

2015 年普通高等学校招生全国统一考试(新课标 II) 数学习

1. 已知集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | (x-1)(x+2) < 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1, 0\}$
- B. $\{0, 1\}$
- C. $\{-1, 0, 1\}$
- D. $\{0, 1, 2\}$

解析: $B = \{x | -2 < x < 1\}$, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $\therefore A \cap B = \{-1, 0\}$.

故选: A

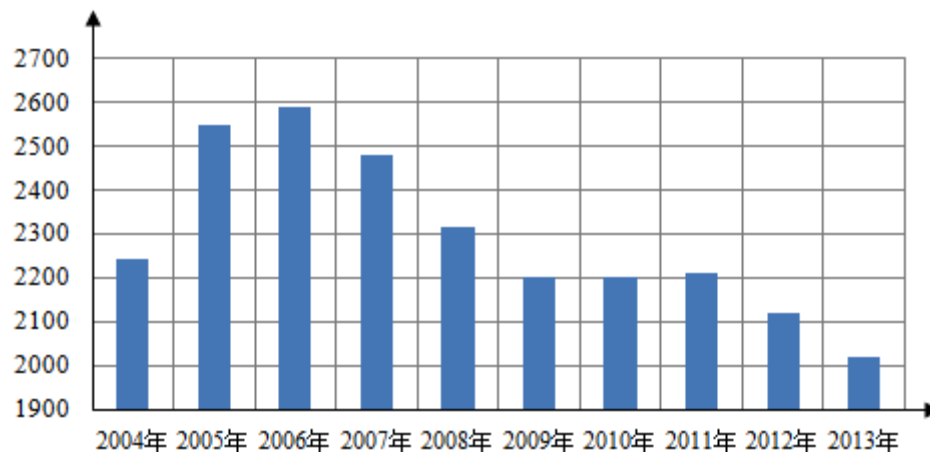
2. 若 a 为实数, 且 $(2+ai)(a-2i) = -4i$, 则 $a =$ ()

- A. -1
- B. 0
- C. 1
- D. 2

解析: 因为 $(2+ai)(a-2i) = -4i$, 所以 $4a + (a^2-4)i = -4i$, $4a = 0$, 并且 $a^2-4 = -4$, 所以 $a = 0$.

故选: B

3. 根据如图给出的 2004 年至 2013 年我国二氧化硫年排放量(单位: 万吨)柱形图, 以下结论中不正确的是 ()



- A. 逐年比较, 2008 年减少二氧化硫排放量的效果最显著
- B. 2007 年我国治理二氧化硫排放显现成效
- C. 2006 年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势
- D. 2006 年以来我国二氧化硫年排放量与年份正相关

解析: A 从图中明显看出 2008 年二氧化硫排放量比 2007 年的二氧化硫排放量明显减少, 且减少的最多, 故 A 正确;

B 2004-2006 年二氧化硫排放量越来越多, 从 2007 年开始二氧化硫排放量变少, 故 B 正确;

C 从图中看出, 2006 年以来我国二氧化硫年排放量越来越少, 故 C 正确;

D 2006 年以来我国二氧化硫年排放量越来越少, 而不是与年份正相关, 故 D 错误.

故选: D

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_1 + a_3 + a_5 = 21$, 则 $a_3 + a_5 + a_7 =$ ()

- A. 21
- B. 42
- C. 63
- D. 84

解析: $\because a_1=3, a_1+a_3+a_5=21,$

$$\therefore a_1(1+q^2+q^4)=21,$$

$$\therefore q^4+q^2+1=7,$$

$$\therefore q^4+q^2-6=0,$$

$$\therefore q^2=2,$$

$$\therefore a_3+a_5+a_7=a_1(q^2+q^4+q^6)=3 \times (2+4+8)=42.$$

故选: B

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1+\log_2(2-x), & x < 1 \\ 2^{x-1}, & \geq 1 \end{cases}$, 则 $f(-2)+f(\log_2 12) = (\quad)$

- A. 3
- B. 6
- C. 9
- D. 12

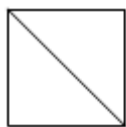
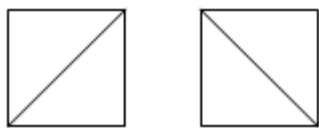
解析: 函数 $f(x) = \begin{cases} 1+\log_2(2-x), & x < 1 \\ 2^{x-1}, & \geq 1 \end{cases}$,

即有 $f(-2) = 1 + \log_2(2+2) = 1+2=3,$

$f(\log_2 12) = 2^{\log_2 12 - 1} = 12 \times \frac{1}{2} = 6,$ 则有 $f(-2)+f(\log_2 12) = 3+6=9.$

