2015年普通高等学校招生全国统一考试（湖北卷）数学理

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. i为虚数单位，i^{607}的共轭复数为(　　)

A. i

B. -i

C. 1

D. -1

解析：$i^{607}=i^{604+3}=i^3=-i$，

它的共轭复数为：i.

故选：A.

2.我国古代数学名著《九章算术》有“米谷粒分”题：粮仓开仓收粮，有人送来米1534石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得254粒内夹谷28粒，则这批米内夹谷约为(　　)

A. 134石

B. 169石

C. 338石

D. 1365石

解析：由题意，这批米内夹谷约为$1534\times\frac{28}{254}\approx169$石，

故选：B.

3.已知$(1+x)^n$的展开式中第4项与第8项的二项式系数相等，则奇数项的二项式系数和为(　　)

A. 2^{12}

B. 2^{11}

C. 2^{10}

D. 2^9

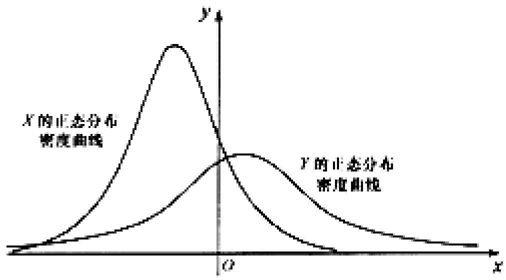
解析：已知$(1+x)^n$的展开式中第4项与第8项的二项式系数相等，

可得$C_n^3=C_n^7$，可得n=3+7=10.

$(1+x)^{10}$的展开式中奇数项的二项式系数和为：$\frac{1}{2}\times2^{10}=2^9$.

故选：D.

4.设$X\sim N(\mu_1,\ \sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\ \sigma_2^2)$，这两个正态分布密度曲线如图所示.下列结论中正确的是(　　)



A.P(Y≥μ_2)≥P(Y≥μ_1)

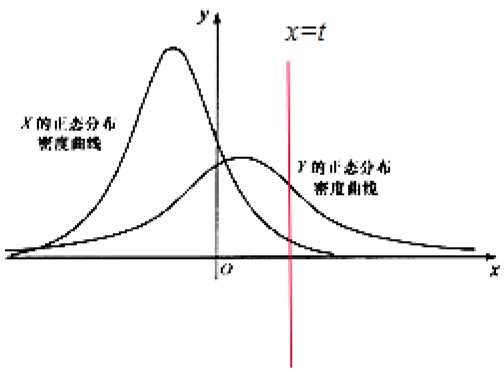
B.P(X≤σ_2)≤P(X≤σ_1)

C.对任意正数 t，P(X≤t)≥P(Y≤t)

D.对任意正数 t，P(X≥t)≥P(Y≥t)

解析：正态分布密度曲线图象关于 x=μ 对称，所以 $\mu_1<\mu_2$，从图中容易得到P(X≤t)≥P(Y≤t).

故选：C.



5.设 a_1，a_2，…，a_n∈R，n≥3.若 p：a_1，a_2，…，a_n成等比数列；q：$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2)(a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)=(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)^2$，则(　　)

A.p 是 q 的充分条件，但不是 q 的必要条件

B.p 是 q 的必要条件，但不是 q 的充分条件

C.p 是 q 的充分必要条件

D.p 既不是 q 的充分条件，也不是 q 的必要条件

解析：由 a_1，a_2，…，a_n∈R，n≥3.

运用柯西不等式，可得：

$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2)(a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)\geq(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)^2$，

若 a_1，a_2，…，a_n成等比数列，即有$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}$，

则$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2)(a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)=(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)^2$，

即由 p 推得 q，

但由 q 推不到 p，比如 $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n=0$，则 a_1，a_2，…，a_n不成等比数列.

故 p 是 q 的充分不必要条件.

故选：A.

6.已知符号函数 sgnx=$\begin{cases}1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0\end{cases}$，f(x)是 R 上的增函数，g(x)=f(x)-f(ax)(a>1)，则(　　)

A. sgn[g(x)]=sgnx

B. sgn[g(x)]=-sgnx

C. sgn[g(x)]=sgn[f(x)]

D. sgn[g(x)]=-sgn[f(x)]

解析：由于本题是选择题，可以常用特殊法，符号函数 sgnx=$\begin{cases}1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0\end{cases}$，f(x)是 R 上的增函数，g(x)=f(x)-f(ax)(a>1)，

不妨令 f(x)=x，a=2，

则 g(x)=f(x)-f(ax)=-x，

sgn[g(x)]=-sgnx.所以 A 不正确，B 正确，

sgn[f(x)]=sgnx，C 不正确；D 正确；

对于 D，令 f(x)=x+1，a=2，

则 g(x)=f(x)-f(ax)=-x-1，

sgn[f(x)]=sgn(x+1)=$\begin{cases}1, & x>-1 \\ 0, & x=-1 \\ -1, & x<-1\end{cases}$；

sgn[g(x)]=sgn(-x-1)=$\begin{cases}1, & x>-1 \\ 0, & x=-1 \\ -1, & x<-1\end{cases}$，

-sgn[f(x)]=-sgn(x+1)=$\begin{cases}-1, & x>-1 \\ 0, & x=-1 \\ 1, & x<-1\end{cases}$；所以 D 不正确；

故选：B.

