

## 2017 年内蒙古包头市中考真题数学

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 3 分，共 36 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 计算  $(\frac{1}{2})^{-1}$  所得结果是( )

- A. - 2
- B.  $-\frac{1}{2}$
- C.  $\frac{1}{2}$
- D. 2

解析：  $(\frac{1}{2})^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$

答案： D.

2.  $a^2=1$ , b 是 2 的相反数, 则 a+b 的值为( )

- A. - 3
- B. - 1
- C. - 1 或 - 3
- D. 1 或 - 3

解析：  $\because a^2=1$ , b 是 2 的相反数,

$\therefore a=\pm 1, b=-2,$

①当  $a=-1, b=-2$  时,  $a+b=-3;$

②当  $a=1, b=-2$  时,  $a+b=-1.$

答案： C.

3. 一组数据 5, 7, 8, 10, 12, 12, 44 的众数是( )

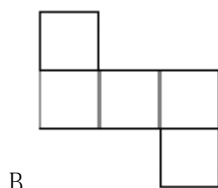
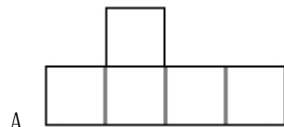
- A. 10
- B. 12
- C. 14
- D. 44

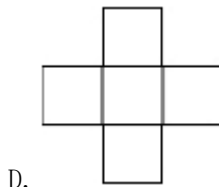
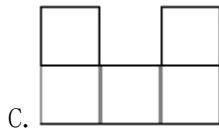
解析： 这组数据中 12 出现了 2 次, 次数最多,

$\therefore$  众数为 12.

答案： B.

4. 将一个无盖正方体形状盒子的表面沿某些棱剪开, 展开后不能得到的平面图形是( )





解析：由四棱柱的四个侧面及底面可知，A、B、D 都可以拼成无盖的正方体，但 C 拼成的有一个面重合，有两面没有的图形。

所以将一个无盖正方体形状盒子的表面沿某些棱展开后不能得到的平面图形是 C.

答案：C.

5. 下列说法中正确的是( )

A. 8 的立方根是  $\pm 2$

B.  $\sqrt{8}$  是一个最简二次根式

C. 函数  $y = \frac{1}{x-1}$  的自变量  $x$  的取值范围是  $x > 1$

D. 在平面直角坐标系中，点 P(2, 3) 与点 Q(-2, 3) 关于 y 轴对称

解析：A、8 的立方根是 2，故 A 不符合题意；

B、 $\sqrt{8}$  不是最简二次根式，故 B 不符合题意；

C、函数  $y = \frac{1}{x-1}$  的自变量  $x$  的取值范围是  $x \neq 1$ ，故 C 不符合题意；

D、在平面直角坐标系中，点 P(2, 3) 与点 Q(-2, 3) 关于 y 轴对称，故 D 符合题意。

答案：D.

6. 若等腰三角形的周长为 10cm，其中一边长为 2cm，则该等腰三角形的底边长为( )

A. 2cm

B. 4cm

C. 6cm

D. 8cm

解析：若 2cm 为等腰三角形的腰长，则底边长为  $10 - 2 - 2 = 6$ (cm)， $2 + 2 < 6$ ，不符合三角形的三边关系；

若 2cm 为等腰三角形的底边，则腰长为  $(10 - 2) \div 2 = 4$ (cm)，此时三角形的三边长分别为 2cm，4cm，4cm，符合三角形的三边关系。

答案：A.

7. 在一个不透明的口袋里有红、黄、蓝三种颜色的小球，这些球除颜色外部相同，其中有 5 个黄球，4 个蓝球. 若随机摸出一个蓝球的概率为  $\frac{1}{3}$ ，则随机摸出一个红球的概率为( )

A.  $\frac{1}{4}$

B.  $\frac{1}{3}$

C.  $\frac{5}{12}$

D.  $\frac{1}{2}$

解析：∵在一个不透明的口袋里有红、黄、蓝三种颜色的小球，三种球除颜色外其他完全相同，其中有 5 个黄球，4 个蓝球，

随机摸出一个蓝球的概率是  $\frac{1}{3}$ ，

设红球有  $x$  个，

$$\therefore \frac{4}{5+4+x} = \frac{1}{3},$$

解得： $x=3$

∴随机摸出一个红球的概率是： $\frac{3}{5+4+3} = \frac{1}{4}$ 。

答案：A.

8. 若关于  $x$  的不等式  $x - \frac{a}{2} < 1$  的解集为  $x < 1$ ，则关于  $x$  的一元二次方程  $x^2+ax+1=0$  根的情况是（ ）

- A. 有两个相等的实数根
- B. 有两个不相等的实数根
- C. 无实数根
- D. 无法确定

解析：解不等式  $x - \frac{a}{2} < 1$  得  $x < 1 + \frac{a}{2}$ ，

而不等式  $x - \frac{a}{2} < 1$  的解集为  $x < 1$ ，

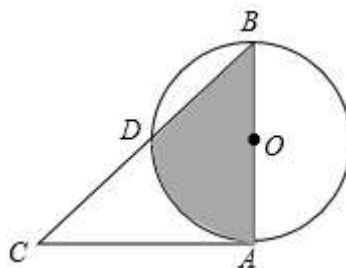
所以  $1 + \frac{a}{2} = 1$ ，解得  $a=0$ ，

又因为  $\Delta = a^2 - 4 = -4$ ，

所以关于  $x$  的一元二次方程  $x^2+ax+1=0$  没有实数根。

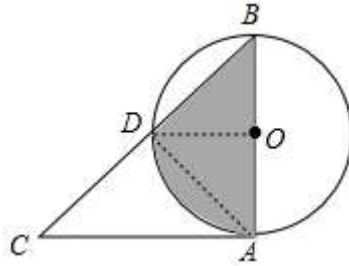
答案：C.

9. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB=AC$ ， $\angle ABC=45^\circ$ ，以  $AB$  为直径的  $\odot O$  交  $BC$  于点  $D$ ，若  $BC=4\sqrt{2}$ ，则图中阴影部分的面积为（ ）



- A.  $\pi + 1$
- B.  $\pi + 2$
- C.  $2\pi + 2$
- D.  $4\pi + 1$

解析：连接  $OD$ 、 $AD$ ，



$\because$  在  $\triangle ABC$  中,  $AB=AC$ ,  $\angle ABC=45^\circ$ ,  
 $\therefore \angle C=45^\circ$ ,  
 $\therefore \angle BAC=90^\circ$ ,  
 $\therefore \triangle ABC$  是  $\text{Rt}\triangle BAC$ ,  
 $\therefore BC=4\sqrt{2}$ ,  
 $\therefore AC=AB=4$ ,  
 $\therefore AB$  为直径,  
 $\therefore \angle ADB=90^\circ$ ,  $BO=DO=2$ ,  
 $\therefore OD=OB$ ,  $\angle B=45^\circ$ ,  
 $\therefore \angle B=\angle BDO=45^\circ$ ,  
 $\therefore \angle DOA=\angle BOD=90^\circ$ ,

$$\therefore \text{阴影部分的面积 } S = S_{\triangle BOD} + S_{\text{扇形 DOA}} = \frac{90\pi \cdot 2^2}{360} + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \pi + 2.$$

答案: B.

10. 已知下列命题:

- ①若  $\frac{a}{b} > 1$ , 则  $a > b$ ;
- ②若  $a+b=0$ , 则  $|a|=|b|$ ;
- ③等边三角形的三个内角都相等;
- ④底角相等的两个等腰三角形全等.

其中原命题与逆命题均为真命题的个数是 ( )

- A. 1 个
- B. 2 个
- C. 3 个
- D. 4 个

解析:  $\because$  当  $b < 0$  时, 如果  $\frac{a}{b} > 1$ , 那么  $a < b$ ,  $\therefore$  ①错误;

$\because$  若  $a+b=0$ , 则  $|a|=|b|$  正确, 但是若  $|a|=|b|$ , 则  $a+b=0$  错误,  $\therefore$  ②错误;

$\because$  等边三角形的三个内角都相等, 正确, 逆命题也正确,  $\therefore$  ③正确;

$\because$  底角相等的两个等腰三角形不一定全等,  $\therefore$  ④错误;

其中原命题与逆命题均为真命题的个数是 1 个.

答案: A.

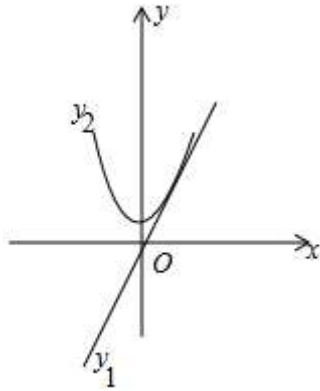
11. 已知一次函数  $y_1=4x$ , 二次函数  $y_2=2x^2+2$ , 在实数范围内, 对于  $x$  的同一个值, 这两个函数所对应的函数值为  $y_1$  与  $y_2$ , 则下列关系正确的是 ( )

- A.  $y_1 > y_2$
- B.  $y_1 \geq y_2$
- C.  $y_1 < y_2$
- D.  $y_1 \leq y_2$

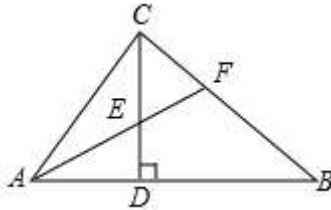
解析: 由  $\begin{cases} y = 4x \\ y = 2x^2 + 2 \end{cases}$  消去  $y$  得到:  $x^2 - 2x + 1 = 0$ ,

$\because \Delta=0$ ,  
 $\therefore$  直线  $y=4x$  与抛物线  $y=2x^2+2$  只有一个交点, 如图所示,  
 观察图象可知:  $y_1 \leq y_2$ .

答案: D.

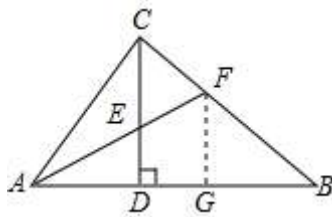


12. 如图, 在  $Rt\triangle ABC$  中,  $\angle ACB=90^\circ$ ,  $CD \perp AB$ , 垂足为  $D$ ,  $AF$  平分  $\angle CAB$ , 交  $CD$  于点  $E$ , 交  $CB$  于点  $F$ . 若  $AC=3$ ,  $AB=5$ , 则  $CE$  的长为( )