故选 C

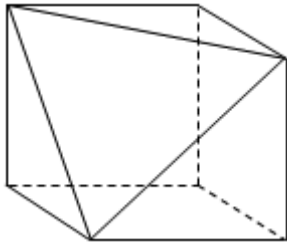
6. 一个正方体被一个平面截去一部分后, 剩余部分的三视图如图, 则截去部分体积与剩余部分体积的比值为()



- A. $\frac{1}{8}$
- B. $\frac{1}{7}$
- C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{5}$

解析：设正方体的棱长为1，由三视图判断，正方体被切掉的部分为以棱锥，



\therefore 正方体切掉部分的体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$,

\therefore 剩余部分体积为 $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$,

\therefore 截去部分体积与剩余部分体积的比值为 $\frac{1}{5}$.

故选：D

7. 过三点 A(1, 3), B(4, 2), C(1, -7) 的圆交 y 轴于 M, N 两点, 则 $|MN| = (\quad)$

A. $2\sqrt{6}$

B. 8

C. $4\sqrt{6}$

D. 10

解析：设圆的方程为 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, 则
$$\begin{cases} 1+9+D+3E+F=0 \\ 16+4+4D+2E+F=0 \\ 1+49+D-7E+F=0 \end{cases},$$

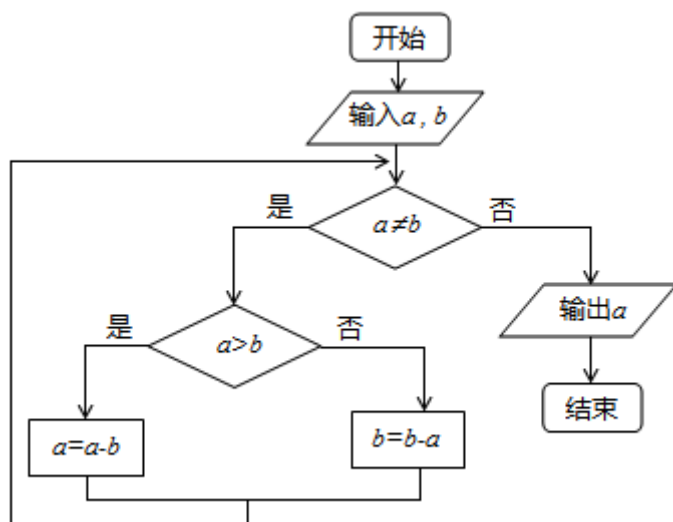
$\therefore D = -2, E = 4, F = -20$,

$\therefore x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$,

令 $x = 0$, 可得 $y^2 + 4y - 20 = 0$, $\therefore y = -2 \pm 2\sqrt{6}$, $\therefore |MN| = 4\sqrt{6}$.

故选：C

8. 如图程序抗土的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”. 执行该程序框图, 若输入 a, b 分别为 14, 18, 则输出的 a = ()



- A. 0
- B. 2
- C. 4
- D. 14

解析：模拟执行程序框图，可得 $a=14$, $b=18$ ，
 满足条件 $a \neq b$ ，不满足条件 $a > b$, $b=4$ ，
 满足条件 $a \neq b$ ，满足条件 $a > b$, $a=10$ ，
 满足条件 $a \neq b$ ，满足条件 $a > b$, $a=6$ ，
 满足条件 $a \neq b$ ，满足条件 $a > b$, $a=2$ ，
 满足条件 $a \neq b$ ，不满足条件 $a > b$, $b=2$ ，
 不满足条件 $a \neq b$ ，输出 a 的值为 2。

故选：B

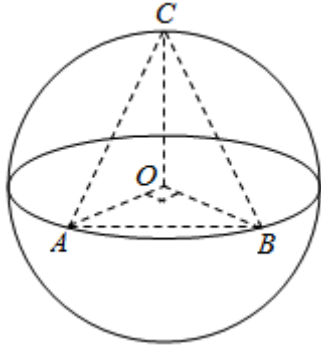
9. 已知 A, B 是球 O 的球面上两点, $\angle AOB=90^\circ$, C 为该球面上的动点, 若三棱锥 O-ABC 体积的最大值为 36, 则球 O 的表面积为()

