得 $\angle EOG = 60^\circ$, $\angle FOG = 60^\circ = \angle DOF = \angle EOG$, 可证明 $\triangle DOF \cong \triangle GOF \cong \triangle GOE$, $\triangle OAD \cong \triangle OCG$, $\triangle OAF \cong \triangle OCE$, 可得 $AD = CG$, $AF = CE$, 从而得 $\triangle ADF \cong \triangle CGE$;

B、根据 $\triangle DOF \cong \triangle GOF \cong \triangle GOE$, 得 $DF = GF = GE$, 所以 $\triangle ADF \cong \triangle B'GF \cong \triangle CGE$, 可得结论;

C、根据 $S_{\text{四边形 FOEC}} = S_{\triangle OCF} + S_{\triangle OCE}$, 依次换成面积相等的三角形, 可得结论为: $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$ (定值), 可作判断;

D、方法同 C, 将 $S_{\text{四边形 OGB'F}} = S_{\triangle OAC} - S_{\triangle OFG}$, 根据 $S_{\triangle OFG} = \frac{1}{3} \cdot FG \cdot OH$, FG 变化, 故 $\triangle OFG$ 的面积变化, 从而四边形 OGB'F 的面积也变化, 可作判断.



答案: D.

二、填空题(本题有 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

11. 如果分式 $\frac{1}{x-2}$ 有意义, 那么实数 x 的取值范围是_____.

解析: 由题意得: $x-2 \neq 0$,

解得: $x \neq 2$.

答案: $x \neq 2$.

12. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 3x + m = 0$ 有两个相等的实数根, 则 $m =$ _____.

解析: 利用判别式的意义得到 $\Delta = 3^2 - 4m = 0$, 然后解关于 m 的方程即可,

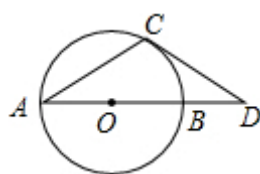
答案: $\frac{9}{4}$.

13. 一个不透明的口袋中有三个完全相同的小球, 把它们分别标号为 1, 2, 3. 随机摸出一个小球然后放回, 再随机摸出一个小球, 则两次摸出的小球标号相同的概率是_____.

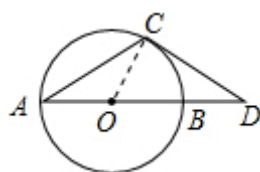
解析: 首先根据题意画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果与两次摸出的小球标号相同的情况, 再利用概率公式即可求得答案.

答案: $\frac{1}{3}$.

14. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, C 是 $\odot O$ 上的点, 过点 C 作 $\odot O$ 的切线交 AB 的延长线于点 D. 若 $\angle A = 32^\circ$, 则 $\angle D =$ _____度.



解析: 连接 OC,



由圆周角定理得, $\angle COD = 2\angle A = 64^\circ$,

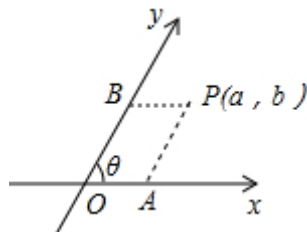
\because CD 为 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OC \perp CD$,

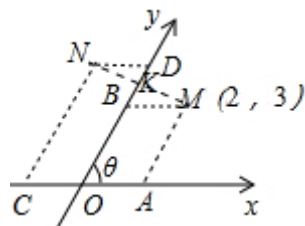
$\therefore \angle D = 90^\circ - \angle COD = 26^\circ$.

答案: 26.

15. 如图, 把平面内一条数轴 x 绕原点 O 逆时针旋转角 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) 得到另一条数轴 y , x 轴和 y 轴构成一个平面斜坐标系. 规定: 过点 P 作 y 轴的平行线, 交 x 轴于点 A , 过点 P 作 x 轴的平行线, 交 y 轴于点 B , 若点 A 在 x 轴上对应的实数为 a , 点 B 在 y 轴上对应的实数为 b , 则称有序实数对 (a, b) 为点 P 的斜坐标, 在某平面斜坐标系中, 已知 $\theta = 60^\circ$, 点 M' 的斜坐标为 $(3, 2)$, 点 N 与点 M 关于 y 轴对称, 则点 N 的斜坐标为_____.