7.在区间[0，1]上随机取两个数 x，y，记 P_1为事件“x+y≥$\frac{1}{2}$”的概率，P_2为事件“|x-y|≤$\frac{1}{2}$”的概率，P_3为事件“xy≤$\frac{1}{2}$”的概率，则(　　)

A. $P_1<P_2<P_3$

B. $P_2<P_3<P_1$

C. $P_3<P_1<P_2$

D. $P_3<P_2<P_1$

解析：分别作出事件对应的图象如图(阴影部分)：

P_1：$D(0,\frac{1}{2})$，$F(\frac{1}{2},0)$，$A(0,1)$，$B(1,1)$，$C(1,0)$，

则阴影部分的面积 $S_1=1\times1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$，

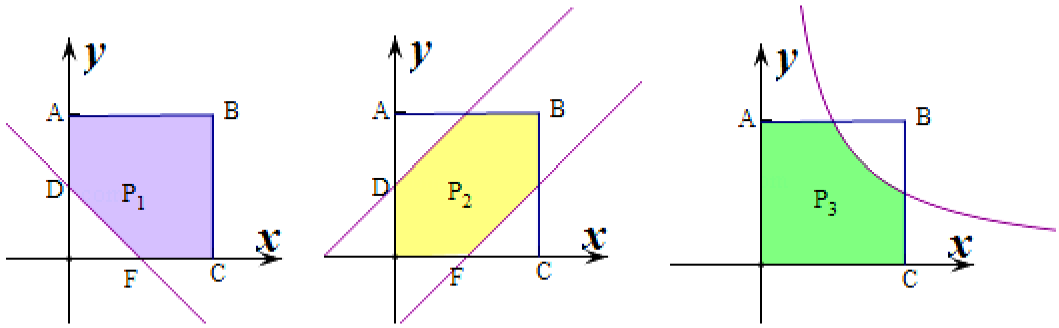
$S_2=1\times1-2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，

$S_3=1\times\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\frac{1}{2}}{x}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln x|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln2$，

∴$S_2<S_3<S_1$，

即 $P_2<P_3<P_1$，

故选：B.



8.将离心率为 e_1 的双曲线 C_1 的实半轴长 a 和虚半轴长 b($a\neq b$)同时增加 m($m>0$)个单位长度，得到离心率为 e_2 的双曲线 C_2，则(　　)

A.对任意的 a，b，$e_1>e_2$

B.当 $a>b$ 时，$e_1>e_2$；当 $a<b$ 时，$e_1<e_2$

C.对任意的 a，b，$e_1<e_2$

D.当 $a>b$ 时，$e_1<e_2$；当 $a<b$ 时，$e_1>e_2$

解析：由题意，双曲线 C_1：$c^2=a^2+b^2$，$e_1=\frac{c}{a}$；

双曲线 C_2：$c'^2=(a+m)^2+(b+m)^2$，$e_2=\frac{\sqrt{(a+m)^2+(b+m)^2}}{a+m}$，

$$\therefore e_1^2-e_2^2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{(b+m)^2}{(a+m)^2}=\frac{(b-a)(2abm+bm^2+am^2)}{a^2(a+m)^2},$$

∴当 $a>b$ 时，$e_1<e_2$；当 $a<b$ 时，$e_1>e_2$，

故选：D.

9.已知集合 $A=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant1,x,y\in Z\}$，$B=\{(x,y)||x|\leqslant2,|y|\leqslant2,x,y\in Z\}$，定义集合 $A\oplus B=\{(x_1+x_2,y_1+y_2)|(x_1,y_1)\in A,(x_2,y_2)\in B\}$，则 $A\oplus B$ 中元素的个数为(　　)

A.77

B.49

C.45

D.30
解析：∵$A=\{(x，y)|x^2+y^2\leqslant 1，x，y\in Z\}=\{(0，0)，(0，1)，(0，-1)，(1，0)，(-1，0)$，
$B=\{(x，y)||x|\leqslant 2，|y|\leqslant 2，x，y\in Z\}=\{(0，0)，(0，1)，(0，2)，(0，-1)，(0，-2)，(1，0)，(1，1)，(1，2)(1，-1)，(1，-2)(2，0)，(2，1)，(2，2)(2，-1)，(2，-2)，(-1，-2)，(-1，-1)，(-1，0)，(-1，1)，(-1，2)，(-2，-2)，(-2，-1)，(-2，0)，(-2，1)，(-2，2)\}$
∵$A\oplus B=\{(x_1+x_2，y_1+y_2)|(x_1，y_1)\in A，(x_2，y_2)\in B\}$，
∴$A\oplus B=\{(0，0)，(0，1)，(0，2)，(0，-1)，(0，-2)，(1，0)，(1，1)，(1，2)(1，-1)，(1，-2)(2，0)，(2，1)，(2，2)，(2，-1)，(2，-2)，(-1，-2)，(-1，-1)，(-1，0)，(-1，1)，(-1，2)，(-2，-2)，(-2，-1)，(-2，0)，(-2，1)，(-2，2)，(-2，3)，(-2，-3)，(0，-3)，(2，-3)，(-1，3)，(-1，-3)，(1，3)，(2，3)，(0，3)，(3，-1)，(3，0)(3，1)，(3，2)，(3，-2)(-3，2)(-3，1)，(1，-3)，(-3，-1)，(-3，0)，(-3，-2)\}$共45个元素
故选：C.

10.设$x\in R$，$[x]$表示不超过x的最大整数.若存在实数t，使得$[t]=1$，$[t^2]=2$，…，$[t^n]=n$同时成立，则正整数n的最大值是(　　)
A.3
B.4
C.5
D.6
解析：∵$[t]=1$，∴$t\in[1，2)$，
又∵$[t^2]=2$，∴$t^2\in[2，3)$，
∴$t\in[\sqrt{2}，\sqrt{3})$，
又$t^2\in[2，3)$，∴$t^4\in[4，9)$，
∴$[t^4]=4$，
∴正整数n的最大值4
故选：B.

二、填空题：本大题共4小题，考生需作答5小题，每小题5分，共25分.请将答案填在答题卡对应题号的位置上.答错位置，书写不清，模棱两可均不得分.