- A. 36π
- B. 64π
- C. 144π
- D. 256π

解析：如图所示，当点 C 位于垂直于面 AOB 的直径端点时，三棱锥 O-ABC 的体积最大，设球

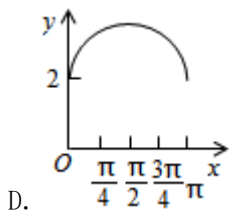
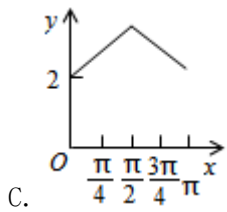
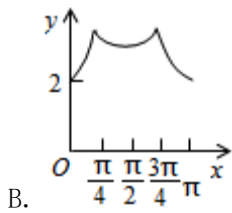
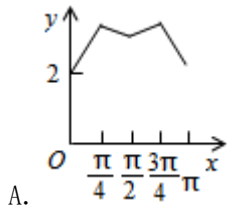
O 的半径为 R, 此时 $V_{O-ABC}=V_{C-AOB}=\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times R^2 \times R=16R^3=36$, 故 $R=6$, 则球 O 的表面积为 $4\pi R^2=144$

π .



故选 C

10. 如图，长方形 ABCD 的边 $AB=2$ ， $BC=1$ ， O 是 AB 的中点，点 P 沿着边 BC ， CD 与 DA 运动，记 $\angle BOP=x$ 。将动点 P 到 A ， B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$ ，则 $y=f(x)$ 的图象大致为 ()



解析：由对称性可知函数 $f(x)$ 关于 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，

且当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 时， $BP=\tan x$ ， $AP=\sqrt{AB^2+BP^2}=\sqrt{4+\tan^2 x}$ ，

此时 $f(x) = \sqrt{4 + \tan^2 x} + \tan x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, 此时单调递增, 排除 A, C (不是直线递增), D.

故选: B

11. 已知 A, B 为双曲线 E 的左, 右顶点, 点 M 在 E 上, $\triangle ABM$ 为等腰三角形, 顶角为 120° , 则 E 的离心率为 ()

A. $\sqrt{5}$

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{2}$

解析: 设 M 在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左支上,

且 $MA = AB = 2a$, $\angle MAB = 120^\circ$,

则 M 的坐标为 $(-2a, \sqrt{3}a)$,

代入双曲线方程可得 $\frac{4a^2}{a^2} - \frac{3a^2}{b^2} = 1$,

可得 $a = b$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}a$, 即有 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$.

故选: D

12. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) 的导函数, $f(-1) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $xf'(x) - f(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

解析: 设 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则 $g(x)$ 的导数为: $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$,

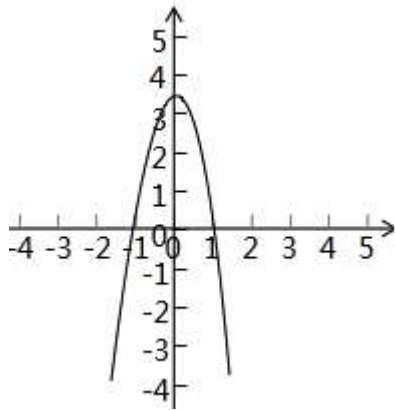
\because 当 $x > 0$ 时总有 $xf'(x) < f(x)$ 成立,

即当 $x > 0$ 时, $g'(x)$ 恒小于 0,

\therefore 当 $x > 0$ 时, 函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 为减函数,

又 $\because g(-x) = \frac{f(-x)}{-x} = \frac{-f(x)}{-x} = \frac{f(x)}{x} = f(x) \cdot \frac{1}{x} = g(x)$, \therefore 函数 $g(x)$ 为定义域上的偶函数

又 $\because g(-1) = \frac{f(-1)}{-1} = 0$, \therefore 函数 $g(x)$ 的图象性质类似如图:



数形结合可得, 不等式 $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \cdot g(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$, $\Leftrightarrow 0 < x < 1$
或 $x < -1$.

故选: A

13. 设向量 \vec{a} , \vec{b} 不平行, 向量 $\lambda \vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 平行, 则实数 $\lambda =$ _____.

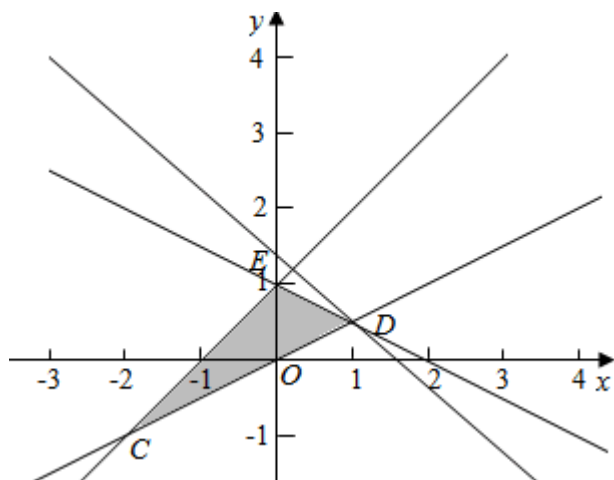
解析: 因为向量 \vec{a} , \vec{b} 不平行, 向量 $\lambda \vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 平行, 所以 $\lambda \vec{a} + \vec{b} = \mu (\vec{a} + 2\vec{b})$,

所以 $\begin{cases} \lambda = \mu \\ 1 = 2\mu \end{cases}$, 解得 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$.