解析: 如图作 $ND \parallel x$ 轴交 y 轴于 D , 作 $NC \parallel y$ 轴交 x 轴于 C . MN 交 y 轴于 K .



$\because NK=MK, \angle DNK=\angle BMK, \angle NKD=\angle MKB,$

$\therefore \triangle NDK \cong \triangle MBK,$

$\therefore DN=BM=OC=2, DK=BK,$

在 $Rt\triangle KBM$ 中, $BM=2, \angle MBK=60^\circ,$

$\therefore \angle BMK=30^\circ,$

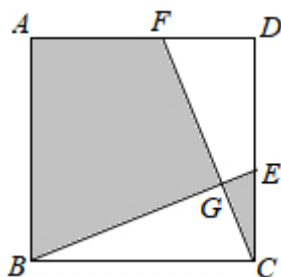
$\therefore DK=BK=\frac{1}{2}BM=1,$

$\therefore OD=5,$

$\therefore N(-2, 5).$

答案: $(-2, 5).$

16. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB=3$, 点 E, F 分别在 CD, AD 上, $CE=DF$, BE, CF 相交于点 G . 若图中阴影部分的面积与正方形 $ABCD$ 的面积之比为 $2:3$, 则 $\triangle BCG$ 的周长为_____.



解析: 根据面积之比得出 $\triangle BGC$ 的面积等于正方形面积的 $\frac{1}{6}$, 进而依据 $\triangle BCG$ 的面积以及勾股定理, 得出 $BG+CG$ 的长, 进而得出其周长.

答案: $\sqrt{15}+3.$

三、解答题(本题有 8 小题, 第 17~20 题每题 8 分, 第 21 题 10 分, 第 22, 23 题每题 12 分, 第 24 题 14 分, 共 80 分)

17. 计算: $|-2|-\sqrt{4}+(-1)\times(-3).$

解析: 首先计算绝对值、二次根式化简、乘法, 然后再计算加减即可.

答案: 原式 $=2-2+3=3.$

18. 解不等式组:
$$\begin{cases} x-1 < 3 \\ 3(x-2)-x > 0 \end{cases}.$$

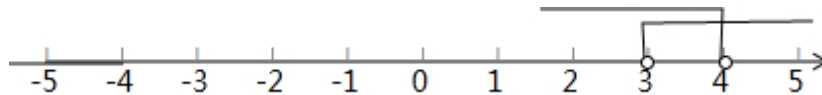
解析: 根据不等式组的解集表示方法: 大小小大中间找, 可得答案.

答案:
$$\begin{cases} x-1 < 3 \text{ ①} \\ 3(x-2) - x > 0 \text{ ②} \end{cases}$$

解不等式①, 得 $x < 4$,

解不等式②, 得 $x > 3$,

不等式①, 不等式②的解集在数轴上表示, 如图



原不等式组的解集为 $3 < x < 4$.

19. 图 1 是一辆吊车的实物图, 图 2 是其工作示意图, AC 是可以伸缩的起重臂, 其转动点 A 离地面 BD 的高度 AH 为 3.4m. 当起重臂 AC 长度为 9m, 张角 $\angle HAC$ 为 118° 时, 求操作平台 C 离地面的高度 (结果保留小数点后一位; 参考数据: $\sin 28^\circ \approx 0.47$, $\cos 28^\circ \approx 0.88$, $\tan 28^\circ \approx 0.53$)



图1

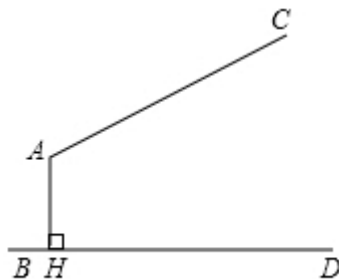


图2

解析: 作 $CE \perp BD$ 于 F, $AF \perp CE$ 于 F, 如图 2, 易得四边形 AHEF 为矩形, 则 $EF = AH = 3.4\text{m}$, $\angle HAF = 90^\circ$, 再计算出 $\angle CAF = 28^\circ$, 则在 $\text{Rt}\triangle ACF$ 中利用正弦可计算出 CF, 然后计算 $CF + EF$ 即可.