11.已知向量$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$，$|\overrightarrow{OA}|=3$，则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$_____.

解析：由$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AB}$，得$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，即$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$，

∵$|\overrightarrow{OA}|=3$，

∴$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|^2=9$.

故答案为：9.

12.函数$f(x)=4\cos^2\frac{x}{2}\cos(\frac{\pi}{2}-x)-2\sin x-|\ln(x+1)|$的零点个数为_____.
解析：函数f(x)的定义域为：$\{x|x>-1\}$.

$f(x)=4\cos^2\frac{x}{2}\cos(\frac{\pi}{2}-x)-2\sin x-|\ln(x+1)|$

$=2\sin x(2\cos^2\frac{x}{2}-1)-|\ln(x+1)|$

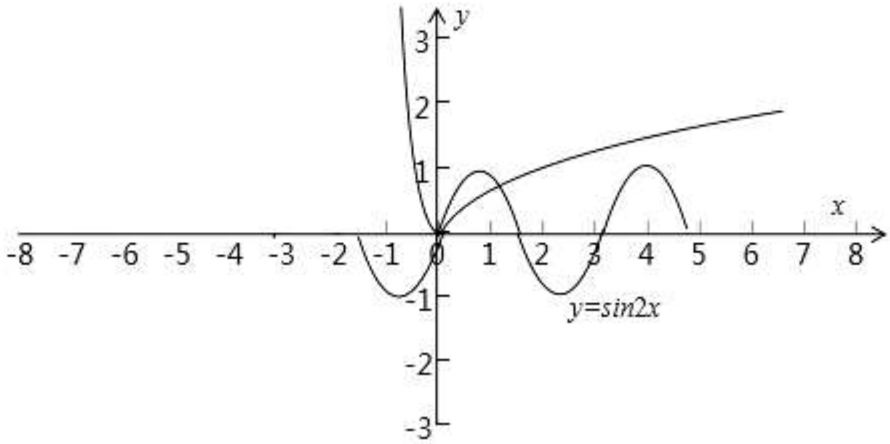
$=\sin 2x-|\ln(x+1)|$，

分别画出函数 $y=\sin 2x$，$y=|\ln(x+1)|$ 的图象，

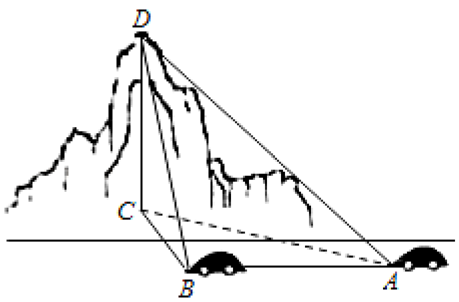
由函数的图象可知，交点个数为 2.

所以函数的零点有 2 个.

故答案为：2.



13.如图，一辆汽车在一条水平的公路上向正西行驶，到 A 处时测得公路北侧一山顶 D 在西偏北 30° 的方向上，行驶 600m 后到达 B 处，测得此山顶在西偏北 75° 的方向上，仰角为 30°，则此山的高度 CD=_____m.



解析：设此山高 h(m)，在△BCD 中，利用仰角的正切表示出 BC，进而在△ABC 中利用正弦定理求得 h.

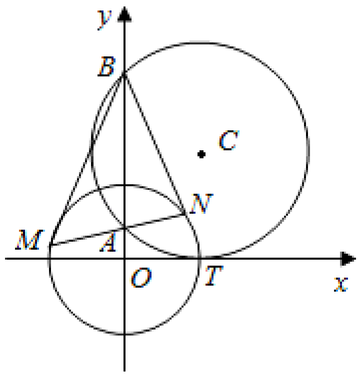
答案：设此山高 h(m)，则 $BC=\sqrt{3}h$，

在△ABC 中，∠BAC=30°，∠CBA=105°，∠BCA=45°，AB=600.

根据正弦定理得 $\frac{\sqrt{3}h}{\sin 30^\circ}=\frac{600}{\sin 45^\circ}$，

解得 $h=100\sqrt{6}$(m)

14.如图，圆 C 与 x 轴相切于点 T(1，0)，与 y 轴正半轴交于两点 A，B(B 在 A 的上方)，且 |AB|=2.



(1)圆 C 的标准方程为_____；

(2)过点 A 任作一条直线与圆 O：$x^2+y^2=1$ 相交于 M，N 两点，下列三个结论：

①$\frac{|NA|}{|NB|}=\frac{|MA|}{|MB|}$；　②$\frac{|NB|}{|NA|}-\frac{|MA|}{|MB|}=2$；　③$\frac{|NB|}{|NA|}+\frac{|MA|}{|MB|}=2\sqrt{2}$.

其中正确结论的序号是_____.(写出所有正确结论的序号)

解析：(1)取 AB 的中点 E，通过圆 C 与 x 轴相切于点 T，利用弦心距、半径与半弦长之间的关系，计算即可；

(2)设 M(cosα，sinα)，N(cosβ，sinβ)，计算出$\frac{|MA|}{|MB|}$、$\frac{|NA|}{|NB|}$、$\frac{|NB|}{|NA|}$的值即可.

答案：(1)∵圆 C 与 x 轴相切于点 T(1，0)，

∴圆心的横坐标 x=1，取 AB 的中点 E，

∵|AB|=2，∴|BE|=1，

则$|BC|=\sqrt{2}$，即圆的半径 $r=|BC|=\sqrt{2}$，

∴圆心 C(1，$\sqrt{2}$)，

则圆的标准方程为$(x-1)^2+(y-\sqrt{2})^2=2$，

故答案为：$(x-1)^2+(y-\sqrt{2})^2=2$.