故答案为: $\frac{1}{2}$

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x - 2y \leq 0 \\ x + 2y - 2 \leq 0 \end{cases}$, 则 $z = x + y$ 的最大值为 _____.

解析: 不等式组表示的平面区域如图阴影部分, 当直线经过 D 点时, z 最大,



由 $\begin{cases} x-2y=0 \\ x+2y-2=0 \end{cases}$ 得 $D(1, \frac{1}{2})$,

所以 $z=x+y$ 的最大值为 $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

故答案为: $\frac{3}{2}$

15. $(a+x)(1+x)^4$ 的展开式中 x 的奇数次幂项的系数之和为 32, 则 $a=$ _____.

解析: 设 $f(x)=(a+x)(1+x)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_5x^5$,

令 $x=1$, 则 $a_0+a_1+a_2+\dots+a_5=f(1)=16(a+1)$, ①

令 $x=-1$, 则 $a_0-a_1+a_2-\dots-a_5=f(-1)=0$. ②

①-②得, $2(a_1+a_3+a_5)=16(a+1)$,

所以 $2 \times 32=16(a+1)$, 所以 $a=3$.

故答案为: 3

16. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1=-1$, $a_{n+1}=S_n S_{n+1}$, 则 $S_n=$ _____.

解析: $\because a_{n+1}=S_n S_{n+1}$, $\therefore a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=S_n S_{n+1}$,

$$\therefore \frac{S_{n+1}-S_n}{S_{n+1}S_n} = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} = 1, \text{ 即 } \frac{1}{S_{n+1}} - \frac{1}{S_n} = -1,$$

又 $a_1=-1$, 即 $\frac{1}{S_1} - \frac{1}{a_1} = -1$, \therefore 数列 $\{\frac{1}{S_n}\}$ 是以首项和公差均为 -1 的等差数列,

$$\therefore \frac{1}{S_n} = -1 - 1(n-1) = -n, \therefore S_n = -\frac{1}{n}.$$

故答案为: $-\frac{1}{n}$

17. $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, $\triangle ABD$ 面积是 $\triangle ADC$ 面积的 2 倍.

(1) 求 $\frac{\sin \angle B}{\sin \angle C}$;

(2) 若 $AD=1$, $DC=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 求 BD 和 AC 的长.

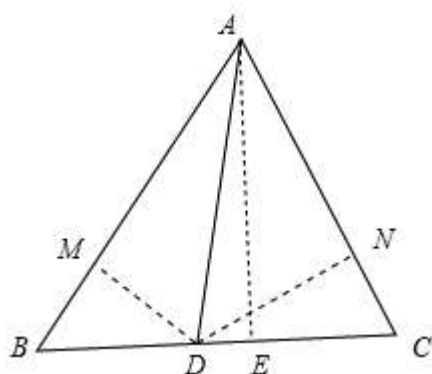
解析: (1) 如图, 过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E , 由已知及面积公式可得 $BD=2DC$, 由 AD 平分 $\angle BAC$ 及

正弦定理可得 $\frac{AD \times \sin \angle BAD}{BD}$, $\sin \angle C = \frac{AD \times \sin \angle DAC}{DC}$, 从而得解 $\frac{\sin \angle B}{\sin \angle C}$.

(2) 由(1)可求 $BD = \sqrt{2}$. 过 D 作 $DM \perp AB$ 于 M , 作 $DN \perp AC$ 于 N , 由 AD 平分 $\angle BAC$, 可求 $AB=2AC$,

令 $AC=x$, 则 $AB=2x$, 利用余弦定理即可解得 BD 和 AC 的长.

