

2015年辽宁省朝阳市中考真题数学

一、选择题

1. 计算 $-2+1$ 的结果是()

- A. -3
- B. -1
- C. 3
- D. 1

解析: 异号两数相加, 取绝对值较大的符号, 并用较大的绝对值减去较小的绝对值. $-2+1=-1$.

答案: B

2. 下列计算正确的是()

- A. $3x^2 \cdot 2x=6x^3$
- B. $x^6 \div x^3=x^2$
- C. $(3a)^2=3a^2$
- D. $(a+b)^2=a^2+b^2$

解析: A、正确;

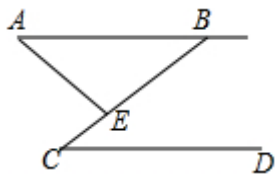
B、 $x^6 \div x^3=x^3$, 选项错误;

C、 $(3a)^2=9a^2$, 选项错误;

D、 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, 选项错误.

答案: A

3. 如图, $AB \parallel CD$, $\angle A=46^\circ$, $\angle C=27^\circ$, 则 $\angle AEC$ 的大小应为()



- A. 19°
- B. 29°
- C. 63°
- D. 73°

解析: $\because AB \parallel CD$, $\angle A=46^\circ$, $\angle C=27^\circ$, $\therefore \angle ABE=\angle C=27^\circ$.

$\because \angle AEC$ 是 $\triangle ABE$ 的外角, $\therefore \angle AEC=\angle A+\angle ABE=46^\circ+27^\circ=73^\circ$.

答案: D

4. 一组数据 2, 3, 1, 2, 2 的中位数、众数和方差分别是()

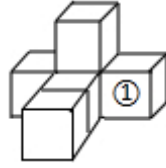
- A. 1, 2, 0.4
- B. 2, 2, 4.4
- C. 2, 2, 0.4
- D. 2, 1, 0.4

解析: 2, 3, 1, 2, 2 的中位数是 2; 众数是 2;

方差 $=\frac{1}{5} \times [(2-2)^2+(3-2)^2+(1-2)^2+(2-2)^2+(2-2)^2]=0.4$.

答案：C

5. 如图是由 6 个同样大小的正方体摆成的几何体. 将正方体①移走后, 所得几何体()



- A. 主视图改变, 左视图改变
- B. 俯视图不变, 左视图不变
- C. 俯视图改变, 左视图改变
- D. 主视图改变, 左视图不变

解析: 将正方体①移走前的主视图正方形的个数为 1, 2, 1; 正方体①移走后的主视图正方形的个数为 1, 2; 发生改变.

将正方体①移走前的左视图正方形的个数为 2, 1, 1; 正方体①移走后的左视图正方形的个数为 2, 1, 1; 没有发生改变.

将正方体①移走前的俯视图正方形的个数为 1, 3, 1; 正方体①移走后的俯视图正方形的个数, 1, 3; 发生改变.

答案: D

6. 估计 $\sqrt{8} \times \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{18}$ 的运算结果应在哪两个连续自然数之间()

- A. 5 和 6
- B. 6 和 7
- C. 7 和 8
- D. 8 和 9

解析: $\sqrt{8} \times \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{2} = 2 + 3\sqrt{2}$,

$\because 6 < 2 + 3\sqrt{2} < 7, \therefore \sqrt{8} \times \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{18}$ 的运算结果在 6 和 7 两个连续自然数之间.

答案: B

7. 下列一元二次方程中, 有两个相等实数根的是()

- A. $x^2 - 8 = 0$
- B. $2x^2 - 4x + 3 = 0$
- C. $9x^2 + 6x + 1 = 0$
- D. $5x + 2 = 3x^2$

解析: A、 $x^2 - 8 = 0$, 这里 $a=1, b=0, c=-8$,

$\because \Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 32 > 0$,

\therefore 方程有两个不相等的实数根, 故本选项错误;

B、 $2x^2 - 4x + 3 = 0$, 这里 $a=2, b=-4, c=3$,

$\because \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 3 = -8 < 0$, \therefore 方程没有实数根, 故本选项错误;

C、 $9x^2+6x+1=0$ ，这里 $a=9$ ， $b=6$ ， $c=1$ ，

$\because \Delta=b^2-4ac=6^2-4\times 9\times 1=0$ ， \therefore 方程有两个相等的实数根，故本选项正确；

D、 $5x+2=3x^2$ ， $3x^2-5x-2=0$ ，

这里 $a=3$ ， $b=-5$ ， $c=-2$ ，

$\because \Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times 3\times (-2)=49>0$ ，

\therefore 方程有两个不相等的实数根，故本选项错误。

答案：C

8. 已知两点 $A(5, 6)$ 、 $B(7, 2)$ ，先将线段 AB 向左平移一个单位，再以原点 O 为位似中心，在第一象限内将其缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ 得到线段 CD ，则点 A 的对应点 C 的坐标为()

A. (2, 3)

B. (3, 1)

C. (2, 1)

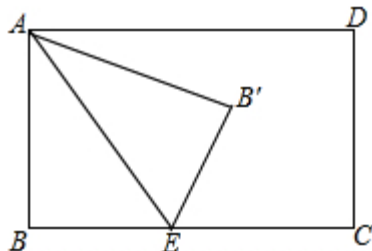
D. (3, 3)

解析： \because 线段 AB 向左平移一个单位，

$\therefore A$ 点平移后的对应点的坐标为 $(4, 6)$ ， \therefore 点 C 的坐标为 $(4\times \frac{1}{2}, 6\times \frac{1}{2})$ ，即 $(2, 3)$ 。