(2)∵圆心 C(1，$\sqrt{2}$)，∴E(0，$\sqrt{2}$)，

又∵|AB|=2，且 E 为 AB 中点，

∴A(0，$\sqrt{2}-1$)，B(0，$\sqrt{2}+1$)，

∵M、N 在圆 O：$x^2+y^2=1$ 上，

∴可设 M(cosα，sinα)，N(cosβ，sinβ)，

∴$|NA|=\sqrt{(\cos\beta-0)^2+[\sin\beta-(\sqrt{2}-1)]^2}$

$=\sqrt{\cos^2\beta+\sin^2\beta-2(\sqrt{2}-1)\sin\beta+3-2\sqrt{2}}$

$=\sqrt{4-2\sqrt{2}-2(\sqrt{2}-1)\sin\beta}$

$=\sqrt{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)-2(\sqrt{2}-1)\sin\beta}$

$=\sqrt{2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-\sin\beta)}$，

$|NB|=\sqrt{(\cos\beta-0)^2+[\sin\beta-(\sqrt{2}+1)]^2}$

$=\sqrt{\cos^2\beta+\sin^2\beta-2(\sqrt{2}+1)\sin\beta+3+2\sqrt{2}}$

$=\sqrt{4+2\sqrt{2}-2(\sqrt{2}+1)\sin\beta}$

$=\sqrt{2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-\sin\beta)}$,

$\therefore\dfrac{|NA|}{|NB|}=\sqrt{\dfrac{2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-\sin\beta)}{2(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-\sin\beta)}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}=\sqrt{2}-1$,

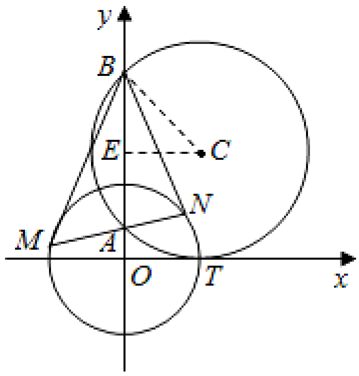
同理可得$\dfrac{|MA|}{|MB|}=\sqrt{2}-1$,

$\therefore\dfrac{|NA|}{|NB|}=\dfrac{|MA|}{|MB|}$,①成立,

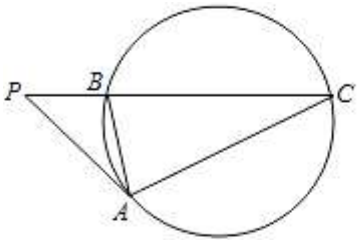
$\dfrac{|NB|}{|NA|}-\dfrac{|MA|}{|MB|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-(\sqrt{2}-1)=2$,②正确.

$\dfrac{|NB|}{|NA|}+\dfrac{|MA|}{|MB|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}$,③正确.

故答案为:①②③.



15.如图,PA是圆的切线,A为切点,PBC是圆的割线,且BC=3PB,则$\dfrac{AB}{AC}$=______.



解析:利用切割线定理推出PA=2PB,利用相似三角形求出比值即可.

答案:由切割线定理可知:$PA^2=PB\cdot PC$,又BC=3PB,

可得PA=2PB,

在△PAB与△PAC中,∠P=∠P,∠PAB=∠PCA(同弧上的圆周角与弦切角相等),

可得△PAB∽△PAC,

$\therefore\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{PB}{PA}=\dfrac{PB}{2PB}=\dfrac{1}{2}$.

故答案为:$\dfrac{1}{2}$.

16.在直角坐标系 xOy 中，以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho(\sin\theta-3\cos\theta)=0$，曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=t-\dfrac{1}{t}\\ y=t+\dfrac{1}{t}\end{cases}$（ t 为参数)，l 与 C 相交于 A，B 两点，则|AB|=______.

解析：化极坐标方程化直角坐标方程，参数方程化普通方程，联立直线方程和双曲线方程后求得交点坐标，由两点间的距离公式得答案.

答案：由 $\rho(\sin\theta-3\cos\theta)=0$，得 $y-3x=0$，

由 C 的参数方程为$\begin{cases}x=t-\dfrac{1}{t}\\ y=t+\dfrac{1}{t}\end{cases}$（ t 为参数)，两式平方作差得：$x^2-y^2=-4$.

联立$\begin{cases}y=3x\\ x^2-y^2=-4\end{cases}$，得$x^2=\dfrac{1}{2}$，即$x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore A(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{3\sqrt{2}}{2})$，$B(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{3\sqrt{2}}{2})$，

$\therefore|AB|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2}=2\sqrt{5}$.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.某同学用“五点法”画函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\phi)(\omega>0,|\phi|<\dfrac{\pi}{2})$在某一个周期内的图象时，列表并填入了部分数据，如表：

$\omega x+\phi$	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3\pi}{2}$	2π
x		$\dfrac{\pi}{3}$		$\dfrac{5\pi}{6}$	
$A\sin(\omega x+\phi)$	0	5		-5	0

(1)请将上表数据补充完整，填写在相应位置，并直接写出函数 f(x)的解析式；

(2)将 y=f(x)图象上所有点向左平行移动 $\theta(\theta>0)$个单位长度，得到 y=g(x)的图象.若 y=g(x)图象的一个对称中心为$(\dfrac{5\pi}{12},0)$，求 θ 的最小值.

解析：(1)根据表中已知数据，解得 A=5，$\omega=2$，$\phi=-\dfrac{\pi}{6}$.从而可补全数据，解得函数表达式为 $f(x)=5\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$.

(2)由(1)及函数 y=Asin(ωx+φ)的图象变换规律得 $g(x)=5\sin(2x+2\theta-\frac{\pi}{6})$. 令 $2x+2\theta-\frac{\pi}{6}=k\pi$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}-\theta$，k∈Z. 令 $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}-\theta=\frac{5\pi}{12}$，解得 $\theta=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$，k∈Z. 由 θ>0 可得解.