- A.  $\frac{3}{2}$
- B.  $\frac{4}{3}$
- C.  $\frac{5}{3}$
- D.  $\frac{8}{5}$

解析: 过点  $F$  作  $FG \perp AB$  于点  $G$ ,



$\because \angle ACB=90^\circ$ ,  $CD \perp AB$ ,  
 $\therefore \angle CDA=90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle CAF + \angle CFA = 90^\circ$ ,  $\angle FAD + \angle AED = 90^\circ$ ,  
 $\because AF$  平分  $\angle CAB$ ,  
 $\therefore \angle CAF = \angle FAD$ ,  
 $\therefore \angle CFA = \angle AED = \angle CEF$ ,  
 $\therefore CE = CF$ ,  
 $\because AF$  平分  $\angle CAB$ ,  $\angle ACF = \angle AGF = 90^\circ$ ,  
 $\therefore FC = FG$ ,  
 $\because \angle B = \angle B$ ,  $\angle FGB = \angle ACB = 90^\circ$ ,

$$\begin{aligned} &\therefore \triangle BFG \sim \triangle BAC, \\ &\therefore \frac{BF}{AB} = \frac{FG}{AC}, \\ &\because AC=3, AB=5, \angle ACB=90^\circ, \\ &\therefore BC=4, \\ &\therefore \frac{4-FC}{5} = \frac{FG}{3}, \\ &\therefore FC=FG, \\ &\therefore \frac{4-FC}{5} = \frac{FC}{3}, \end{aligned}$$

$$\text{解得: } FC = \frac{3}{2},$$

$$\text{即 CE 的长为 } \frac{3}{2}.$$

答案: A.

二、填空题: 本大题共有 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分, 将答案填在答题纸上

13. 2014 年至 2016 年, 中国同“一带一路”沿线国家贸易总额超过 3 万亿美元, 将 3 万亿美元用科学记数法表示为\_\_\_\_\_.

解析: 3 万亿 =  $3 \times 10^{12}$ .

答案:  $3 \times 10^{12}$ .

$$14. \text{化简: } \frac{a^2-1}{a^2} \div \left(\frac{1}{a}-1\right) \cdot a = \underline{\quad}.$$

$$\text{解析: 原式} = \frac{(a+1)(a-1)}{a^2} \cdot \frac{a}{-(a-1)} \cdot a = -(a+1) = -a-1.$$

答案:  $-a-1$

15. 某班有 50 名学生, 平均身高为 166cm, 其中 20 名女生的平均身高为 163cm, 则 30 名男生的平均身高为\_\_\_\_\_cm.

解析: 设男生的平均身高为  $x$ ,

$$\text{根据题意有: } \frac{20 \times 163 + 30x}{50} = 166, \text{ 解可得 } x = 168 \text{ (cm).}$$

答案: 168.

$$16. \text{若关于 } x、y \text{ 的二元一次方程组 } \begin{cases} x+y=3 \\ 2x-ay=5 \end{cases} \text{ 的解是 } \begin{cases} x=b \\ y=1 \end{cases}, \text{ 则 } a^b \text{ 的值为} \underline{\quad}.$$

$$\text{解析: } \because \text{关于 } x、y \text{ 的二元一次方程组 } \begin{cases} x+y=3 \\ 2x-ay=5 \end{cases} \text{ 的解是 } \begin{cases} x=b \\ y=1 \end{cases},$$

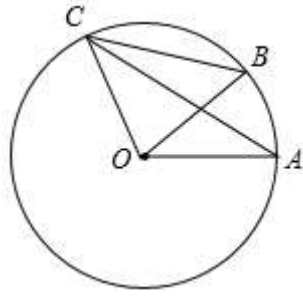
$$\therefore \begin{cases} b+1=3 \\ 2b-a=5 \end{cases},$$

$$\text{解得 } a=-1, b=2,$$

$$\therefore a^b = (-1)^2 = 1.$$

答案: 1.

17. 如图, 点 A、B、C 为  $\odot O$  上的三个点,  $\angle BOC = 2\angle AOB$ ,  $\angle BAC = 40^\circ$ , 则  $\angle ACB =$ \_\_\_\_\_度.



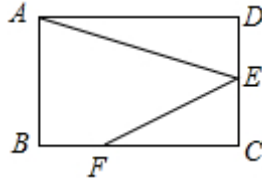
解析:  $\because \angle BAC = \frac{3}{4} \angle BOC, \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB,$

$\therefore \angle BOC = 2 \angle AOB,$

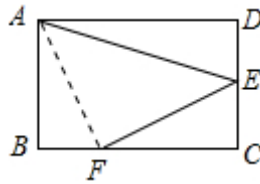
$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle BAC = 20^\circ.$

答案: 20.

18. 如图, 在矩形 ABCD 中, 点 E 是 CD 的中点, 点 F 是 BC 上一点, 且  $FC = 2BF$ , 连接 AE, EF. 若  $AB = 2, AD = 3$ , 则  $\cos \angle AEF$  的值是\_\_\_\_\_.