答案：A

9. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB=5$ ， $BC=7$ ，点 E 为 BC 上一动点，把 $\triangle ABE$ 沿 AE 折叠，当点 B 的对应点 B' 落在 $\angle ADC$ 的角平分线上时，则点 B' 到 BC 的距离为()



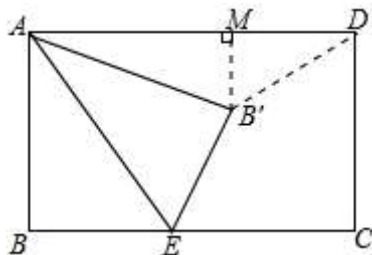
A. 1 或 2

B. 2 或 3

C. 3 或 4

D. 4 或 5

解析：如图，连接 $B'D$ ，过点 B' 作 $B'M\perp AD$ 于 M 。



\because 点 B 的对应点 B' 落在 $\angle ADC$ 的角平分线上， \therefore 设 $DM=B'M=x$ ，则 $AM=7-x$ ，

又由折叠的性质知 $AB=AB'=5$ ，

\therefore 在直角 $\triangle AMB'$ 中，由勾股定理得到： $AM^2=AB'^2-B'M^2$ ，

即 $(7-x)^2=25-x^2$, 解得 $x=3$ 或 $x=4$, 则点 B' 到 BC 的距离为 2 或 1.

答案: A

10. 如图, 在直角坐标系中, 直线 $y_1=2x-2$ 与坐标轴交于 A、B 两点, 与双曲线 $y_2=\frac{k}{x}$ ($x>0$)

交于点 C, 过点 C 作 $CD \perp x$ 轴, 垂足为 D, 且 $OA=AD$, 则以下结论:

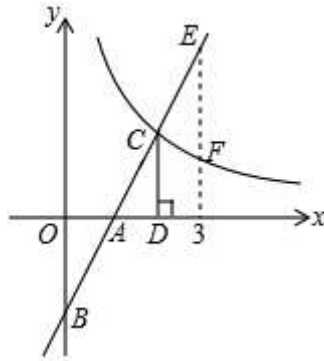
① $S_{\triangle ADB}=S_{\triangle ADC}$;

② 当 $0 < x < 3$ 时, $y_1 < y_2$;

③ 如图, 当 $x=3$ 时, $EF=\frac{8}{3}$;

④ 当 $x > 0$ 时, y_1 随 x 的增大而增大, y_2 随 x 的增大而减小.

其中正确结论的个数是 ()



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

解析: 对于直线 $y_1=2x-2$,

令 $x=0$, 得到 $y=-2$; 令 $y=0$, 得到 $x=1$,

$\therefore A(1, 0)$, $B(0, -2)$, 即 $OA=1$, $OB=2$,

在 $\triangle OBA$ 和 $\triangle CDA$ 中, $\begin{cases} \angle AOB = \angle ADC = 90^\circ, \\ \angle OAB = \angle DAC, \\ OA = AD, \end{cases} \therefore \triangle OBA \cong \triangle CDA \text{ (AAS)}, \therefore CD=OB=2, OA=AD=1,$

$\therefore S_{\triangle ADB}=S_{\triangle ADC}$ (同底等高三角形面积相等), 选项①正确; $\therefore C(2, 2)$,

把 C 坐标代入反比例解析式得: $k=4$, 即 $y_2=\frac{4}{x}$,

由函数图象得: 当 $0 < x < 2$ 时, $y_1 < y_2$, 选项②错误;

当 $x=3$ 时, $y_1=4$, $y_2=\frac{4}{3}$, 即 $EF=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$, 选项③正确;

当 $x > 0$ 时, y_1 随 x 的增大而增大, y_2 随 x 的增大而减小, 选项④正确.

答案: C

二、填空题(本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分, 只需要将结果直接填写在答题卡对应题号处的横线上, 不必写出解答过程, 填错, 一律得 0 分)

11. 太阳的半径大约为 696000 千米, 将 696000 用科学记数表示为_____.

解析: 将 696000 用科学记数法表示为 6.96×10^5 .

答案: 6.96×10^5 .

12. 一个三角形的两边长分别是 2 和 3, 若它的第三边长为奇数, 则这个三角形的周长为_____.

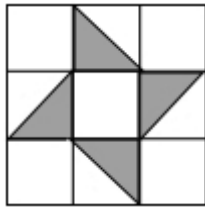
解析: 设第三边长为 x ,

∵ 两边长分别是 2 和 3, ∴ $3-2 < x < 3+2$, 即: $1 < x < 5$,

∵ 第三边长为奇数, ∴ $x=3$, ∴ 这个三角形的周长为 $2+3+3=8$.

答案: 8

13. 小球在如图所示的地板上自由地滚动, 并随机地停留在某块方砖上, 那么小球最终停留在黑色区域的概率是_____.



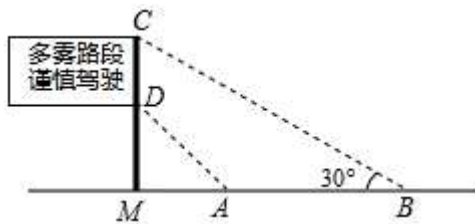
解析: ∵ 由图可知, 黑色方砖 2 块, 共有 9 块方砖,

∴ 黑色方砖在整个地板中所占的比值 = $\frac{2}{9}$, ∴ 它停在黑色区域的概率是 $\frac{2}{9}$.

答案: $\frac{2}{9}$.