答案：(1)根据表中已知数据，解得 A=5，ω=2，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$. 数据补全如下表：

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{12}$
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	5	0	-5	0

且函数表达式为 $f(x)=5\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.

(2)由(1)知 $f(x)=5\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，得 $g(x)=5\sin(2x+2\theta-\frac{\pi}{6})$.

因为 y=sinx 的对称中心为(kπ，0)，k∈Z.

令 $2x+2\theta-\frac{\pi}{6}=k\pi$，解得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}-\theta$，k∈Z.

由于函数 y=g(x)的图象关于点($\frac{5\pi}{12}$，0)成中心对称，令 $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12}-\theta=\frac{5\pi}{12}$，

解得 $\theta=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$，k∈Z. 由 θ>0 可知，当 K=1 时，θ 取得最小值 $\frac{\pi}{6}$.

18. 设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，前 n 项和为 S_n，等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，已知 $b_1=a_1$，$b_2=2$，q=d，$S_{10}=100$.

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式

(2)当 d>1 时，记 $c_n=\frac{a_n}{b_n}$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n.

解析：(1)利用前 10 项和与首项、公差的关系，联立方程组计算即可；

(2)当 d>1 时，由(1)知 $c_n=\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，写出 T_n、$\frac{1}{2}T_n$ 的表达式，利用错位相减法及等比数列的求和公式，计算即可.

答案：(1)设 $a_1=a$，由题意可得 $\begin{cases}10a+45d=100\\ ad=2\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a=1\\ d=2\end{cases}$，或 $\begin{cases}a=9\\ d=\frac{2}{9}\end{cases}$，

当$\begin{cases} a=1 \\ d=2 \end{cases}$时，$a_n=2n-1$，$b_n=2^{n-1}$；

当$\begin{cases} a=9 \\ d=\frac{2}{9} \end{cases}$时，$a_n=\frac{1}{9}(2n+79)$，$b_n=9\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}$；

(2) 当 d＞1 时，由(1)知 $a_n=2n-1$，$b_n=2^{n-1}$，

∴$c_n=\frac{a_n}{b_n}=\frac{2n-1}{2^{n-1}}$，

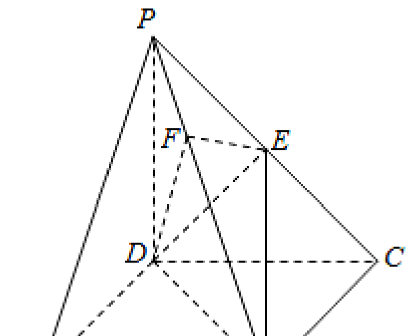
∴$T_n=1+3\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{2^2}+7\cdot\frac{1}{2^3}+9\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots+(2n-1)\cdot\frac{1}{2^{n-1}}$，

∴$\frac{1}{2}T_n=1\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2^2}+5\cdot\frac{1}{2^3}+7\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots+(2n-3)\cdot\frac{1}{2^{n-1}}+(2n-1)\cdot\frac{1}{2^n}$，

∴$\frac{1}{2}T_n=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-(2n-1)\cdot\frac{1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}$，

∴$T_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$.

19.《九章算术》中，将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马，将四个面都为直角三角形的四面体称之为鳖臑.如图，在阳马 P-ABCD 中，侧棱 PD⊥底面 ABCD，且 PD=CD，过棱 PC 的中点 E，作 EF⊥PB 交 PB 于点 F，连接 DE，DF，BD，BE.



(1) 证明：PB⊥平面 DEF.试判断四面体 DBEF 是否为鳖臑，若是，写出其每个面的直角(只需写出结论)；若不是，说明理由；

(2) 若面 DEF 与面 ABCD 所成二面角的大小为$\frac{\pi}{3}$，求$\frac{DC}{BC}$的值.

解析：(1) 直线与直线，直线与平面的垂直的转化证明得出 PB⊥EF，DE∩FE=E，所以 PB⊥平面 DEF，即可判断 DE⊥平面 PBC，PB⊥平面 DEF，可知四面体 BDEF 的四个面都是直角三角形，确定直角.

(2)根据公理 2 得出 DG 是平面 DEF 与平面 ACBD 的交线.利用直线平面的垂直判断出 DG⊥DF，DG⊥DB，根据平面角的定义得出∠BDF 是面 DEF 与面 ABCD 所成二面角的平面角，转化到直角三角形求解即可.

答案：(1)因为 PD⊥底面 ABCD，所以 PD⊥BC，

由底面 ABCD 为长方形，有 BC⊥CD，而 PD∩CD=D，

所以 BC⊥平面 ABCD.而 DE⊂平面 PDC，所以 BC⊥DE.

又因为 PD=CD，点 E 是 PC 的中点，所以 DE⊥PC.

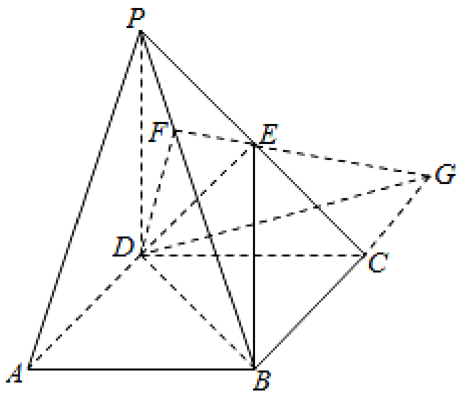
而 PC∩CB=C，所以 DE⊥平面 PBC.而 PB⊂平面 PBC，所以 PB⊥DE.

又 PB⊥EF，DE∩FE=E，所以 PB⊥平面 DEF.