解析: 连接 AF, 如图所示:



$\because$  四边形 ABCD 是矩形,

$\therefore \angle B = \angle C = 90^\circ, CD = AB = 2, BC = AD = 3,$

$\because FC = 2BF,$

$\therefore BF = 1, FC = 2,$

$\therefore AB = FC,$

$\because E$  是  $CD$  的中点,

$\therefore CE = \frac{1}{2} CD = 1,$

$\therefore BF = CE,$

在  $\triangle ABF$  和  $\triangle FCE$  中, 
$$\begin{cases} AB = FC \\ \angle B = \angle C \\ BF = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle FCE$  (SAS),

$\therefore \angle BAF = \angle CFE, AF = FE,$

$\because \angle BAF + \angle AFB = 90^\circ,$

$\therefore \angle CFE + \angle AFB = 90^\circ,$

$\therefore \angle AFE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$

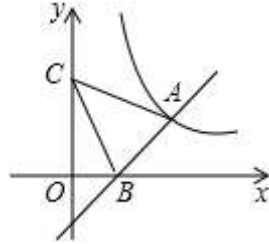
$\therefore \triangle AEF$  是等腰直角三角形,

$\therefore \angle AEF = 45^\circ,$

$$\therefore \cos \angle AEF = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{答案: } \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

19. 如图, 一次函数  $y=x-1$  的图象与反比例函数  $y=\frac{2}{x}$  的图象在第一象限相交于点 A, 与 x 轴相交于点 B, 点 C 在 y 轴上, 若  $AC=BC$ , 则点 C 的坐标为\_\_\_\_\_.



$$\text{解析: 由 } \begin{cases} y=x-1 \\ y=\frac{2}{x} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases},$$

$$\therefore A(2, 1), B(1, 0),$$

$$\text{设 } C(0, m),$$

$$\because BC=AC,$$

$$\therefore AC^2=BC^2,$$

$$\text{即 } 4+(m-1)^2=1+m^2,$$

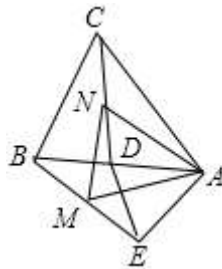
$$\therefore m=2.$$

$$\text{答案: } (0, 2).$$

20. 如图, 在  $\triangle ABC$  与  $\triangle ADE$  中,  $AB=AC$ ,  $AD=AE$ ,  $\angle BAC=\angle DAE$ , 且点 D 在 AB 上, 点 E 与点 C 在 AB 的两侧, 连接 BE, CD, 点 M、N 分别是 BE、CD 的中点, 连接 MN, AM, AN.

下列结论: ①  $\triangle ACD \cong \triangle ABE$ ; ②  $\triangle ABC \sim \triangle AMN$ ; ③  $\triangle AMN$  是等边三角形; ④ 若点 D 是 AB 的中点, 则  $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABE}$ .

其中正确的结论是\_\_\_\_\_. (填写所有正确结论的序号)



解析: ① 在  $\triangle ACD$  和  $\triangle ABE$  中,

$$\because \begin{cases} AC = AB \\ \angle BAC = \angle DAE, \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ABE \text{ (SAS)},$$

所以①正确;

$$\text{② } \because \triangle ACD \cong \triangle ABE,$$

$$\therefore CD=BE, \angle NCA = \angle MBA,$$

又  $\because$  M, N 分别为 BE, CD 的中点,



∴ CN=BM,

在△ACN 和△ABM 中,

$$\because \begin{cases} AC = AB \\ \angle ACN = \angle ABM, \\ CN = BM \end{cases}$$

∴ △ACN ≌ △ABM,

∴ AN=AM, ∠CAN=∠BAM,

∴ ∠BAC=∠MAN,

∴ AB=AC,

∴ ∠ACB=∠ABC,

∴ ∠ABC=∠AMN,

∴ △ABC ∽ △AMN,

所以②正确;

③ ∵ AN=AM,

∴ △AMN 为等腰三角形,

所以③不正确;

④ ∵ △ACN ≌ △ABM,

∴ S<sub>△ACN</sub> = S<sub>△ABM</sub>,

∵ 点 M、N 分别是 BE、CD 的中点,

∴ S<sub>△ACD</sub> = 2S<sub>△ACN</sub>, S<sub>△ABE</sub> = 2S<sub>△ABM</sub>,

∴ S<sub>△ACD</sub> = S<sub>△ABE</sub>,

∵ D 是 AB 的中点,

∴ S<sub>△ABC</sub> = 2S<sub>△ACD</sub> = 2S<sub>△ABE</sub>,

所以④正确;

本题正确的结论有: ①②④.

答案: ①②④.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 60 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

21. 有三张正面分别标有数字 -3, 1, 3 的不透明卡片, 它们除数字外都相同, 现将它们背面朝上, 洗匀后从三张卡片中随机地抽取一张, 放回卡片洗匀后, 再从三张卡片中随机地抽取一张.

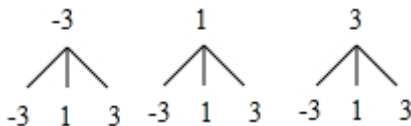
(1) 试用列表或画树状图的方法, 求两次抽取的卡片上的数字之积为负数的概率;

(2) 求两次抽取的卡片上的数字之和为非负数的概率.

解析: (1) 画出树状图列出所有等可能结果, 再找到数字之积为负数的结果数, 根据概率公式可得;

(2) 根据 (1) 中树状图列出数字之和为非负数的结果数, 再根据概率公式求解可得.

答案: (1) 画树状图如下:



由树状图可知, 共有 9 种等可能结果, 其中数字之积为负数的有 4 种结果,

∴ 两次抽取的卡片上的数字之积为负数的概率为  $\frac{4}{9}$ ;

(2) 在 (1) 种所列 9 种等可能结果中, 数字之和为非负数的有 6 种,

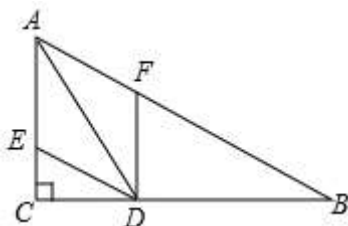
∴ 两次抽取的卡片上的数字之和为非负数的概率为  $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ .

22. 如图, 在△ABC 中, ∠C=90°, ∠B=30°, AD 是△ABC 的角平分线, DE∥BA 交 AC 于点 E,

DF//CA 交 AB 于点 F, 已知 CD=3.

(1) 求 AD 的长;

(2) 求四边形 AEDF 的周长. (注意: 本题中的计算过程和结果均保留根号)



解析: (1) 首先证明  $\angle CAD=30^\circ$ , 易知  $AD=2CD$  即可解决问题;

(2) 首先证明四边形 AEDF 是菱形, 求出 ED 即可解决问题;

答案: (1)  $\because \angle C=90^\circ$ ,  $\angle B=30^\circ$ ,

$\therefore \angle CAB=60^\circ$ ,

$\because AD$  平分  $\angle CAB$ ,

$\therefore \angle CAD=\frac{1}{2} \angle CAB=30^\circ$ ,

在  $Rt\triangle ACD$  中,  $\because \angle ACD=90^\circ$ ,  $\angle CAD=30^\circ$ ,

$\therefore AD=2CD=6$ .

(2)  $\because DE\parallel BA$  交  $AC$  于点  $E$ ,  $DF\parallel CA$  交  $AB$  于点  $F$ ,

$\therefore$  四边形 AEDF 是平行四边形,

$\because \angle EAD=\angle ADF=\angle DAF$ ,

$\therefore AF=DF$ ,

$\therefore$  四边形 AEDF 是菱形,

$\therefore AE=DE=DF=AF$ ,

在  $Rt\triangle CED$  中,  $\because \angle CDE=\angle B=30^\circ$ ,

$\therefore DE=\frac{CD}{\cos 30^\circ}=2\sqrt{3}$ ,

$\therefore$  四边形 AEDF 的周长为  $8\sqrt{3}$ .

23. 某广告公司设计一幅周长为 16 米的矩形广告牌, 广告设计费为每平方米 2000 元. 设矩形一边长为  $x$ , 面积为  $S$  平方米.

(1) 求  $S$  与  $x$  之间的函数关系式, 并写出自变量  $x$  的取值范围;

(2) 设计费能达到 24000 元吗? 为什么?

(3) 当  $x$  是多少米时, 设计费最多? 最多是多少元?

解析: (1) 由矩形的一边长为  $x$ 、周长为 16 得出另一边长为  $8-x$ , 根据矩形的面积公式可得答案;

(2) 由设计费为 24000 元得出矩形面积为 12 平方米, 据此列出方程, 解之求得  $x$  的值, 从而得出答案;

(3) 将函数解析式配方成顶点式, 可得函数的最值情况.

答案: (1)  $\because$  矩形的一边为  $x$  米, 周长为 16 米,

$\therefore$  另一边长为  $(8-x)$  米,

$\therefore S=x(8-x)=-x^2+8x$ , 其中  $0<x<8$ ;

(2) 能,

$\because$  设计费能达到 24000 元,

$\therefore$  当设计费为 24000 元时, 面积为  $24000\div 200=12$  (平方米),

即  $-x^2+8x=12$ ,

解得:  $x=2$  或  $x=6$ ,

∴设计费能达到 24000 元.

$$(3) \because S = -x^2 + 8x = -(x-4)^2 + 16,$$

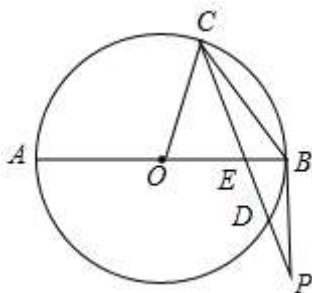
∴当  $x=4$  时,  $S_{\text{最大值}}=16$ ,

∴当  $x=4$  米时, 矩形的最大面积为 16 平方米, 设计费最多, 最多是 32000 元.

24. 如图, AB 是  $\odot O$  的直径, 弦 CD 与 AB 交于点 E, 过点 B 的切线 BP 与 CD 的延长线交于点 P, 连接 OC, CB.

(1) 求证:  $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ ;

(2) 若  $\odot O$  的半径为 3,  $OE=2BE$ ,  $\frac{CE}{DE} = \frac{9}{5}$ , 求  $\tan \angle OBC$  的值及 DP 的长.



解析: (1) 直接根据题意得出  $\triangle AED \sim \triangle CEB$ , 进而利用切线的性质的出答案;

(2) 利用已知得出 EC, DE 的长, 再利用勾股定理得出 CF 的长, t 即可得出  $\tan \angle OBC$  的值, 再利用全等三角形的判定与性质得出 DP 的长.