14. 如图, 是矗立在高速公路水平地面上的交通警示牌, 经测量得到如下数据: $AM=4$ 米, $AB=8$ 米, $\angle MAD=45^\circ$, $\angle MBC=30^\circ$, 则警示牌的高 CD 为_____米(结果精确到 0.1 米, 参考

数据: $\sqrt{2}=1.41$, $\sqrt{3}=1.73$).



解析: 由题意可得: ∵ $AM=4$ 米, $\angle MAD=45^\circ$, ∴ $DM=4$ 米,

∵ $AM=4$ 米, $AB=8$ 米, ∴ $MB=12$ 米,

∵ $\angle MBC=30^\circ$, ∴ $BC=2MC$,

∴ $MC^2+MB^2=(2MC)^2$, $MC^2+12^2=(2MC)^2$, ∴ $MC=4\sqrt{3}-4 \approx 2.9$ (米).

答案: 2.9

15. 一个足球被从地面向上踢出, 它距地面的高度 h (m) 与足球被踢出后经过的时间 t (s) 之间具有函数关系 $h=at^2+19.6t$, 已知足球被踢出后经过 4s 落地, 则足球距地面的最大高度是

m.

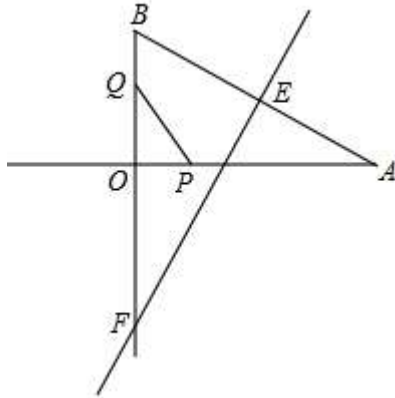
解析：由题意得：t=4时，h=0，

因此 $0=16a+19.6\times 4$ ，解得：a=-4.9， \therefore 函数关系为 $h=-4.9t^2+19.6t$ ，

足球距地面的最大高度是： $\frac{4\times(-4.9)\times 0-19.6^2}{4\times(-4.9)}=19.6(\text{m})$ 。

答案：19.6

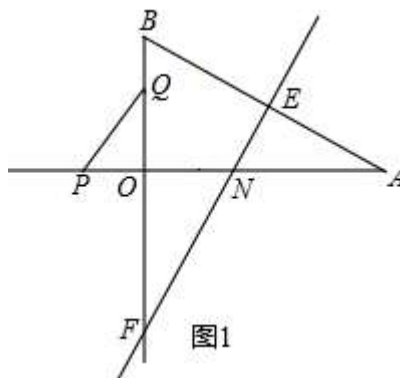
16. 如图，在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中， $\angle AOB=90^\circ$ ， $AO=\sqrt{3}$ ， $BO=1$ ，AB 的垂直平分线交 AB 于点 E，交射线 BO 于点 F。点 P 从点 A 出发沿射线 AO 以每秒 $2\sqrt{3}$ 个单位的速度运动，同时点 Q 从点 O 出发沿 OB 方向以每秒 1 个单位的速度运动，当点 Q 到达点 B 时，点 P、Q 同时停止运动。设运动的时间为 t 秒。



(1) 当 $t=$ _____时， $PQ\parallel EF$ ；

(2) 若 P、Q 关于点 O 的对称点分别为 P' 、 Q' ，当线段 $P'Q'$ 与线段 EF 有公共点时，t 的取值范围是_____。

解析：(1) 如图 1，当 $PQ\parallel EF$ 时，



则 $\angle QPO=\angle ENA$ ，

又 $\because \angle AEN=\angle QOP=90^\circ$ ， $\therefore \triangle AEN\sim \triangle QOP$ ，

$\because \angle AOB=90^\circ$ ， $AO=\sqrt{3}$ ， $BO=1$ ， $\therefore \tan A=\frac{BO}{AO}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ， $\therefore \angle A=\angle PQO=30^\circ$ ，

$$\therefore \frac{PO}{QO} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}t-3}{t}, \text{ 解得: } t = \frac{3}{5}, \text{ 故当 } t = \frac{3}{5} \text{ 时, } PQ \parallel EF.$$

答案: $\frac{3}{5}$

(2) 如图 2, 当 P 点介于 P₁ 和 P₂ 之间的区域时, P₁' 点介于 P₁' 和 P₂' 之间, 此时线段 P'Q' 与线段 EF 有交点,

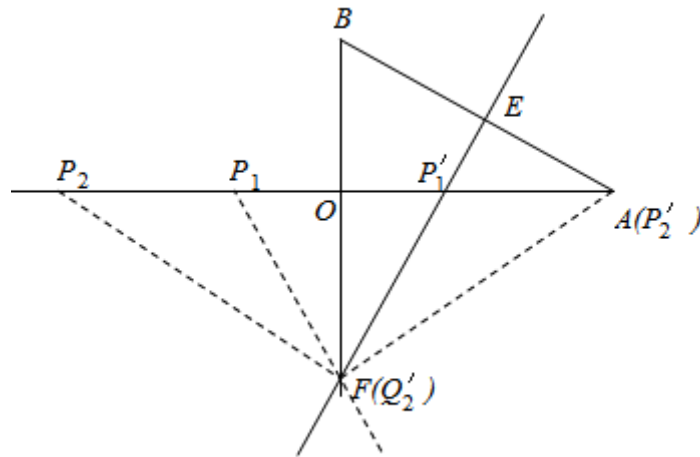


图2

当 P 运动到 P₁ 时,

$$\therefore AE = \frac{1}{2} AB = 1, \text{ 且易知 } \triangle AEP_1' \sim \triangle AOB,$$

$$\therefore \frac{AE}{AO} = \frac{AP_1'}{AB}, \therefore AP_1' = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \therefore P_1O = P_1'O = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore AP_1 = AO + P_1O = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{此时 P 点运动的时间 } t = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \text{ s},$$