答案: (1) 如图, 过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E ,



$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}BD \times AE}{\frac{1}{2}DC \times AE} = 2, \therefore BD=2DC,$$

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $\therefore \angle BAD = \angle DAC$,

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, } \frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AD}{\sin \angle B}, \therefore \sin \angle B = \frac{AD \times \sin \angle BAD}{BD};$$

$$\text{在 } \triangle ADC \text{ 中, } \frac{DC}{\sin \angle DAC} = \frac{AD}{\sin \angle C}, \therefore \sin \angle C = \frac{AD \times \sin \angle DAC}{DC};$$

$$\therefore \frac{\sin \angle B}{\sin \angle C} = \frac{DC}{BD} = \frac{1}{2}.$$

(2) 由(1)知, $BD=2DC=2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

过 D 作 $DM \perp AB$ 于 M , 作 $DN \perp AC$ 于 N ,

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $\therefore DM=DN$,

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{\frac{1}{2}AB \times DM}{\frac{1}{2}AC \times DN} = 2, \therefore AB=2AC,$$

令 $AC=x$, 则 $AB=2x$,

$\because \angle BAD = \angle DAC, \therefore \cos \angle BAD = \cos \angle DAC,$

$$\frac{(2x)^2 + 1^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \times 2x \times 1} = \frac{x^2 + 1^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{2 \times x \times 1},$$

\therefore 由余弦定理可得:

$\therefore x=1, \therefore AC=1, \therefore BD$ 的长为 $\sqrt{2}$, AC 的长为 1.

18. 某公司为了了解用户对其产品的满意度, 从 A, B 两地区分别随机调查了 20 个用户, 得到用户对产品的满意度评分如下:

A 地区: 62 73 81 92 95 85 74 64 53 76

78 86 95 66 97 78 88 82 76 89

B 地区: 73 83 62 51 91 46 53 73 64 82

93 48 65 81 74 56 54 76 65 79

(1) 根据两组数据完成两地区用户满意度评分的茎叶图, 并通过茎叶图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度(不要求计算出具体值, 给出结论即可);

A地区		B地区
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	

(2) 根据用户满意度评分, 将用户的满意度从低到高分三个等级:

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

记事件 C: “A 地区用户的满意度等级高于 B 地区用户的满意度等级”, 假设两地区用户的评价结果相互独立, 根据所给数据, 以事件发生的频率作为相应事件发生的频率, 求 C 的概率.

解析: (I) 根据茎叶图的画法, 以及有关茎叶图的知识, 比较即可;

(II) 根据概率的互斥和对立, 以及概率的运算公式, 计算即可.

答案: (1) 两地区用户满意度评分的茎叶图如下:

A地区		B地区
	4	6 8
	5	1 3 4 6
3	6	2 4 5 5
6 4 2	7	3 3 4 6 9
6 8 8 6 4 3	8	1 2 3
9 8 6 5 2 1	9	1 3
7 5 5 2		

通过茎叶图可以看出, A 地区用户满意评分的平均值高于 B 地区用户满意评分的平均值; A 地区用户满意度评分比较集中, B 地区用户满意度评分比较分散;

(II) 记 C_{A1} 表示事件 “A 地区用户满意度等级为满意或非常满意”,

记 C_{A2} 表示事件 “A 地区用户满意度等级为非常满意”,

记 C_{B1} 表示事件“B 地区用户满意度等级为不满意”，

记 C_{B2} 表示事件“B 地区用户满意度等级为满意”，

则 C_{A1} 与 C_{B1} 独立， C_{A2} 与 C_{B2} 独立， C_{B1} 与 C_{B2} 互斥，

则 $C=C_{A1}C_{B1} \cup C_{A2}C_{B2}$ ，

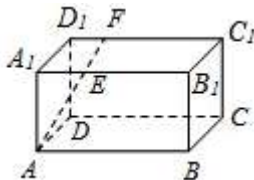
$P(C)=P(C_{A1}C_{B1})+P(C_{A2}C_{B2})=P(C_{A1})P(C_{B1})+P(C_{A2})P(C_{B2})$ ，

由所给的数据 C_{A1} ， C_{A2} ， C_{B1} ， C_{B2} ，发生的频率为 $\frac{16}{20}$ ， $\frac{4}{20}$ ， $\frac{10}{20}$ ， $\frac{8}{20}$ ，

所以 $P(C_{A1})=\frac{16}{20}$ ， $P(C_{A2})=\frac{4}{20}$ ， $P(C_{B1})=\frac{10}{20}$ ， $P(C_{B2})=\frac{8}{20}$ ，

所以 $P(C)=\frac{16}{20} \times \frac{10}{20} + \frac{4}{20} \times \frac{8}{20} = 0.48$ 。

19. 如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=16$ ， $BC=10$ ， $AA_1=8$ ，点 E, F 分别在 A_1B_1, D_1C_1 上， $A_1E=D_1F=4$ ，过点 E, F 的平面 α 与此长方体的面相交，交线围成一个正方形。