答案: 作 $CE \perp BD$ 于 F, $AF \perp CE$ 于 F, 如图 2,

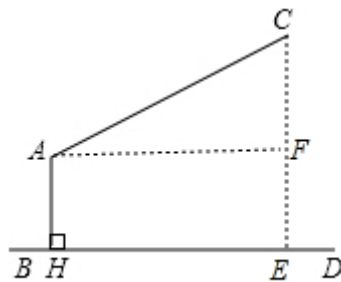


图2

易得四边形 AHEF 为矩形,

$$\therefore EF = AH = 3.4\text{m}, \angle HAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAF = \angle CAH - \angle HAF = 118^\circ - 90^\circ = 28^\circ,$$

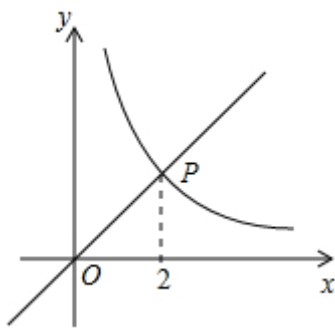
$$\text{在 Rt}\triangle ACF \text{ 中, } \therefore \sin \angle CAF = \frac{CF}{AC},$$

$$\therefore CF = 9 \sin 28^\circ = 9 \times 0.47 = 4.23,$$

$$\therefore CE = CF + EF = 4.23 + 3.4 \approx 7.6(\text{m}),$$

答: 操作平台 C 离地面的高度为 7.6m.

20. 如图，函数 $y=x$ 的图象与函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x>0$) 的图象相交于点 $P(2, m)$.



(1) 求 m, k 的值;

(2) 直线 $y=4$ 与函数 $y=x$ 的图象相交于点 A , 与函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x>0$) 的图象相交于点 B , 求线段 AB 长.

解析: (1) 将点 $P(2, m)$ 代入 $y=x$, 求出 $m=2$, 再将点 $P(2, 2)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$, 即可求出 k 的值;

(2) 分别求出 A, B 两点的坐标, 即可得到线段 AB 的长.

答案: (1) \because 函数 $y=x$ 的图象过点 $P(2, m)$,

$$\therefore m=2,$$

$$\therefore P(2, 2),$$

\because 函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x>0$) 的图象过点 P ,

$$\therefore k=2 \times 2=4;$$

(2) 将 $y=4$ 代入 $y=x$, 得 $x=4$,

$$\therefore \text{点 } A(4, 4).$$

将 $y=4$ 代入 $y=\frac{4}{x}$, 得 $x=1$,

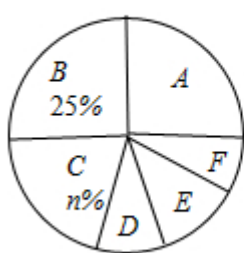
$$\therefore \text{点 } B(1, 4).$$

$$\therefore AB=4-1=3.$$

21. 某市明年的初中毕业升学考试, 拟将“引体向上”作为男生体育考试的一个必考项目, 满分为 10 分. 有关部门为提前了解明年参加初中毕业升学考试的男生的“引体向上”水平, 在全市八年级男生中随机抽取了部分男生, 对他们的“引体向上”水平进行测试, 并将测试结果绘制成如下统计图表(部分信息未给出):

请你根据统计图表中的信息, 解答下列问题:

抽取的男生“引体向上”成绩扇形统计图



A	0分
B	1分
C	2分
D	3分
E	4分
F	5分及以上

抽取的男生“引体向上”成绩统计表

成绩	人数
0分	32
1分	30
2分	24
3分	11
4分	15
5分及以上	m

- (1) 填空: $m=$ ____, $n=$ ____.
 (2) 求扇形统计图中 D 组的扇形圆心角的度数;
 (3) 目前该市八年级有男生 3600 名, 请估计其中“引体向上”得零分的人数.