当 P 点运动到 P₂ 时,

$$\therefore \angle BAO = 30^\circ, \angle BOA = 90^\circ, \therefore \angle B = 60^\circ,$$

\therefore AB 的垂直平分线交 AB 于点 E, $\therefore FB = FA$, $\therefore \triangle FBA$ 是等边三角形,

\therefore 当 $PO = OA = \sqrt{3}$ 时, 此时 Q₂' 与 F 重合, A 与 P₂' 重合,

$\therefore PA = 2\sqrt{3}$, 则 $t = 1$ 秒时, 线段 P'Q' 与线段 EF 有公共点,

故当 t 的取值范围是: $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$.

答案: $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$.

三、解答题(本大题共 9 小题, 满分 72 分, 解答应写出必要的步骤、文字说明或证明过程)

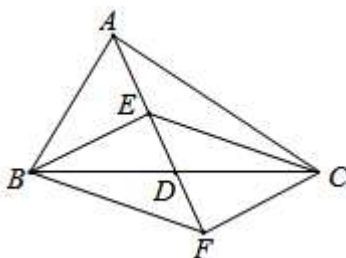
17. 先化简，再求值： $(1 + \frac{3}{a-2}) \div \frac{a+1}{a^2-4}$ ，其中 $a=-3$.

解析：先根据分式混合运算的法则把原式进行化简，再把 $a=-3$ 代入进行计算即可.

答案：原式 = $\frac{a+1}{a-2} \cdot \frac{(a+2)(a-2)}{a+1} = a+2$,

当 $a=-3$ 时，原式 = $-3+2=-1$.

18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 是 BC 的中点，点 E 、 F 分别是线段 AD 及其延长线上，且 $DE=DF$ ，给出下列条件：① $BE \perp EC$ ；② $BF \parallel EC$ ；③ $AB=AC$ ，从中选择一个条件使四边形 $BECF$ 是菱形，并给出证明，你选择的条件是_____ (只填写序号).



解析：根据点 D 是 BC 的中点，点 E 、 F 分别是线段 AD 及其延长线上，且 $DE=DF$ ，即可证明四边形 $BECF$ 是平行四边形，然后根据菱形的判定定理即可作出判断.

答案：选择③. $\because BD=CD, DE=DF$,

\therefore 四边形 $BECF$ 是平行四边形，

① $BE \perp EC$ 时，四边形 $BECF$ 是矩形，不一定是菱形；

② 四边形 $BECF$ 是平行四边形，则 $BF \parallel EC$ 一定成立，故不一定是菱形；

③ $AB=AC$ 时， $\because D$ 是 BC 的中点， $\therefore AF$ 是 BC 的中垂线， $\therefore BE=CE$ ， \therefore 平行四边形 $BECF$ 是菱形.

19. 为响应国家节能减排的号召，鼓励居民节约用电，各省先后出台了居民用电“阶梯价格”制度，如表中是某省的电价标准(每月). 例如：方女士家 5 月份用电 500 度，电费 = $180 \times 0.6 + 220 \times$ 二档电价 + $100 \times$ 三档电价 = 352 元；李先生家 5 月份用电 460 度，交费 316 元，请问表中二档电价、三档电价各是多少？阶梯电量电价

阶梯	电量	电价
一档	0-180度	0.6元/度
二档	181-400度	二档电价
三档	401度及以上	三档电价

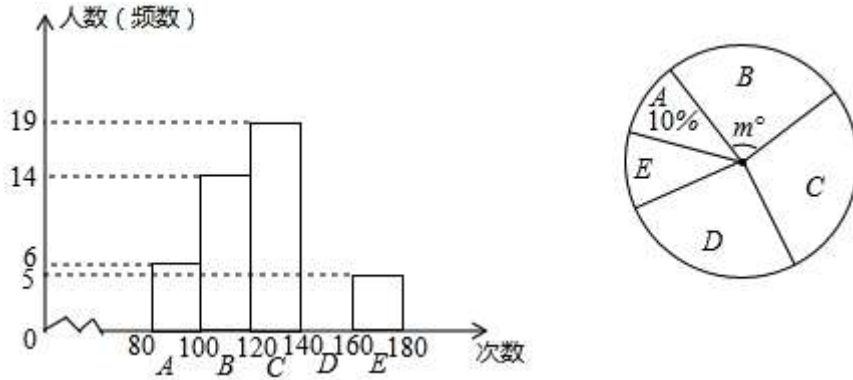
解析：设二档电价是 x 元/度、三档电价是 y 元/度，根据题意列出方程组求解即可.

答案：设二档电价是 x 元/度、三档电价是 y 元/度，

根据题意得，
$$\begin{cases} 180 \times 0.6 + 220x + 100y = 352, \\ 180 \times 0.6 + 220x + 60y = 316, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = 0.7, \\ y = 0.9, \end{cases}$$

答：二档电价是 0.7 元/度、三档电价是 0.9 元/度.

20. 某校申报“跳绳特色运动”学校一年后，抽样调查了部分学生的“1 分钟跳绳”成绩，并制成了下面的频数分布直方图(每组含最小值，不含最大值)和扇形图.



