2017年普通高等学校招生全国统一考试(天津卷)数学文

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.设集合A={1，2，6}，B={2，4}，C={1，2，3，4}，则(A∪B)∩C=(　　)

A.{2}

B.{1，2，4}

C.{1，2，4，6}

D.{1，2，3，4，6}

解析：∵集合A={1，2，6}，B={2，4}，C={1，2，3，4}，

∴(A∪B)∩C={1，2，4，6}∩{1，2，3，4}={1，2，4}.

答案：B

2.设x∈R，则“2-x≥0”是“|x-1|≤1”的(　　)

A.充分而不必要条件

B.必要而不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

解析：由2-x≥0得x≤2，由|x-1|≤1得-1≤x-1≤1，得0≤x≤2.则“2-x≥0”是“|x-1|≤1”的必要不充分条件.

答案：B

3.有5支彩笔(除颜色外无差别)，颜色分别为红、黄、蓝、绿、紫.从这5支彩笔中任取2支不同颜色的彩笔，则取出的2支彩笔中含有红色彩笔的概率为(　　)

A.$\frac{4}{5}$

B.$\frac{3}{5}$

C.$\frac{2}{5}$

D.$\frac{1}{5}$

解析：有5支彩笔(除颜色外无差别)，颜色分别为红、黄、蓝、绿、紫，

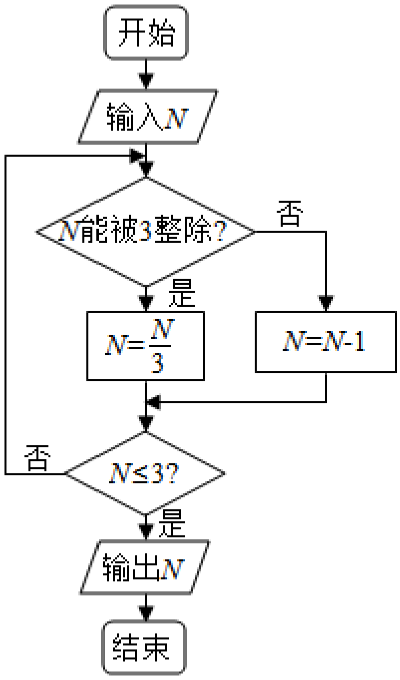
从这5支彩笔中任取2支不同颜色的彩笔，基本事件总数n=C_5^2=10，

取出的2支彩笔中含有红色彩笔包含的基本事件个数m=$C_1^1C_4^1$=4，

∴取出的2支彩笔中含有红色彩笔的概率为$p=\frac{m}{n}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

答案：C

4.阅读如图的程序框图，运行相应的程序，若输入 N 的值为 19，则输出 N 的值为(　　)



A.0

B.1

C.2

D.3

解析：第一次 N=19，不能被 3 整除，N=19-1=18≤3 不成立，

第二次 N=18，18 能被 3 整除，N=$\frac{18}{3}$=6，N=6≤3 不成立，

第三次 N=6，能被 3 整除，N=$\frac{6}{3}$=2≤3 成立.

输出 N=2.

答案：C

5.已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞0，b＞0)的右焦点为 F，点 A 在双曲线的渐近线上，△OAF 是边长为 2 的等边三角形(O 为原点)，则双曲线的方程为(　　)

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

B. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$

C. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$

D. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

解析：双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞0，b＞0)的右焦点为 F，点 A 在双曲线的渐近线上，△OAF 是边长为 2 的等边三角形(O 为原点)，可得 c=2，$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，即$\frac{b^2}{a^2}$=3，$\frac{c^2-a^2}{a^2}$=3，

解得 a=1，b=$\sqrt{3}$，双曲线的焦点坐标在 x 轴，所得双曲线方程为：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

答案：D

6.已知奇函数 f(x)在 R 上是增函数.若 a=-f($\log_2\frac{1}{5}$)，b=f($\log_2 4.1$)，c=f($2^{0.8}$)，则 a，b，c 的大小关系为(　　)

A.a＜b＜c

B.b＜a＜c

C.c＜b＜a

D.c＜a＜b

解析：奇函数 f(x)在 R 上是增函数，

∴a=-f($\log_2\frac{1}{5}$)=f($\log_2 5$)，b=f($\log_2 4.1$)，c=f($2^{0.8}$)，

又 1＜$2^{0.8}$＜2＜$\log_2 4.1$＜$\log_2 5$，∴f($2^{0.8}$)＜f($\log_2 4.1$)＜f($\log_2 5$)，即 c＜b＜a.