答案: (1) 证明: 连接 AD,

$$\because \angle A = \angle BCD, \angle AED = \angle CEB,$$

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle CEB,$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{ED}{EB},$$

$$\therefore AE \cdot EB = CE \cdot ED;$$

(2) 解:  $\because \odot O$  的半径为 3,

$$\therefore OA = OB = OC = 3,$$

$$\because OE = 2BE,$$

$$\therefore OE = 2, BE = 1, AE = 5,$$

$$\therefore \frac{CE}{DE} = \frac{9}{5},$$

$$\therefore \text{设 } CE = 9x, DE = 5x,$$

$$\because AE \cdot EB = CE \cdot ED,$$

$$\therefore 5 \times 1 = 9x \cdot 5x,$$

解得:  $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{1}{3}$  (不合题意舍去)

$$\therefore CE = 9x = 3, DE = 5x = \frac{5}{3},$$

过点 C 作  $CF \perp AB$  于 F,

$$\because OC = CE = 3,$$

$$\therefore OF = EF = \frac{1}{2} OE = 1,$$

$$\therefore BF = 2,$$

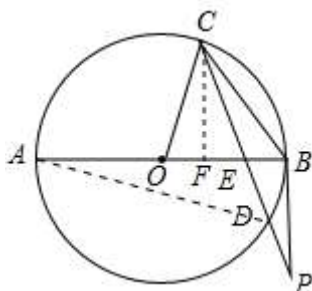
在  $\text{Rt} \triangle OCF$  中,

$$\because \angle CFO = 90^\circ,$$

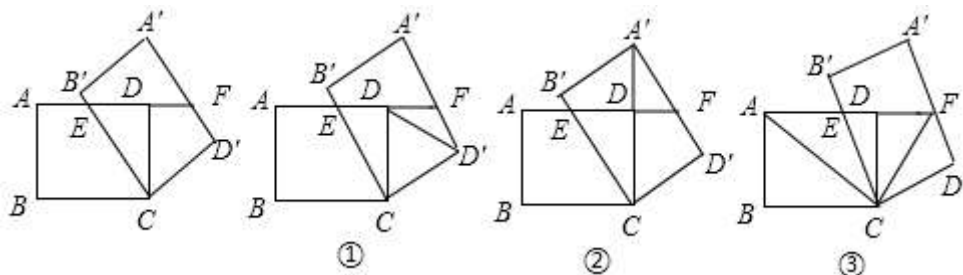
$$\therefore CF^2 + OF^2 = OC^2,$$

$\therefore CF=2\sqrt{2}$ ,  
 在  $Rt\triangle CFB$  中,  
 $\therefore \angle CFB=90^\circ$ ,  
 $\therefore \tan\angle OBC=\frac{CF}{BF}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ ,  
 $\therefore CF\perp AB$  于  $F$ ,  
 $\therefore \angle CFB=90^\circ$ ,  
 $\therefore BP$  是  $\odot O$  的切线,  $AB$  是  $\odot O$  的直径,  
 $\therefore \angle EBP=90^\circ$ ,  $\therefore \angle CFB=\angle EBP$ ,  
 在  $\triangle CFE$  和  $\triangle PBE$  中  

$$\begin{cases} \angle CFB = \angle PBE \\ EF = EF \\ \angle FEC = \angle BEP \end{cases},$$
 $\therefore \triangle CFE \cong \triangle PBE$  (ASA),  
 $\therefore EP=CE=3$ ,  
 $\therefore DP=EP - ED=3 - \frac{5}{3}=\frac{4}{3}$ .



25. 如图, 在矩形  $ABCD$  中,  $AB=3$ ,  $BC=4$ , 将矩形  $ABCD$  绕点  $C$  按顺时针方向旋转  $\alpha$  角, 得到矩形  $A'B'C'D'$ ,  $B'C$  与  $AD$  交于点  $E$ ,  $AD$  的延长线与  $A'D'$  交于点  $F$ .



(1) 如图①, 当  $\alpha=60^\circ$  时, 连接  $DD'$ , 求  $DD'$  和  $A'F$  的长;  
 (2) 如图②, 当矩形  $A'B'C'D'$  的顶点  $A'$  落在  $CD$  的延长线上时, 求  $EF$  的长;  
 (3) 如图③, 当  $AE=EF$  时, 连接  $AC$ ,  $CF$ , 求  $AC \cdot CF$  的值.  
 解析: (1) ①如图①中,  $\because$  矩形  $ABCD$  绕点  $C$  按顺时针方向旋转  $\alpha$  角, 得到矩形  $A'B'C'D'$ , 只要证明  $\triangle CDD'$  是等边三角形即可解决问题;  
 ②如图①中, 连接  $CF$ , 在  $Rt\triangle CD'F$  中, 求出  $FD'$  即可解决问题;  
 (2) 由  $\triangle A'DF \sim \triangle A'D'C$ , 可得  $\frac{A'D}{A'D'} = \frac{DF}{CD'}$ , 推出  $DF = \frac{3}{2}$ , 同理可得  $\triangle CDE \sim \triangle CB'A'$ , 由  $\frac{CD}{CB'} = \frac{ED}{A'B'}$ , 求出  $DE$ , 即可解决问题;

(3) 如图③中, 作  $FG \perp CB'$  于  $G$ , 由  $S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot CD$ , 把问题转化为求

AF · CD，只要证明  $\angle ACF=90^\circ$ ，证明  $\triangle CAD \sim \triangle FAC$ ，即可解决问题；

答案：(1) ①如图①中， $\because$  矩形 ABCD 绕点 C 按顺时针方向旋转  $\alpha$  角，得到矩形 A'B'C'D'，

$\therefore A'D' = AD = B'C = BC = 4$ ， $CD' = CD = A'B' = AB = 3$   $\angle A'D'C = \angle ADC = 90^\circ$ ，

$\therefore \alpha = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle DCD' = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle CDD'$  是等边三角形，

$\therefore DD' = CD = 3$ 。

②如图①中，连接 CF。 $\because CD = CD'$ ， $CF = CF$ ， $\angle CDF = \angle CD'F = 90^\circ$ ，