(1) 补全频数分布直方图，扇形图中 $m=$ _____；

(2) 若把每组中各个数据用这组数据的中间值代替(如 A 组 $80 \leq x < 100$ 的中间值是 $\frac{80+100}{2} = 90$ 次)，则这次调查的样本平均数是多少？

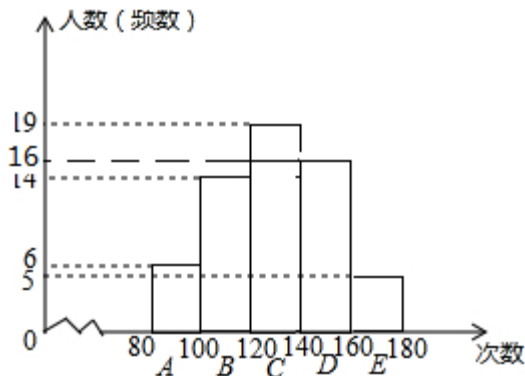
(3) 如果“1 分钟跳绳”成绩大于或等于 120 次为优秀，那么该校 2100 名学生中“1 分钟跳绳”成绩为优秀的大约有多少人？

解析：(1) 首先由第二小组有 10 人，占 20%，可求得总人数，再根据各小组频数之和等于数据总数求得第四小组的人数，作出统计图，先求出第一小组所占百分比，再乘以 360° 即可求出对应扇形圆心角的度数；

(2) 根据加权平均数的计算公式求出平均数即可；

(3) 求出样本中成绩优秀的人数所占的百分比，用样本估计总体即可.

答案：(1) 由直方图和扇形图可知，A 组人数是 6 人，占 10%，



则总人数： $6 \div 10\% = 60$ ， $m = \frac{14}{60} \times 360^\circ = 84^\circ$ ，D 组人数为： $60 - 6 - 14 - 19 - 5 = 16$.

(2) 平均数是： $\frac{90 \times 6 + 110 \times 14 + 130 \times 19 + 150 \times 16 + 170 \times 5}{60} = 130$ ；

(3) 绩为优秀的大约有： $2100 \times \frac{19 + 16 + 5}{60} = 1400$ 人.

21. 在学习概率的课堂上，老师提出问题：只有一张电影票，小明和小刚想通过抽取扑克牌的游戏来决定谁去看电影，请你设计一个对小明和小刚都公平的方案.

甲同学的方案：将红桃 2、3、4、5 四张牌背面向上，小明先抽一张，小刚从剩下的三张牌中抽一张，若两张牌上的数字之和是奇数，则小明看电影，否则小刚看电影。

(1) 甲同学的方案公平吗？请用列表或画树状图的方法说明；

(2) 乙同学将甲的方案修改为只用红桃 2、3、4 三张牌，抽取方式及规则不变，乙的方案公平吗？（只回答，不说明理由）

解析：(1) 依据题意先用列表法或画树状图法分析所有等可能的出现结果，然后根据概率公式求出该事件的概率，比较即可。

(2) 解题思路同上。

答案：(1) 甲同学的方案公平. 理由如下：列表法，

小明 小刚	2	3	4	5
2		(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)
3	(3, 2)		(3, 4)	(3, 5)
4	(4, 2)	(4, 3)		(4, 5)
5	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	

所有可能出现的结果共有 12 种，其中抽出的牌面上的数字之和为奇数的有：8 种，故小明

获胜的概率为： $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ ，则小刚获胜的概率为： $\frac{1}{3}$ ，

故此游戏两人获胜的概率不相同，即他们的游戏规则不公平。

(2) 不公平. 理由如下：

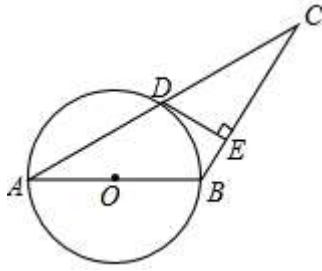
小明 小刚	2	3	4
2		(2, 3)	(2, 4)
3	(3, 2)		(3, 4)
4	(4, 2)	(4, 3)	

所有可能出现的结果共有 6 种，其中抽出的牌面上的数字之和为奇数的有：4 种，故小明获

胜的概率为： $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ，则小刚获胜的概率为： $\frac{1}{3}$ ，

故此游戏两人获胜的概率不相同，即他们的游戏规则不公平。

22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 AC 于点 D ，过点 D 作 $DE \perp BC$ 于点 E ，且 $\angle BDE = \angle A$ 。



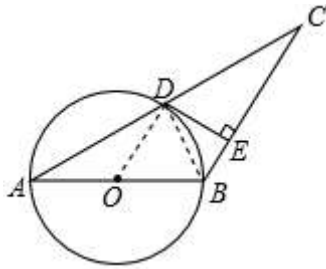
(1) 判断 DE 与 $\odot O$ 的位置关系并说明理由;

(2) 若 $AC=16$, $\tan A = \frac{3}{4}$, 求 $\odot O$ 的半径.

解析: (1) 连接 DO , BD , 如图, 由于 $\angle BDE = \angle A$, $\angle A = \angle ADO$, 则 $\angle ADO = \angle EDB$, 再根据圆周角定理得 $\angle ADB = 90^\circ$, 所以 $\angle ADO + \angle ODB = 90^\circ$, 于是得到 $\angle ODB + \angle EDB = 90^\circ$, 然后根据切线的判定定理可判断 DE 为 $\odot O$ 的切线;

(2) 利用等角的余角相等得 $\angle ABD = \angle EBD$, 加上 $BD \perp AC$, 根据等腰三角形的判定方法得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 所以 $AD = CD = \frac{1}{2} AC = 8$, 然后在 $Rt\triangle ABD$ 中利用正切定义可计算出 $BD = 6$, 再根据勾股定理计算出 AB , 从而得到 $\odot O$ 的半径.