解析: (1) 根据题意和表格、统计图中的数据可以计算出 m 、 n 的值;
 (2) 根据 (1) 中的结论和统计图中的数据可以求得扇形统计图中 D 组的扇形圆心角的度数;
 (3) 根据统计图中的数据可以估计其中“引体向上”得零分的人数.

答案: (1) 由题意可得,
 本次抽查的学生有: $30 \div 25\% = 120$ (人),
 $m = 120 - 32 - 30 - 24 - 11 - 15 = 8$,
 $n\% = 24 \div 120 \times 100\% = 20\%$;

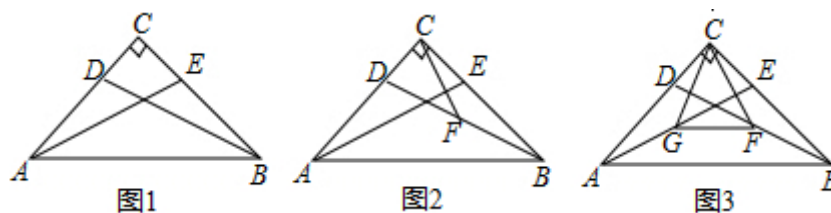
$$(2) \frac{11}{120} \times 360^\circ = 33^\circ,$$

即扇形统计图中 D 组的扇形圆心角是 33° ;

$$(3) 3600 \times \frac{32}{120} = 960 \text{ (人)},$$

答: “引体向上”得零分的有 960 人.

22. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AC=BC$, $\angle ACB=90^\circ$, 点 D, E 分别在 AC, BC 上, 且 $CD=CE$.



- (1) 如图 1, 求证: $\angle CAE = \angle CBD$;
 (2) 如图 2, F 是 BD 的中点, 求证: $AE \perp CF$;
 (3) 如图 3, F, G 分别是 BD, AE 的中点, 若 $AC = 2\sqrt{2}$, $CE = 1$, 求 $\triangle CGF$ 的面积.

解析: (1) 直接判断出 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$ 即可得出结论;
 (2) 先判断出 $\angle BCF = \angle CBF$, 进而得出 $\angle BCF = \angle CAE$, 即可得出结论;
 (3) 先求出 $BD = 3$, 进而求出 $CF = \frac{3}{2}$, 同理: $EG = \frac{3}{2}$, 再利用等面积法求出 ME, 进而求出 GM, 最后用面积公式即可得出结论.

答案: (1) 在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCD$ 中,
$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACB = \angle ACB = 90^\circ \\ CE = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD$,

$\therefore \angle CAE = \angle CBD$;