由 DE⊥平面 PBC，PB⊥平面 DEF，可知四面体 BDEF 的四个面都是直角三角形，

即四面体 BDEF 是一个鳖臑，其四个面的直角分别为∠DEB，∠DEF，∠EFB，∠DFB.

(2)如图 1，



在面 BPC 内，延长 BC 与 FE 交于点 G，则 DG 是平面 DEF 与平面 ACBD 的交线.

由(1)知，PB⊥平面 DEF，所以 PB⊥DG.

又因为 PD⊥底面 ABCD，所以 PD⊥DG.而 PD∩PB=P，所以 DG⊥平面 PBD.

所以 DG⊥DF，DG⊥DB

故∠BDF 是面 DEF 与面 ABCD 所成二面角的平面角，

设 PD=DC=1，BC=λ，有 BD=$\sqrt{1+\lambda^2}$，

在 Rt△PDB 中，由 DF⊥PB，得∠DGF=∠FDB=$\frac{\pi}{3}$，

则 $\tan\frac{\pi}{3}=\tan\angle DPF=\frac{DB}{PD}=\sqrt{1+\lambda^2}=\sqrt{3}$，解得$\lambda=\sqrt{2}$.

所以$\frac{DC}{CB}=\frac{1}{\lambda}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

故当面 DEF 与面 ABCD 所成二面角的大小为$\frac{\pi}{3}$时，$\frac{DC}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20.某厂用鲜牛奶在某台设备上生产 A，B 两种奶制品.生产 1 吨 A 产品需鲜牛奶 2 吨，使用设备 1 小时，获利 1000 元；生产 1 吨 B 产品需鲜牛奶 1.5 吨，使用设备 1.5 小时，获利 1200 元.要求每天 B 产品的产量不超过 A 产品产量的 2 倍，设备每天生产 A，B 两种产品时

间之和不超过12小时.假定每天可获取的鲜牛奶数量W(单位：吨)是一个随机变量，其分布列为

W	12	15	18
P	0.3	0.5	0.2

该厂每天根据获取的鲜牛奶数量安排生产，使其获利最大，因此每天的最大获利Z(单位：元)是一个随机变量.

(1)求Z的分布列和均值;

(2)若每天可获取的鲜牛奶数量相互独立，求3天中至少有1天的最大获利超过10000元的概率.

解析：(1)设每天A，B两种产品的生产数量分别为x，y，相应的获利为z，列出可行域，目标函数，通过当W=12时，当W=15时，当W=18时，分别求出目标函数的最大获利，然后得到Z的分布列.求出期望即可.

(2)判断概率类型是二项分布，然后求解所求概率即可.

答案：(1)设每天A，B两种产品的生产数量分别为x，y，相应的获利为z，则有

$\begin{cases}2x+1.5y\leqslant W\\ x+1.5y\leqslant 12\\ 2x-y\geqslant 0\\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\end{cases}$，①如图1，目标函数为：z=1000x+1200y.

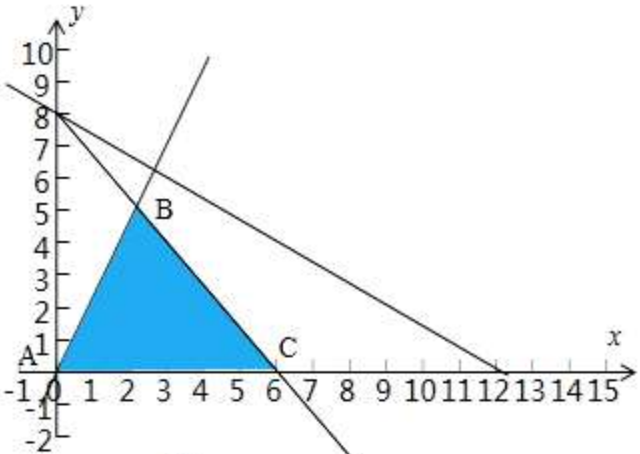


图1

当W=12时，①表示的平面区域如图1，三个顶点分别为A(0，0)，B(2.4，4.8)，C(6，0).

将z=1000x+1200y变形为$y=-\frac{5}{6}x+\frac{z}{1200}$,

当x=2.4，y=4.8时，直线l：$y=-\frac{5}{6}x+\frac{z}{1200}$在y轴上的截距最大,

最大获利Z=Z_{max}=2.4×1000+4.8×1200=8160.

当W=15时，①表示的平面区域如图2，三个顶点分别为A(0，0)，B(3，6)，C(7.5，0).

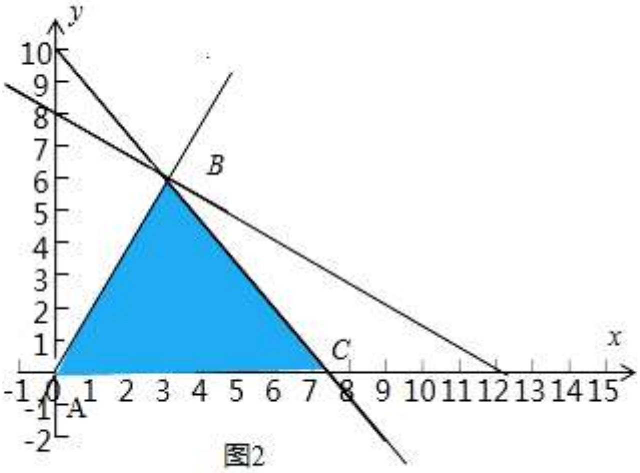


图2

将 z=1000x+1200y 变形为$y=-\frac{5}{6}x+\frac{z}{1200}$，

当 x=3，y=6 时，直线 l：$y=-\frac{5}{6}x+\frac{z}{1200}$在 y 轴上的截距最大，

最大获利 $Z=Z_{max}=3\times1000+6\times1200=10200$.