答案: (1) DE 与 $\odot O$ 相切. 理由如下: 连接 DO , BD , 如图,



$\because \angle BDE = \angle A$, $\angle A = \angle ADO$, $\therefore \angle ADO = \angle EDB$,

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ADB = 90^\circ$, $\therefore \angle ADO + \angle ODB = 90^\circ$,

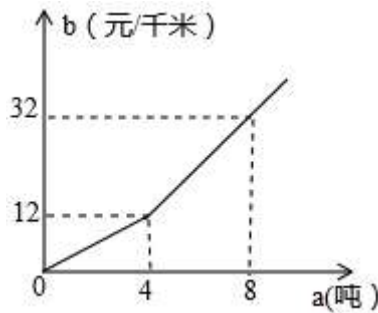
$\therefore \angle ODB + \angle EDB = 90^\circ$, 即 $\angle ODE = 90^\circ$, $\therefore OD \perp DE$, $\therefore DE$ 为 $\odot O$ 的切线.

(2) $\because \angle BDE = \angle A$, $\therefore \angle ABD = \angle EBD$,

而 $BD \perp AC$, $\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形, $\therefore AD = CD = \frac{1}{2} AC = 8$,

在 $Rt\triangle ABD$ 中, $\because \tan A = \frac{BD}{AD} = \frac{3}{4}$, $\therefore BD = \frac{3}{4} \times 8 = 6$, $\therefore AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$, $\therefore \odot O$ 的半径为 5.

23. 某农场急需铵肥 8 吨, 在该农场南北方向分别有一家化肥公司 A、B, A 公司有铵肥 3 吨, 每吨售价 750 元; B 公司有铵肥 7 吨, 每吨售价 700 元, 汽车每千米的运输费用 b (单位: 元/千米) 与运输重量 a (单位: 吨) 的关系如图所示.



(1) 根据图象求出 b 关于 a 的函数解析式(包括自变量的取值范围);

(2) 若农场到 B 公司的路程是农场到 A 公司路程的 2 倍, 农场到 A 公司的路程为 m 千米, 设农场从 A 公司购买 x 吨铵肥, 购买 8 吨铵肥的总费用为 y 元(总费用=购买铵肥费用+运输费用), 求出 y 关于 x 的函数解析式(m 为常数), 并向农场建议总费用最低的购买方案.

解析: (1) 利用待定系数法分别求出当 $0 \leq a \leq 4$ 和当 $a > 4$ 时, b 关于 a 的函数解析式;

(2) 由于 $1 \leq x \leq 3$, 则到 A 公司的运输费用满足 $b=3a$, 到 B 公司的运输费用满足 $b=5a-8$, 利用总费用=购买铵肥费用+运输费用得到 $y=750x+3mx+(8-x) \times 700+[5(8-x)-8] \cdot 2m$, 然后进行整理, 再利用一次函数的性质确定费用最低的购买方案.

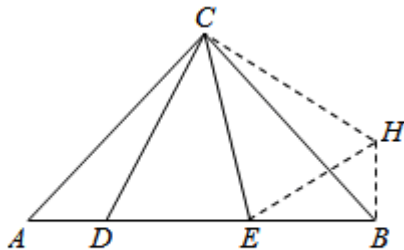
答案: (1) 当 $0 \leq a \leq 4$ 时, 设 $b=ka$, 把 $(4, 12)$ 代入得 $4k=12$, 解得 $k=3$, 所以 $b=3a$;

当 $a > 4$, 设 $b=ma+n$, 把 $(4, 12)$, $(8, 32)$ 代入得
$$\begin{cases} 4m+n=12, \\ 8m+n=32, \end{cases}$$
 解得
$$\begin{cases} m=5, \\ n=-8, \end{cases}$$
 所以 $b=5a-8$;

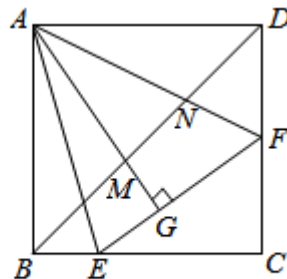
(2) $\because 1 \leq x \leq 3, \therefore y=750x+3mx+(8-x) \times 700+[5(8-x)-8] \cdot 2m=(50-7m)x+5600+64m$,

当 $m > \frac{50}{7}$ 时, 到 A 公司买 3 吨, 到 B 公司买 5 吨, 费用最低; 当 $m < \frac{50}{7}$ 时, 到 A 公司买 1 吨, 到 B 公司买 7 吨, 费用最低.

24. 问题: 如图(1), 在 $Rt\triangle ACB$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=CB$, $\angle DCE=45^\circ$, 试探究 AD、DE、EB 满足的等量关系.



图(1)



图(2)

[探究发现]

小聪同学利用图形变换, 将 $\triangle CAD$ 绕点 C 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle CBH$, 连接 EH, 由已知条件易得 $\angle EBH=90^\circ$, $\angle ECH=\angle ECB+\angle BCH=\angle ECB+\angle ACD=45^\circ$.

根据“边角边”, 可证 $\triangle CEH \cong$ _____, 得 $EH=ED$.

在 $Rt\triangle HBE$ 中, 由 _____ 定理, 可得 $BH^2+EB^2=EH^2$, 由 $BH=AD$, 可得 AD、DE、EB 之间的等量关系是 _____.