(1) 在图中画出这个正方形(不必说明画法和理由)；

(2) 求直线 AF 与平面 α 所成角的正弦值。

解析：(1) 容易知道所围成正方形的边长为 10，再结合长方体各边的长度，即可找出正方形的位置，从而画出这个正方形；

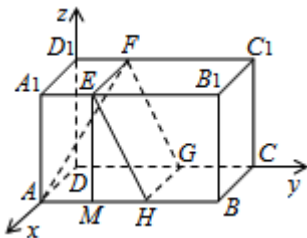
(2) 分别以直线 DA, DC, DD_1 为 x, y, z 轴，建立空间直角坐标系，考虑用空间向量解决本

问，能够确定 A, H, E, F 几点的坐标. 设平面 $EFGH$ 的法向量为 $\vec{n}=(x, y, z)$ ，根据
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{EH} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{EF} = 0 \end{cases}$$

即可求出法向量 \vec{n} ， \vec{AF} 坐标可以求出，可设直线 AF 与平面 $EFGH$ 所成角为 θ ，由 $\sin \theta = |\cos$

$\langle \vec{n}, \vec{AF} \rangle|$ 即可求得直线 AF 与平面 α 所成角的正弦值。

答案：(1) 交线围成的正方形 $EFGH$ 如图：



(2) 作 $EM \perp AB$ ，垂足为 M ，则：

$EH=EF=BC=10$ ， $EM=AA_1=8$ ；

$\therefore MH = \sqrt{EH^2 - EM^2} = 6$ ， $\therefore AH=10$ ；

以边 DA, DC, DD_1 所在直线为 x, y, z 轴，建立如图所示空间直角坐标系，则：

$A(10, 0, 0)$ ， $H(10, 10, 0)$ ， $E(10, 4, 8)$ ， $F(0, 4, 8)$ ；

$$\therefore \overrightarrow{EF} = (-10, 0, 0), \overrightarrow{EH} = (0, 6, -8);$$

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 EFGH 的法向量, 则:
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = -10x = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EH} = 6y - 8z = 0 \end{cases}$$
, 取 $z=3$, 则 $\vec{n} = (0, 4, 3)$;

若设直线 AF 和平面 EFGH 所成的角为 θ , 则:

$$\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AF}, \vec{n} \rangle| = \frac{40}{\sqrt{180} \cdot 5} = \frac{4\sqrt{5}}{15};$$

\therefore 直线 AF 与平面 α 所成角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{5}}{15}$.

20. 已知椭圆 C: $9x^2 + y^2 = m^2 (m > 0)$, 直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴, l 与 C 有两个交点 A, B, 线段 AB 的中点为 M.

(1) 证明: 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值;

(2) 若 l 过点 $(\frac{m}{3}, m)$, 延长线段 OM 与 C 交于点 P, 四边形 OAPB 能否为平行四边形? 若能,

求此时 l 的斜率; 若不能, 说明理由.

解析: (1) 联立直线方程和椭圆方程, 求出对应的直线斜率即可得到结论.

(2) 四边形 OAPB 为平行四边形当且仅当线段 AB 与线段 OP 互相平分, 即 $x_P = 2x_M$, 建立方程关系即可得到结论.

答案: (1) 设直线 l: $y = kx + b$, ($k \neq 0, b \neq 0$), $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_M, y_M)$,

将 $y = kx + b$ 代入 $9x^2 + y^2 = m^2 (m > 0)$, 得 $(k^2 + 9)x^2 + 2kbx + b^2 - m^2 = 0$,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = -\frac{2kb}{9+k^2}, \text{ 则 } x_M = \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{kb}{9+k^2}, y_M = kx_M + b = \frac{9b}{9+k^2},$$

于是直线 OM 的斜率 $k_{OM} = \frac{y_M}{x_M} = -\frac{9}{k}$, 即 $k_{OM} \cdot k = -9$,

\therefore 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值.

(2) 四边形 OAPB 能为平行四边形.

\because 直线 l 过点 $(\frac{m}{3}, m)$,

\therefore l 不过原点且与 C 有两个交点的充要条件是 $k > 0, k \neq 3$,

由(1)知 OM 的方程为 $y = -\frac{9}{k}x$,

设 P 的横坐标为 x_P ,

$$\text{由 } \begin{cases} y = -\frac{9}{k}x \\ 9x^2 + y^2 = m^2 \end{cases} \text{ 得 } x_P^2 = \frac{k^2 m^2}{9k^2 + 81}, \text{ 即 } x_P = \pm \frac{km}{3\sqrt{9+k^2}},$$

将点 $(\frac{m}{3}, m)$ 的坐标代入 l 的方程得 $b = \frac{m(3-k)}{3}$,

$$\frac{k(k-3)m}{3(9+k^2)},$$

因此 $x_M = \frac{k(k-3)m}{3(9+k^2)}$,

四边形 OAPB 为平行四边形当且仅当线段 AB 与线段 OP 互相平分, 即 $x_P = 2x_M$,

$$\text{于是 } \pm \frac{km}{3\sqrt{9+k^2}} = 2 \times \frac{k(k-3)m}{3(9+k^2)}, \text{ 解得 } k_1 = 4 - \sqrt{7} \text{ 或 } k_2 = 4 + \sqrt{7},$$

$\because k_i > 0, k_i \neq 3, i=1, 2,$

\therefore 当 l 的斜率为 $4 - \sqrt{7}$ 或 $4 + \sqrt{7}$ 时, 四边形 OAPB 能为平行四边形.