(2) 如图 2,

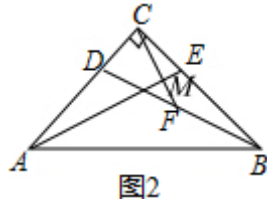


图2

在 $Rt\triangle BCD$ 中，点 F 是 BD 的中点，

$$\therefore CF=BF,$$

$$\therefore \angle BCF=\angle CBF,$$

由 (1) 知， $\angle CAE=\angle CBD$ ，

$$\therefore \angle BCF=\angle CAE,$$

$$\therefore \angle CAE+\angle ACF=\angle BCF+\angle ACF=\angle BAC=90^\circ,$$

$$\therefore \angle AMC=90^\circ,$$

$$\therefore AE \perp CF;$$

(3) 如图 3，

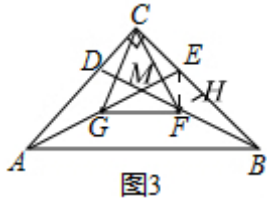


图3

$$\because AC=2\sqrt{2},$$

$$\therefore BC=AC=2\sqrt{2},$$

$$\because CE=1,$$

$$\therefore CD=CE=1,$$

在 $Rt\triangle BCD$ 中，根据勾股定理得， $BD=\sqrt{CD^2+BC^2}=3$ ，

\because 点 F 是 BD 中点，

$$\therefore CF=DF=\frac{1}{2}BD=\frac{3}{2},$$

$$\text{同理：} EG=\frac{1}{2}AE=\frac{3}{2},$$

连接 EF ，过点 F 作 $FH \perp BC$ ，

$\because \angle ACB=90^\circ$ ，点 F 是 BD 的中点，

$$\therefore FH=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}CE \cdot FH=\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

由 (2) 知， $AE \perp CF$ ，

$$\therefore S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}CF \cdot ME=\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}ME=\frac{3}{4}ME,$$

$$\therefore \frac{3}{4}ME=\frac{1}{4},$$

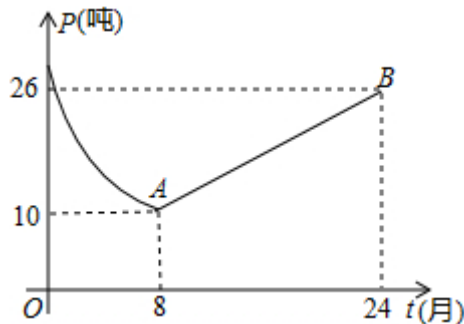
$$\therefore ME = \frac{1}{3},$$

$$\therefore GM = EG - ME = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6},$$

$$\therefore S_{\triangle CFG} = \frac{1}{2} CF \cdot GM = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{7}{6} = \frac{7}{8}.$$

23. 某药厂销售部门根据市场调研结果，对该厂生产的一种新型原料药未来两年的销售进行预测，并建立如下模型：设第 t 个月该原料药的月销售量为 P (单位：吨)， P 与 t 之间存在如图所示的函数关系，其图象是函数 $P = \frac{120}{t+4}$ ($0 < t \leq 8$) 的图象与线段 AB 的组合；设第 t 个月销售该原料药每吨的毛利润为 Q (单位：万元)， Q 与 t 之间满足如下关系： $Q =$

$$\begin{cases} 2t + 8, 0 < t \leq 12 \\ -t + 44, 12 < t \leq 24 \end{cases}$$



(1) 当 $8 < t \leq 24$ 时，求 P 关于 t 的函数解析式；

(2) 设第 t 个月销售该原料药的月毛利润为 w (单位：万元)

① 求 w 关于 t 的函数解析式；

② 该药厂销售部门分析认为， $336 \leq w \leq 513$ 是最有利于该原料药可持续生产和销售的月毛利润范围，求此范围所对应的月销售量 P 的最小值和最大值.

解析：(1) 设 $8 < t \leq 24$ 时， $P = kt + b$ ，将 $A(8, 10)$ 、 $B(24, 26)$ 代入求解可得 $P = t + 2$ ；

(2) ① 分 $0 < t \leq 8$ 、 $8 < t \leq 12$ 和 $12 < t \leq 24$ 三种情况，根据月毛利润 = 月销量 \times 每吨的毛利润可得函数解析式；

② 求出 $8 < t \leq 12$ 和 $12 < t \leq 24$ 时，月毛利润 w 在满足 $336 \leq w \leq 513$ 条件下 t 的取值范围，再根据一次函数的性质可得 P 的最大值与最小值，二者综合可得答案.