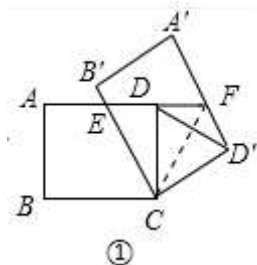
$\therefore \triangle CDF \cong \triangle CD'F$ ，

$\therefore \angle DCF = \angle D'CF = \frac{1}{2} \angle DCD' = 30^\circ$ ，

在  $\text{Rt}\triangle CD'F$  中， $\because \tan \angle D'CF = \frac{D'F}{CD'}$ ，

$\therefore D'F = \sqrt{3}$ ，

$\therefore A'F = A'D' - D'F = 4 - \sqrt{3}$ 。



(2) 如图②中，

在  $\text{Rt}\triangle A'CD'$  中， $\because \angle D' = 90^\circ$ ，

$\therefore A'C^2 = A'D'^2 + CD'^2$ ，

$\therefore A'C = 5$ ， $A'D' = 2$ ，

$\because \angle DA'F = \angle CA'D'$ ， $\angle A'DF = \angle D' = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle A'DF \sim \triangle A'D'C$ ，

$\therefore \frac{A'D}{A'D'} = \frac{DF}{CD'}$ ，

$\therefore \frac{2}{4} = \frac{DF}{3}$ ，

$\therefore DF = \frac{3}{2}$ ，

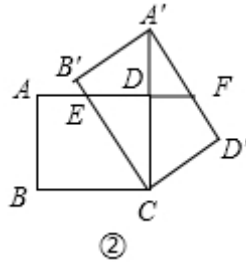
同理可得  $\triangle CDE \sim \triangle CB'A'$ ，

$\therefore \frac{CD}{CB'} = \frac{ED}{A'B'}$ ，

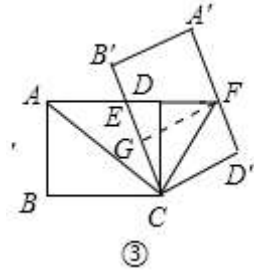
$\therefore \frac{3}{4} = \frac{ED}{3}$ ，

$\therefore ED = \frac{9}{4}$ ，

$\therefore EF = ED + DF = \frac{15}{4}$ 。



(3) 如图③中，作  $FG \perp CB'$  于  $G$ 。



$\because$  四边形  $A'B'CD'$  是矩形，  
 $\therefore GF = CD' = CD = 3$ ，  
 $\therefore S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot FG$ ，  
 $\therefore CE = EF$ ， $\therefore AE = EF$ ，  
 $\therefore AE = EF = CE$ ，  
 $\therefore \angle ACF = 90^\circ$ ，  
 $\therefore \angle ADC = \angle ACF$ ， $\angle CAD = \angle FAC$ ，  
 $\therefore \triangle CAD \sim \triangle FAC$ ，  
 $\therefore \frac{AC}{AF} = \frac{AD}{AC}$ ，  
 $\therefore AC^2 = AD \cdot AF$ ，  
 $\therefore AF = \frac{25}{4}$ ，  
 $\therefore S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot CD$ ，  
 $\therefore AC \cdot CF = AF \cdot CD = \frac{75}{4}$ 。

26. 如图，在平面直角坐标系中，已知抛物线  $y = \frac{3}{2}x^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于  $A(-1, 0)$ ， $B(2, 0)$

两点，与  $y$  轴交于点  $C$ 。

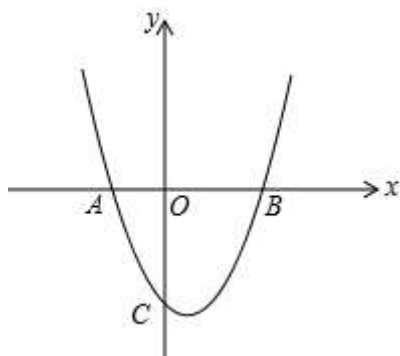
(1) 求该抛物线的解析式；

(2) 直线  $y = -x + n$  与该抛物线在第四象限内交于点  $D$ ，与线段  $BC$  交于点  $E$ ，与  $x$  轴交于点  $F$ ，且  $BE = 4EC$ 。

① 求  $n$  的值；

② 连接  $AC$ ， $CD$ ，线段  $AC$  与线段  $DF$  交于点  $G$ ， $\triangle AGF$  与  $\triangle CGD$  是否全等？请说明理由；

(3) 直线  $y = m (m > 0)$  与该抛物线的交点为  $M$ ， $N$  (点  $M$  在点  $N$  的左侧)，点  $M$  关于  $y$  轴的对称点为点  $M'$ ，点  $H$  的坐标为  $(1, 0)$ 。若四边形  $OM'NH$  的面积为  $\frac{5}{3}$ 。求点  $H$  到  $OM'$  的距离  $d$  的值。



解析：(1) 根据抛物线  $y = \frac{3}{2}x^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于  $A(-1, 0)$ ,  $B(2, 0)$  两点，可得抛物线的解析式：

(2) ①过点  $E$  作  $EE' \perp x$  轴于  $E'$ ，则  $EE' \parallel OC$ ，根据平行线分线段成比例定理，可得  $BE' = 4OE'$ ，设点  $E$  的坐标为  $(x, y)$ ，则  $OE' = x$ ， $BE' = 4x$ ，根据  $OB = 2$ ，可得  $x = \frac{2}{5}$ ，再根据直线  $BC$  的解析