当 W=18 时，①表示的平面区域如图 3，四个顶点分别为 A(0，0)，B(3，6)，C(6，4)，D(9，0).

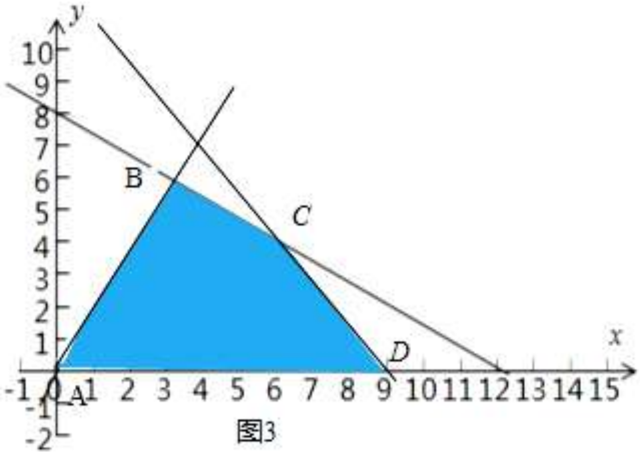


图3

将 z=1000x+1200y 变形为：$y=-\frac{5}{6}x+\frac{z}{1200}$，

当 x=6，y=4 时，直线 l：y=-56x+z1200 在 y 轴上的截距最大，最大获利 $Z=Z_{max}=6\times1000+4\times1200=10800$.

故最大获利 Z 的分布列为：

Z	8160	10200	10800
P	0.3	0.5	0.2

因此，E(Z)=8160×0.3+10200×0.5+10800×0.2=9708

(2)由(1)知，一天最大获利超过 10000 元的概率 $P_1=P(Z>10000)=0.5+0.2=0.7$，

由二项分布，3 天中至少有 1 天最大获利超过 10000 元的概率为：

$P=1-(1-P_1)^5=0.973$.

21.一种画椭圆的工具如图1所示.O是滑槽AB的中点，短杆ON可绕O转动，长杆MN通过N处铰链与ON连接，MN上的栓子D可沿滑槽AB滑动，且DN=ON=1，MN=3，当栓子D在滑槽AB内作往复运动时，带动N绕O转动，M处的笔尖画出的椭圆记为C，以O为原点，AB所在的直线为x轴建立如图2所示的平面直角坐标系.

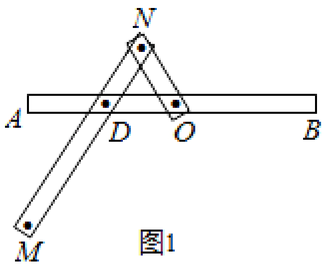


图1

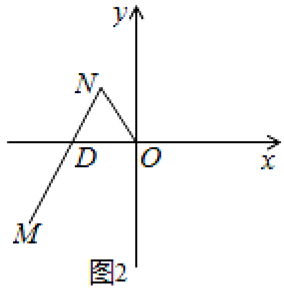


图2

(1)求椭圆C的方程；

(2)设动直线l与两定直线l_1：x-2y=0和l_2：x+2y=0分别交于P，Q两点.若直线l总与椭圆C有且只有一个公共点，试探究：△OPQ的面积是否存在最小值？若存在，求出该最小值；若不存在，说明理由.

解析：(1)根据条件求出a，b即可求椭圆C的方程；

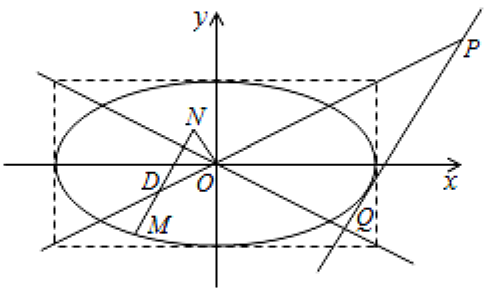
(2)联立直线方程和椭圆方程，求出原点到直线的距离，结合三角形的面积公式进行求解即可.

答案：(1)∵|OM|≤|MN|+|NO|=3+1=4，当M，N在x轴上时，等号成立，

同理|OM|≥|MN|-|NO|=3-1=2，当D，O重合，即MN⊥x轴时，等号成立.

∴椭圆C的中心为原点O，长半轴长为4，短半轴长为2，

其方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.



(2)①当直线l的斜率k不存在时，直线l为：x=4或x=-4，都有$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}\times4\times4=8$，

②直线l的斜率k存在时，直线l为：y=kx+m，$(k\neq\pm\frac{1}{2})$，

由$\begin{cases}y=kx+m\\x^2+4y^2=16\end{cases}$消去y，可得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-16=0$，

∵直线l总与椭圆C有且只有一个公共点，

∴$\triangle=64k^2m^2-4(1+4k^2)(4m^2-16)=0$，即$m^2=16k^2+4$，①，

由$\begin{cases}y=kx+m\\x-2y=0\end{cases}$，可得$P(\frac{2m}{1-2k},\frac{m}{1-2k})$，同理得$Q(\frac{-2m}{1+2k},\frac{m}{1+2k})$，

原点O到直线PQ的距离$d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$和$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_P-x_Q|$，

可得$S_{\triangle OPQ}=\frac{1}{2}|PQ|d=\frac{1}{2}|m||x_P-x_Q|=\frac{1}{2}|m|\left|\frac{2m}{1-2k}+\frac{2m}{1+2k}\right|=\left|\frac{2m^2}{1+4k^2}\right|$②，

将①代入②得$S_{\triangle OPQ}=\left|\frac{2m^2}{1+4k^2}\right|=8\left|\frac{4k^2+1}{4k^2-1}\right|$，