答案：(1) 设 $8 < t \leq 24$ 时， $P = kt + b$ ，

将 $A(8, 10)$ 、 $B(24, 26)$ 代入，得：

$$\begin{cases} 8k + b = 10 \\ 24k + b = 26 \end{cases},$$

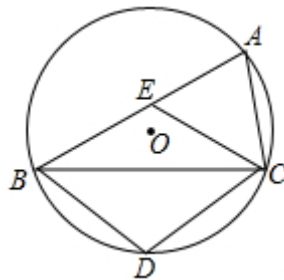
$$\text{解得：} \begin{cases} k = 1 \\ b = 2 \end{cases},$$

$$\therefore P = t + 2;$$

$$(2) \text{ ① 当 } 0 < t \leq 8 \text{ 时，} w = (2t + 8) \times \frac{120}{t + 4} = 240;$$

当 $8 < t \leq 12$ 时, $w = (2t+8)(t+2) = 2t^2 + 12t + 16$;
 当 $12 < t \leq 24$ 时, $w = (-t+44)(t+2) = -t^2 + 42t + 88$;
 ②当 $8 < t \leq 12$ 时, $w = 2t^2 + 12t + 16 = 2(t+3)^2 - 2$,
 $\therefore 8 < t \leq 12$ 时, w 随 t 的增大而增大,
 当 $2(t+3)^2 - 2 = 336$ 时, 解得 $t = 10$ 或 $t = -16$ (舍),
 当 $t = 12$ 时, w 取得最大值, 最大值为 448,
 此时月销量 $P = t + 2$ 在 $t = 10$ 时取得最小值 12, 在 $t = 12$ 时取得最大值 14;
 当 $12 < t \leq 24$ 时, $w = -t^2 + 42t + 88 = -(t-21)^2 + 529$,
 当 $t = 12$ 时, w 取得最小值 448,
 由 $-(t-21)^2 + 529 = 513$ 得 $t = 17$ 或 $t = 25$,
 \therefore 当 $12 < t \leq 17$ 时, $448 < w \leq 513$,
 此时 $P = t + 2$ 的最小值为 14, 最大值为 19;
 综上, 此范围所对应的月销售量 P 的最小值为 12 吨, 最大值为 19 吨.

24. 如图, $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形, 点 D 在 BC 上, 点 E 在弦 AB 上 (E 不与 A 重合), 且四边形 $BDCE$ 为菱形.



- (1) 求证: $AC = CE$;
 (2) 求证: $BC^2 - AC^2 = AB \cdot AC$;
 (3) 已知 $\odot O$ 的半径为 3.

①若 $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$, 求 BC 的长;

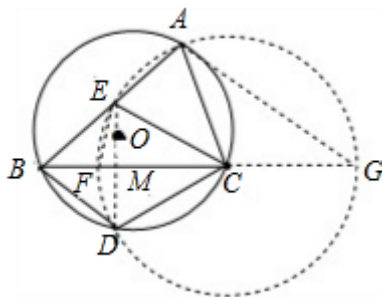
②当 $\frac{AB}{AC}$ 为何值时, $AB \cdot AC$ 的值最大?

解析: (1) 由菱形知 $\angle D = \angle BEC$, 由 $\angle A + \angle D = \angle BEC + \angle AEC = 180^\circ$ 可得 $\angle A = \angle AEC$, 据此得证;
 (2) 以点 C 为圆心, CE 长为半径作 $\odot C$, 与 BC 交于点 F , 于 BC 延长线交于点 G , 则 $CF = CG = AC = CE = CD$, 证 $\triangle BEF \sim \triangle BGA$ 得 $\frac{BE}{BF} = \frac{BG}{BA}$, 即 $BF \cdot BG = BE \cdot AB$, 将 $BF = BC - CF = BC - AC$ 、 $BG = BC + CG = BC + AC$ 代入可得;

(3) ①设 $AB = 5k$ 、 $AC = 3k$, 由 $BC^2 - AC^2 = AB \cdot AC$ 知 $BC = 2\sqrt{6}k$, 连接 ED 交 BC 于点 M , $\text{Rt}\triangle DMC$ 中由 $DC = AC = 3k$ 、 $MC = \frac{1}{2}BC = \sqrt{6}k$ 求得 $DM = \sqrt{CD^2 - CM^2} = \sqrt{3}k$, 可知 $OM = OD - DM = 3 - \sqrt{3}k$, 在 $\text{Rt}\triangle COM$ 中, 由 $OM^2 + MC^2 = OC^2$ 可得答案. ②设 $OM = d$, 则 $MD = 3 - d$, $MC^2 = OC^2 - OM^2 = 9 - d^2$, 继而知 $BC^2 = (2MC)^2 = 36 - 4d^2$ 、 $AC^2 = DC^2 = DM^2 + CM^2 = (3 - d)^2 + 9 - d^2$, 由 (2) 得 $AB \cdot AC = BC^2 - AC^2$, 据此得出关于 d 的二次函数, 利用二次函数的性质可得答案.