[实践运用]

(1) 如图(2), 在正方形 ABCD 中, $\triangle AEF$ 的顶点 E、F 分别在 BC、CD 边上, 高 AG 与正方形的

边长相等，求 $\angle EAF$ 的度数；

(2)在(1)条件下，连接BD，分别交AE、AF于点M、N，若 $BE=2$ ， $DF=3$ ， $BM=2\sqrt{2}$ ，运用小聪同学探究的结论，求正方形的边长及MN的长。

解析：(1)根据正方形的性质和全等三角形的判定方法证明 $Rt\triangle ABE\cong Rt\triangle AGE$ 和 $Rt\triangle ADF\cong Rt\triangle AGF$ ，由全等三角形的性质即可求出 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD=45^\circ$ ；

(2)由(1)知， $Rt\triangle ABE\cong Rt\triangle AGE$ ， $Rt\triangle ADF\cong Rt\triangle AGF$ ，设 $AG=x$ ，则 $CE=x-2$ ， $CF=x-3$ 。因为 $CE^2+CF^2=EF^2$ ，所以 $(x-2)^2+(x-3)^2=5^2$ 。解这个方程，求出 x 的值即可得到 $AG=6$ ，在(2)中，

$$MN^2=MB^2+ND^2, MN=a, a^2=(2\sqrt{2})^2+(6\sqrt{2}-2\sqrt{2}-a)^2, \text{ 所以 } a=\frac{5\sqrt{2}}{2}. \text{ 即 } MN=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

答案：根据“边角边”，可证 $\triangle CEH\cong \triangle CDE$ ，得 $EH=ED$ 。

在 $Rt\triangle HBE$ 中，由勾股定理，可得 $BH^2+EB^2=EH^2$ ，由 $BH=AD$ ，可得AD、DE、EB之间的等量关系是 $AD^2+EB^2=DE^2$ 。

(1)在 $Rt\triangle ABE$ 和 $Rt\triangle AGE$ 中，
$$\begin{cases} AB=AG, \\ AE=AE, \end{cases} \therefore Rt\triangle ABE\cong Rt\triangle AGE (HL), \therefore \angle BAE=\angle GAE,$$

同理， $Rt\triangle ADF\cong Rt\triangle AGF$ ， $\therefore \angle GAF=\angle DAF$ ，

\therefore 四边形ABCD是正方形， $\therefore \angle BAD=90^\circ$ ， $\therefore \angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD=45^\circ$ 。

(2)由(1)知， $Rt\triangle ABE\cong Rt\triangle AGE$ ， $Rt\triangle ADF\cong Rt\triangle AGF$ ，

$\therefore BE=EG=2$ ， $DF=FG=3$ ，则 $EF=5$ ，

设 $AG=x$ ，则 $CE=x-2$ ， $CF=x-3$ ，

$\therefore CE^2+CF^2=EF^2$ ， $\therefore (x-2)^2+(x-3)^2=5^2$ ，

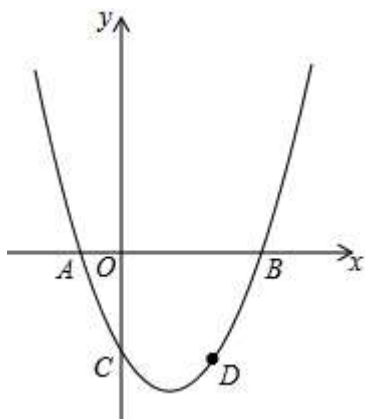
解这个方程，得 $x_1=6$ ， $x_2=-1$ (舍去)，

$\therefore AG=6$ ， $\therefore BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2AG^2}=6\sqrt{2}$ ， $\therefore AB=6$ ，

$\therefore MN^2=MB^2+ND^2$

设 $MN=a$ ，则 $a^2=(2\sqrt{2})^2+(6\sqrt{2}-2\sqrt{2}-a)^2$ ，所以 $a=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ，即 $MN=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 。

25. 如图，已知经过点 $D(2, -\sqrt{3})$ 的抛物线 $y=\frac{m}{3}(x+1)(x-3)$ (m 为常数，且 $m>0$)与 x 轴交于点A、B(点A位于B的左侧)，与 y 轴交于点C。



- (1) 填空: m 的值为 _____, 点 A 的坐标为 _____;
- (2) 根据下列描述, 用尺规完成作图(保留作图痕迹, 不写作法): 连接 AD , 在 x 轴上方作射线 AE , 使 $\angle BAE = \angle BAD$, 过点 D 作 x 轴的垂线交射线 AE 于点 E ;
- (3) 动点 M 、 N 分别在射线 AB 、 AE 上, 求 $ME + MN$ 的最小值;
- (4) l 是过点 A 平行于 y 轴的直线, P 是抛物线上一点, 过点 P 作 l 的垂线, 垂足为点 G , 请你探究: 是否存在点 P , 使以 P 、 G 、 A 为顶点的三角形与 $\triangle ABD$ 相似? 若存在, 求出点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由.

解析: (1) 把点 D 坐标代入抛物线 $y = \frac{m}{3}(x+1)(x-3)$, 即可得出 m 的值, 再令 $y=0$, 即可得出点 A 、 B 坐标;

- (2) 根据尺规作图的要求, 画出图形, 如图 1 所示;
- (3) 过点 D 作射线 AE 的垂线, 垂足为 N , 交 AB 于点 M , 此时 DN 的长度即为 $ME + MN$ 的最小值;
- (4) 假设存在点 P , 使以 P 、 G 、 A 为顶点的三角形与 $\triangle ABD$ 相似, 设点 P 坐标, 再表示出点 G 坐标, 计算 $\triangle ABD$ 的三边, 根据勾股定理的逆定理, 判断三角形的形状, 即可得出结论, 若 $\triangle ABD$ 是直角三角形, 即可得出相似, 再得出对应边成比例, 求得点 P 坐标即可.