式为  $y = \frac{3}{2}x - 3$ ，即可得到  $E(\frac{2}{5}, -\frac{12}{5})$ ，把  $E$  的坐标代入直线  $y = -x + n$ ，可得  $n$  的值；②根据  $F(-2, 0)$ ,  $A(-1, 0)$ ，可得  $AF = 1$ ，再根据点  $D$  的坐标为  $(1, -3)$ ，点  $C$  的坐标为  $(0, -3)$ ，可得  $CD \parallel x$  轴， $CD = 1$ ，再根据  $\angle AFG = \angle CDG$ ， $\angle FAG = \angle DCG$ ，即可判定  $\triangle AGF \cong \triangle CGD$ ；(3) 根据轴对称的性质得出  $OH = 1 = M'N$ ，进而判定四边形  $OM'NH$  是平行四边形，再根据四边形  $OM'NH$  的面积为  $\frac{5}{3}$ ，求得  $OP = \frac{5}{3}$ ，再根据点  $M$  的坐标为  $(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ ，得到  $PM' = \frac{4}{3}$ ， $Rt\triangle OPM'$

中，运用勾股定理可得  $OM' = \frac{\sqrt{41}}{3}$ ，最后根据  $OM' \times d = \frac{5}{3}$ ，即可得到  $d = \frac{5\sqrt{41}}{41}$ 。

答案：(1)  $\because$  抛物线  $y = \frac{3}{2}x^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于  $A(-1, 0)$ ,  $B(2, 0)$  两点，

$$\therefore \begin{cases} \frac{3}{2} - b + c = 0 \\ 6 + 2b + c = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} b = -\frac{3}{2} \\ c = -3 \end{cases}$$

$\therefore$  该抛物线的解析式  $y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 3$ ；

(2) ①如图，过点  $E$  作  $EE' \perp x$  轴于  $E'$ ，则  $EE' \parallel OC$ ，

$$\therefore \frac{BE'}{OE'} = \frac{BE}{CE},$$

$$\because BE = 4EC,$$

$$\therefore BE' = 4OE',$$

设点  $E$  的坐标为  $(x, y)$ ，则  $OE' = x$ ， $BE' = 4x$ ，

$$\because B(2, 0),$$

$$\therefore OB = 2, \text{即 } x + 4x = 2,$$

$$\therefore x = \frac{2}{5},$$

$\because$  抛物线  $y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 3$  与  $y$  轴交于点  $C$ ，

$$\therefore C(0, -3),$$

设直线  $BC$  的解析式为  $y = kx + b'$ ，

$$\because B(2, 0), C(0, -3),$$

$$\therefore \begin{cases} 2k + b' = 0 \\ b' = -3 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ b' = -3 \end{cases},$$

$\therefore$  直线 BC 的解析式为  $y = \frac{3}{2}x - 3$ ,

当  $x = \frac{2}{5}$  时,  $y = -\frac{12}{5}$ ,

$\therefore E(\frac{2}{5}, -\frac{12}{5})$ ,

把 E 的坐标代入直线  $y = -x + n$ , 可得  $-\frac{2}{5} + n = -\frac{12}{5}$ ,

解得  $n = -2$ ;

②  $\triangle AGF$  与  $\triangle CGD$  全等. 理由如下:

$\therefore$  直线 EF 的解析式为  $y = -x - 2$ ,

$\therefore$  当  $y = 0$  时,  $x = -2$ ,

$\therefore F(-2, 0)$ ,  $OF = 2$ ,

$\therefore A(-1, 0)$ ,

$\therefore OA = 1$ ,

$\therefore AF = 2 - 1 = 1$ ,

$$\text{由} \begin{cases} y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 3 \\ y = -x - 2 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3} \\ x_2 = 1 \end{cases}, \begin{cases} y_1 = -\frac{4}{3} \\ y_2 = -3 \end{cases},$$

$\therefore$  点 D 在第四象限,

$\therefore$  点 D 的坐标为  $(1, -3)$ ,

$\therefore$  点 C 的坐标为  $(0, -3)$ ,

$\therefore CD \parallel x$  轴,  $CD = 1$ ,

$\therefore \angle AFG = \angle CDG$ ,  $\angle FAG = \angle DCG$ ,

$\therefore \triangle AGF \cong \triangle CGD$ ;

(3)  $\therefore$  抛物线的对称轴为  $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$ , 直线  $y = m (m > 0)$  与该抛物线的交点为 M, N,

$\therefore$  点 M, N 关于直线  $x = \frac{1}{2}$  对称,

设  $N(t, m)$ , 则  $M(1 - t, m)$ ,

$\therefore$  点 M 关于 y 轴的对称点为点  $M'$ ,

$\therefore M'(t - 1, m)$ ,

$\therefore$  点  $M'$  在直线  $y = m$  上,

$\therefore M'N \parallel x$  轴,

$\therefore M'N = t - (t - 1) = 1$ ,

$\therefore H(1, 0)$ ,

$\therefore OH = 1 = M'N$ ,

$\therefore$  四边形  $OM'NH$  是平行四边形,

设直线  $y = m$  与 y 轴交于点 P,

$\therefore$  四边形  $OM'NH$  的面积为  $\frac{5}{3}$ ,

$\therefore OH \times OP = 1 \times m = \frac{5}{3}$ , 即  $m = \frac{5}{3}$ ,