答案：C

7.设函数 f(x)=2sin(ωx+φ)，x∈R，其中ω＞0，|φ|＜x.若 f($\frac{5\pi}{8}$)=2，f($\frac{11\pi}{8}$)=0，且 f(x)的最小正周期大于 2π，则(　　)

A. $\omega=\frac{2}{3}$，$\phi=\frac{\pi}{12}$

B. $\omega=\frac{2}{3}$，$\phi=-\frac{11\pi}{12}$

C. $\omega=\frac{1}{3}$，$\phi=-\frac{11\pi}{24}$

D. $\omega=\frac{1}{3}$，$\phi=\frac{7\pi}{24}$

解析：由 f(x)的最小正周期大于 2π，得$\frac{T}{4}>\frac{\pi}{2}$，

又 f($\frac{5\pi}{8}$)=2，f($\frac{11\pi}{8}$)=0，得$\frac{T}{4}=\frac{11\pi}{8}-\frac{5\pi}{8}=\frac{3\pi}{4}$，

∴T=3π，则$\frac{2\pi}{\omega}=3\pi$，即 ω=$\frac{2}{3}$．∴f(x)=2sin(ωx+φ)=2sin($\frac{2}{3}$x+φ)，

由$f\left(\frac{5\pi}{8}\right)=2\sin\left(\frac{2}{3}\times\frac{5\pi}{8}+\varphi\right)=2$，得 sin(φ+$\frac{5\pi}{12}$)=1.∴$\varphi+\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，k∈Z.

取 k=0，得 φ=$\frac{\pi}{12}$＜π．∴ω=$\frac{2}{3}$， φ=$\frac{\pi}{12}$.

答案：A

8.已知函数 f(x)=$\begin{cases}|x|+2, & x<1,\\ x+\frac{2}{x}, & x\geq 1,\end{cases}$设 a∈R,若关于 x 的不等式 f(x)≥|$\frac{x}{2}$+a|在 R 上恒成立,

则 a 的取值范围是(　　)

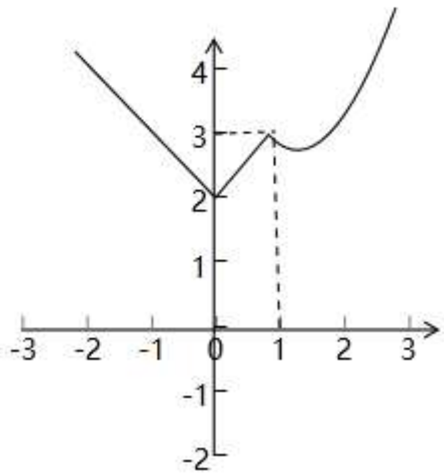
A.[-2，2]

B.[-2$\sqrt{3}$，2]

C.[-2，2$\sqrt{3}$]

D.[-2$\sqrt{3}$，2$\sqrt{3}$]

解析：根据题意，函数 f(x)=$\begin{cases}|x|+2, & x<1,\\ x+\frac{2}{x}, & x\geq 1\end{cases}$的图象如图：



令 g(x)=|$\frac{x}{2}$+a|，其图象与 x 轴相交与点(-2a，0)，

在区间(-∞，-2a)上为减函数，在(-2a，+∞)为增函数，

若不等式 f(x)≥|$\frac{x}{2}$+a|在 R 上恒成立，则函数 f(x)的图象在 g(x)上的上方或相交，

则必有 f(0)≥g(0)，即 2≥|a|，解可得-2≤a≤2.

答案：A

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.已知 a∈R，i 为虚数单位，若 $\frac{a-i}{2+i}$ 为实数，则 a 的值为____________.

解析：a∈R，i 为虚数单位，$\frac{a-i}{2+i}=\frac{(a-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2a-1-(2+a)i}{4+1}=\frac{2a-1}{5}-\frac{2+a}{5}i$.

由 $\frac{a-i}{2+i}$ 为实数，可得 $-\frac{2+a}{5}$=0，解得 a=-2.

答案：-2

10.已知 a∈R，设函数 f(x)=ax-lnx 的图象在点(1，f(1))处的切线为 l，则 l 在 y 轴上的截距为____________.