21. 设函数 $f(x) = e^{mx} + x^2 - mx$.

(1) 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增;

(2) 若对于任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq e - 1$, 求 m 的取值范围.

解析: (1) 利用 $f'(x) \geq 0$ 说明函数为增函数, 利用 $f'(x) \leq 0$ 说明函数为减函数. 注意参数 m 的讨论;

(2) 由(1)知, 对任意的 m, $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 单调递减, 在 $[0, 1]$ 单调递增, 则恒成立问题转化为最大值和最小值问题. 从而求得 m 的取值范围.

答案: (1) $f'(x) = m(e^{mx} - 1) + 2x$.

若 $m \geq 0$, 则当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $e^{mx} - 1 \leq 0, f'(x) < 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $e^{mx} - 1 \geq 0, f'(x) > 0$.

若 $m < 0$, 则当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $e^{mx} - 1 > 0, f'(x) < 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $e^{mx} - 1 < 0, f'(x) > 0$.

所以, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 时单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

(2) 由(1)知, 对任意的 m, $f(x)$ 在 $[-1, 0]$ 单调递减, 在 $[0, 1]$ 单调递增, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值.

所以对于任意 $x_1, x_2 \in [-1, 1], |f(x_1) - f(x_2)| \leq e - 1$ 的充要条件是 $\begin{cases} f(1) - f(0) \leq e - 1 \\ f(-1) - f(0) \leq e - 1 \end{cases}$,

$$\text{即 } \begin{cases} e^m - m \leq e - 1 \\ e^{-m} + m \leq e - 1 \end{cases} \quad \textcircled{1};$$

设函数 $g(t) = e^t - t - e + 1$, 则 $g'(t) = e^t - 1$.

当 $t < 0$ 时, $g'(t) < 0$; 当 $t > 0$ 时, $g'(t) > 0$. 故 $g(t)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

又 $g(1) = 0, g(-1) = e^{-1} + 2 - e < 0$, 故当 $t \in [-1, 1]$ 时, $g(t) \leq 0$.

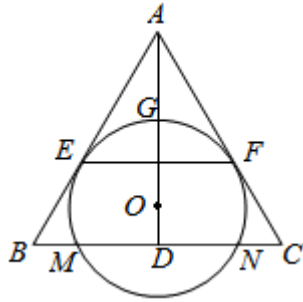
当 $m \in [-1, 1]$ 时, $g(m) \leq 0, g(-m) \leq 0$, 即合式成立;

当 $m > 1$ 时, 由 $g(t)$ 的单调性, $g(m) > 0$, 即 $e^m + m > e - 1$.

当 $m < -1$ 时, $g(-m) > 0$, 即 $e^{-m} + m > e - 1$.

综上, m 的取值范围是 $[-1, 1]$.

22. 如图, O 为等腰三角形 ABC 内一点, $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的底边 BC 交于 M, N 两点, 与底边上的高 AD 交于点 G, 且与 AB, AC 分别相切于 E, F 两点.



(1) 证明: $EF \parallel BC$;

(2) 若 AG 等于 $\odot O$ 的半径, 且 $AE=MN=2\sqrt{3}$, 求四边形 $EBCF$ 的面积.

解析: (1) 通过 AD 是 $\angle CAB$ 的角平分线及圆 O 分别与 AB 、 AC 相切于点 E 、 F , 利用相似的性质即得结论;

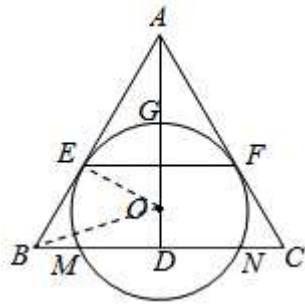
(2) 通过 (1) 知 AD 是 EF 的垂直平分线, 连结 OE 、 OM , 则 $OE \perp AE$, 利用 $S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AEF}$ 计算即可.