答案: (1) \because 四边形 $EBDC$ 为菱形,

$\therefore \angle D = \angle BEC$,
 \because 四边形 $ABDC$ 是圆的内接四边形,
 $\therefore \angle A + \angle D = 180^\circ$,
 又 $\angle BEC + \angle AEC = 180^\circ$,
 $\therefore \angle A = \angle AEC$,
 $\therefore AC = AE$;
 (2) 以点 C 为圆心, CE 长为半径作 $\odot C$, 与 BC 交于点 F , 于 BC 延长线交于点 G , 则 $CF = CG$,



由(1)知 $AC = CE = CD$,
 $\therefore CF = CG = AC$,
 \because 四边形 $AEFG$ 是 $\odot C$ 的内接四边形,
 $\therefore \angle G + \angle AEF = 180^\circ$,
 又 $\because \angle AEF + \angle BEF = 180^\circ$,
 $\therefore \angle G = \angle BEF$,
 $\because \angle EBF = \angle GBA$,
 $\therefore \triangle BEF \sim \triangle BGA$,
 $\therefore \frac{BE}{BF} = \frac{BG}{BA}$, 即 $BF \cdot BG = BE \cdot AB$,
 $\because BF = BC - CF = BC - AC$, $BG = BC + CG = BC + AC$, $BE = CE = AC$,
 $\therefore (BC - AC)(BC + AC) = AB \cdot AC$, 即 $BC^2 - AC^2 = AB \cdot AC$;

(3) 设 $AB = 5k$, $AC = 3k$,
 $\because BC^2 - AC^2 = AB \cdot AC$,

$$\therefore BC = 2\sqrt{6}k,$$

连接 ED 交 BC 于点 M ,
 \because 四边形 $BDCE$ 是菱形,
 $\therefore DE$ 垂直平分 BC ,
 则点 E, O, M, D 共线,

在 $Rt\triangle DMC$ 中, $DC = AC = 3k$, $MC = \frac{1}{2}BC = \sqrt{6}k$,

$$\therefore DM = \sqrt{CD^2 - CM^2} = \sqrt{3}k,$$

$$\therefore OM = OD - DM = 3 - \sqrt{3}k,$$

在 $Rt\triangle COM$ 中, 由 $OM^2 + MC^2 = OC^2$ 得 $(3 - \sqrt{3}k)^2 + (\sqrt{6}k)^2 = 3^2$,

解得： $k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $k=0$ (舍)，

$$\therefore BC = 2\sqrt{6} \quad k = 4\sqrt{2} ;$$

② 设 $OM = d$ ，则 $MD = 3 - d$ ， $MC^2 = OC^2 - OM^2 = 9 - d^2$ ，

$$\therefore BC^2 = (2MC)^2 = 36 - 4d^2,$$

$$AC^2 = DC^2 = DM^2 + CM^2 = (3 - d)^2 + 9 - d^2,$$

由(2)得 $AB \cdot AC = BC^2 - AC^2$

$$= -4d^2 + 6d + 18$$

$$= -4\left(d - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{81}{4},$$

\therefore 当 $x = \frac{3}{4}$ ，即 $OM = \frac{3}{4}$ 时， $AB \cdot AC$ 最大，最大值为 $\frac{81}{4}$ ，

$$\therefore DC^2 = \frac{189}{16},$$

$$\therefore AC = DC = \frac{3\sqrt{21}}{4},$$

$$\therefore AB = \frac{9\sqrt{21}}{7}, \text{ 此时 } \frac{AB}{AC} = \frac{12}{7}.$$