答案: (1) \because 抛物线 $y = \frac{m}{3}(x+1)(x-3)$ 经过点 $D(2, -\sqrt{3})$, $\therefore m = \sqrt{3}$,

把 $m = \sqrt{3}$ 代入 $y = \frac{m}{3}(x+1)(x-3)$, 得 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)(x-3)$, 即 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$;

令 $y=0$, 得 $(x+1)(x-3)=0$, 解得 $x=-1$ 或 3 , $\therefore A(-1, 0)$, $B(3, 0)$.

(2) 如图 1 所示;

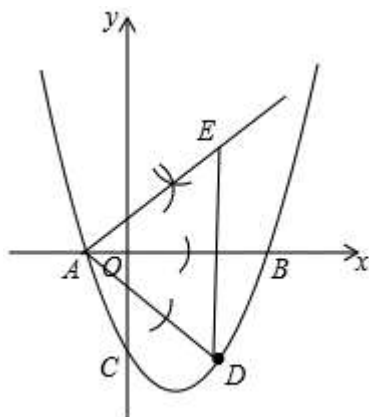
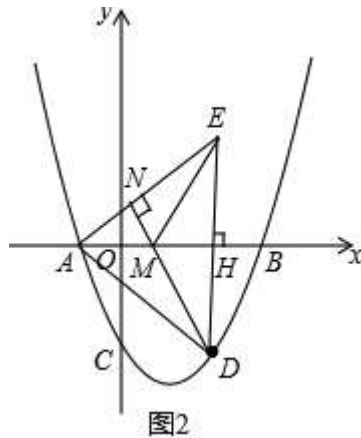


图1

(3) 过点 D 作射线 AE 的垂线, 垂足为 N , 交 AB 于点 M , 设 DE 与 x 轴交于点 H , 如图 2,



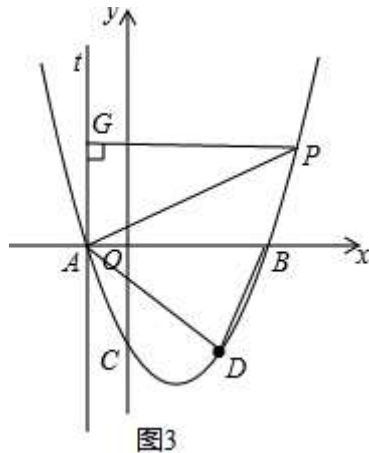
由(1)(2)得点D与点E关于x轴对称, $\therefore MD=ME$,

$\because AH=3, DH=\sqrt{3}, \therefore AD=2\sqrt{3}, \therefore \angle BAD=\angle BAE=30^\circ, \therefore \angle DAN=60^\circ, \therefore \sin \angle DAN=\frac{DN}{AD},$

$\therefore \sin 60^\circ = \frac{DN}{2\sqrt{3}}, \therefore DN=3,$

\therefore 此时DN的长度即为ME+MN的最小值, $\therefore ME+MN$ 的最小值为3.

(4)假设存在点P, 使以P、G、A为顶点的三角形与 $\triangle ABD$ 相似, 如图3,



$\because P$ 是抛物线上一点,

\therefore 设点P坐标 $(x, \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3})$; \therefore 点G坐标 $(-1, \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3})$,

$\because A(-1, 0), B(3, 0), D(2, -\sqrt{3}); \therefore AB=4, BD=2, AD=2\sqrt{3},$

$\therefore \triangle ABD$ 为直角三角形的形状, $\triangle ABD$ 与以P、G、A为顶点的三角形相似, 分两种情况:

当P点在x轴上方时,

① $\triangle ABD \sim \triangle PAG, \therefore \frac{BD}{AG} = \frac{AD}{PG}, \therefore 2(x+1) = 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}),$

解得 $x_1=4, x_2=-1$ (舍去), $\therefore P(4, \frac{5\sqrt{3}}{3})$;

$$\textcircled{2} \triangle ABD \sim \triangle APG, \therefore \frac{BD}{PG} = \frac{AD}{AG},$$

$$\therefore 2\sqrt{3}(x+1) = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}\right), \text{ 解得 } x_1=6, x_2=-1(\text{舍去}), \therefore P(6, 7\sqrt{3});$$

当 P 点在 x 轴下方时,

$$\textcircled{1} \triangle ABD \sim \triangle PAG, \therefore \frac{BD}{AG} = \frac{AD}{PG},$$

$$\therefore 2(x+1) = -2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}\right), \text{ 解得 } x_1=2, x_2=-1(\text{舍去}), \therefore P(2, -\sqrt{3});$$

$$\textcircled{2} \triangle ABD \sim \triangle APG, \therefore \frac{BD}{PG} = \frac{AD}{AG},$$

$$\therefore 2\sqrt{3}(x+1) = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}\right), \text{ 解得 } x_1=0, x_2=-1(\text{舍去}), \therefore P(0, -\sqrt{3});$$

综上所述, 点 P 坐标为 $(4, \frac{5\sqrt{3}}{3})$, $(6, 7\sqrt{3})$, $(2, -\sqrt{3})$ 或 $(0, -\sqrt{3})$.