当$k^2>\frac{1}{4}$时，$S_{\triangle OPQ}=8\left(\frac{4k^2+1}{4k^2-1}\right)=8\left(1+\frac{2}{4k^2-1}\right)>8$，

当$0\leqslant k^2<\frac{1}{4}$时，$S_{\triangle OPQ}=8\left|\frac{4k^2+1}{4k^2-1}\right|=-8\left(\frac{4k^2+1}{4k^2-1}\right)=8\left(-1+\frac{2}{1-4k^2}\right)$，

$\because 0\leqslant k^2<\frac{1}{4}$时，$\therefore 0<1-4k^2\leqslant 1$，$\frac{2}{1-4k^2}\geqslant 2$，

$\therefore S_{\triangle OPQ}=8\left(-1+\frac{2}{1-4k^2}\right)\geqslant 8$，当且仅当$k=0$时取等号，

$\therefore$当$k=0$时，$S_{\triangle OPQ}$的最小值为8，

综上可知当直线l与椭圆C在四个顶点处相切时，三角形OPQ的面积存在最小值为8.

22.已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，$b_n=n(1+\frac{1}{n})^n a_n(n\in N_+)$，e为自然对数的底数.

(1)求函数$f(x)=1+x-e^x$的单调区间，并比较$(1+\frac{1}{n})^n$与e的大小；

(2)计算$\frac{b_1}{a_1}$，$\frac{b_1b_2}{a_1a_2}$，$\frac{b_1b_2b_3}{a_1a_2a_3}$，由此推测计算$\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}$的公式，并给出证明；

(3)令$c_n=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$，数列$\{a_n\}$，$\{c_n\}$的前n项和分别记为$S_n$，$T_n$，证明：$T_n<eS_n$.

解析：(1)求出f(x)的定义域，利用导数求其最大值，得到$1+x<e^x$.取$x=\frac{1}{n}$即可得到答案；

(2)由$b_n=n(1+\frac{1}{n})^n a_n(n\in N_+)$，变形求得$\frac{b_1}{a_1}$，$\frac{b_1b_2}{a_1a_2}$，$\frac{b_1b_2b_3}{a_1a_2a_3}$，由此推测$\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}=(n+1)^n$.然后利用数学归纳法证明.

(3)由 c_n 的定义、$\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}=(n+1)^n$、算术-几何平均不等式、$b_n$ 的定义及 $(1+\frac{1}{n})^n<e$，利用放缩法证得 $T_n<eS_n$.

答案：(1)解：$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，$f'(x)=1-e^x$.

当 $f'(x)>0$，即 $x<0$ 时，$f(x)$ 单调递增；

当 $f'(x)<0$，即 $x>0$ 时，$f(x)$ 单调递减.

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$，单调递减区间为 $(0, +\infty)$.

当 $x>0$ 时，$f(x)<f(0)=0$，即 $1+x<e^x$.

令 $x=\frac{1}{n}$，得 $1+\frac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}}$，即 $(1+\frac{1}{n})^n<e$.①

(2)解：$\frac{b_1}{a_1}=1\cdot(1+\frac{1}{1})^1=1+1=2$；$\frac{b_1b_2}{a_1a_2}=\frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{b_2}{a_2}=2\cdot2(1+\frac{1}{2})^2=(2+1)^2=3^2$；

$\frac{b_1b_2b_3}{a_1a_2a_3}=\frac{b_1b_2}{a_1a_2}\cdot\frac{b_3}{a_3}=3^2\cdot3(1+\frac{1}{3})^3=(3+1)^3=4^3$.

由此推测：$\frac{b_1b_2\cdots b_n}{a_1a_2\cdots a_n}=(n+1)^n$.②

下面用数学归纳法证明②.

(1)当 $n=1$ 时，左边=右边=2，②成立.

(2)假设当 $n=k$ 时，②成立，即 $\frac{b_1b_2\cdots b_k}{a_1a_2\cdots a_k}=(k+1)^k$.

当 $n=k+1$ 时，$b_{k+1}=(k+1)(1+\frac{1}{k+1})^{k+1}a_{k+1}$，由归纳假设可得

$\frac{b_1b_2\cdots b_kb_{k+1}}{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}=\frac{b_1b_2\cdots b_k}{a_1a_2\cdots a_k}\cdot\frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}(k+1)^k(k+1)(1+\frac{1}{k+1})^{k+1}=(k+2)^{k+1}$.

∴当 $n=k+1$ 时，②也成立.

根据(1)(2)，可知②对一切正整数 n 都成立.

(3)证明：由 c_n 的定义，②，算术-几何平均不等式，b_n 的定义及①得

$T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=(a_1)^{\frac{1}{1}}+(a_1a_2)^{\frac{1}{2}}+(a_1a_2a_3)^{\frac{1}{3}}+\cdots+(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}$

$=\frac{(b_1)^{\frac{1}{1}}}{2}+\frac{(b_1b_2)^{\frac{1}{2}}}{3}+\frac{(b_1b_2b_3)^{\frac{1}{3}}}{4}+\cdots+\frac{(b_1b_2\cdots b_n)^{\frac{1}{n}}}{n+1}$

$$\leqslant \frac{b_1}{1\times 2}+\frac{b_1+b_2}{2\times 3}+\frac{b_1+b_2+b_3}{3\times 4}+\cdots+\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n(n+1)}$$

$$=b_1\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]+b_2\left[\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$+\cdots+b_n\cdot\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=b_1\left(1-\frac{1}{n}\right)+b_2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+b_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$<\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_n}{n}=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 a_1+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 a_2+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n a_n$$

$<ea_1+ea_2+\cdots+ea_n=eS_n$.

即 $T_n<eS_n$.