答案 (1) $\because \triangle ABC$ 为等腰三角形, $AD \perp BC$, $\therefore AD$ 是 $\angle CAB$ 的角平分线,

又 \because 圆 O 分别与 AB 、 AC 相切于点 E 、 F , $\therefore AE=AF$, $\therefore AD \perp EF$, $\therefore EF \parallel BC$.

(2) 由 (1) 知 $AE=AF$, $AD \perp EF$, $\therefore AD$ 是 EF 的垂直平分线,

又 $\because EF$ 为圆 O 的弦, $\therefore O$ 在 AD 上, 连结 OE 、 OM , 则 $OE \perp AE$,



由 AG 等于圆 O 的半径可得 $AO=2OE$,

$\therefore \angle OAE=30^\circ$, $\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle AEF$ 都是等边三角形,

$\therefore AE=2\sqrt{3}$, $\therefore AO=4$, $OE=2$,

$\because OM=OE=2$, $DM=\frac{1}{2}MN=\sqrt{3}$, $\therefore OD=1$, $\therefore AD=5$, $AB=\frac{10\sqrt{3}}{3}$,

\therefore 四边形 $EBCF$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times (\frac{10\sqrt{3}}{3})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C_1: \begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, $t \neq 0$, $0 \leq \alpha < \pi$) 在以 O 为极

点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_2: \rho = 2 \sin \theta$, 曲线 $C_3: \rho = 2\sqrt{3} \cos \theta$.

(1) 求 C_2 与 C_3 交点的直角坐标;

(2) 若 C_2 与 C_1 相交于点 A , C_1 与 C_3 相交于点 B , 求 $|AB|$ 的最大值.

解析: (1) 把曲线的极坐标分别化为直角坐标方程联立可得交点坐标;

(2) 求出曲线 C_1 的极坐标方程, 可得 A, B 的极坐标, 即可求 $|AB|$ 的最大值.

答案: (1) 曲线 C_2 : $\rho = 2\sin\theta$ 化为 $\rho^2 = 2\rho\sin\theta$, $\therefore x^2 + y^2 = 2y$.

曲线 C_3 : $\rho = 2\sqrt{3}\cos\theta$ 化为 $\rho^2 = 2\sqrt{3}\rho\cos\theta$, $\therefore x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}x$.

$$\text{联立 } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}.$$

$\therefore C_2$ 与 C_3 交点的直角坐标为 $(0, 0)$ 和 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$;

(2) 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\theta = \alpha$ ($\rho \in \mathbb{R}$, $\rho \neq 0$), 其中 $0 \leq \alpha < \pi$.

因此 A 的极坐标为 $(2\sin\alpha, \alpha)$, B 的极坐标为 $(2\sqrt{3}\cos\alpha, \alpha)$,

所以 $|AB| = |2\sin\alpha - 2\sqrt{3}\cos\alpha| = 4|\sin(\alpha - \frac{\pi}{3})|$,

当 $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ 时, $|AB|$ 取得最大值, 最大值为 4.

24. 设 a, b, c, d 均为正数, 且 $a+b=c+d$, 证明:

(1) 若 $ab > cd$, 则 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$;

(2) $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ 是 $|a-b| < |c-d|$ 的充要条件.

解析: (1) 运用不等式的性质, 结合条件 a, b, c, d 均为正数, 且 $a+b=c+d$, $ab > cd$, 即可得证;

(2) 从两方面证, ①若 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$, 证得 $|a-b| < |c-d|$, ②若 $|a-b| < |c-d|$, 证得 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$, 注意运用不等式的性质, 即可得证.

答案: (1) 由于 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$,

$$(\sqrt{c} + \sqrt{d})^2 = c+d+2\sqrt{cd},$$

由 a, b, c, d 均为正数, 且 $a+b=c+d$, $ab > cd$,

则 $\sqrt{ab} > \sqrt{cd}$,

即有 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{c} + \sqrt{d})^2$, 则.

(2) ①若 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$, 则 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{c} + \sqrt{d})^2$,

即为 $a+b+2\sqrt{ab} > c+d+2\sqrt{cd}$,

由 $a+b=c+d$, 则 $ab > cd$,

于是 $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$,

$(c-d)^2 = (c+d)^2 - 4cd$,

即有 $(a-b)^2 < (c-d)^2$, 即为 $|a-b| < |c-d|$;

②若 $|a-b| < |c-d|$, 则 $(a-b)^2 < (c-d)^2$,

即有 $(a+b)^2 - 4ab < (c+d)^2 - 4cd$,

由 $a+b=c+d$, 则 $ab > cd$,

则有 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{c} + \sqrt{d})^2$.

综上所述可得, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ 是 $|a-b| < |c-d|$ 的充要条件.