解析：函数 f(x)=ax-lnx，可得 f′(x)=a-$\frac{1}{x}$，切线的斜率为：k=f′(1)=a-1，

切点坐标(1，a)，切线方程 l 为：y-a=(a-1)(x-1)，

l 在 y 轴上的截距为：a+(a-1)(-1)=1.

答案：1

11.已知一个正方体的所有顶点在一个球面上，若这个正方体的表面积为 18，则这个球的体积为____________.

解析：设正方体的棱长为 a，

∵这个正方体的表面积为 18，∴$6a^2$=18，则 a^2=3，即 a=$\sqrt{3}$，

∵一个正方体的所有顶点在一个球面上，∴正方体的体对角线等于球的直径，

即 $\sqrt{3}$a=2R，即 R=$\frac{3}{2}$，则球的体积 V=$\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9\pi}{2}$.

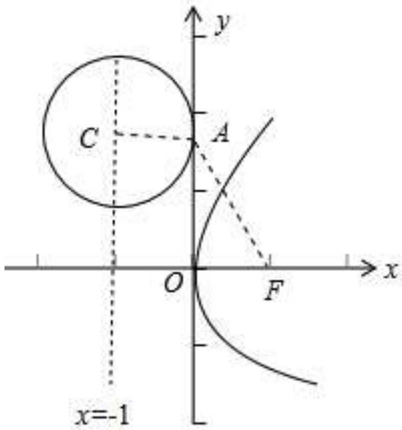
答案：$\frac{9\pi}{2}$

12.设抛物线 y^2=4x 的焦点为 F，准线为 l.已知点 C 在 l 上，以 C 为圆心的圆与 y 轴的正半轴相切于点 A.若∠FAC=120°，则圆的方程为____________.

解析：设抛物线 y^2=4x 的焦点为 F(1，0)，准线 l：x=-1，∵点 C 在 l 上，以 C 为圆心的圆与 y 轴的正半轴相切与点 A，

∵∠FAC=120°，∴∠FAO=30°，∴$OA=\frac{OF}{\tan\angle FAO}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=1$，∴OA=$\sqrt{3}$，∴A(0，$\sqrt{3}$)，

如图所示：



∴C(-1，3)，圆的半径为CA=1，故要求的圆的标准方程为 $(x+1)^2+(y-\sqrt{3})^2=1$.

答案：$(x+1)^2+(y-\sqrt{3})^2=1$

13.若a，b∈R，ab＞0，则$\frac{a^4+4b^4+1}{ab}$的最小值为____________.

解析：a，b∈R，ab＞0，∴

$\frac{a^4+4b^4+1}{ab}\geq\frac{2a^2\cdot 2b^2+1}{ab}=4ab+\frac{1}{ab}\geq 2\sqrt{4ab\cdot\frac{1}{ab}}=4$，

当且仅当$\begin{cases}a^4=4b^4,\\ 4ab=\frac{1}{ab},\end{cases}$即$\begin{cases}a^2=2b^2,\\ a^2b^2=\frac{1}{4},\end{cases}$

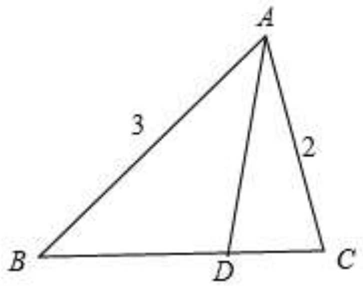
即 a=$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$，b=$\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$或 a=$-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$，b=$-\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$时取“=”；∴上式的最小值为4.

答案：4

14.在△ABC 中，∠A=60°，AB=3，AC=2.若$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}(\lambda\in R)$，且

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}$=-4，则λ的值为__________.

解析：如图所示，



△ABC 中，∠A=60°，AB=3，AC=2，$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，

$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}BC=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

又 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$（$\lambda \in R$），

$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\lambda\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\left(\frac{1}{3}\lambda-\frac{2}{3}\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2+\frac{2}{3}\lambda\overrightarrow{AC}^2$

$=\left(\frac{1}{3}\lambda-\frac{2}{3}\right)\times 3\times 2\times\cos 60^\circ-\frac{1}{3}\times 3^2+\frac{2}{3}\lambda\times 2^2=-4$，

$\therefore \frac{11}{3}\lambda=1$，解得 $\lambda=\frac{3}{11}$.

答案：$\frac{3}{11}$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. 在△ABC 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c.已知 asinA=4sinB，ac=$\sqrt{5}$(a2-b2-c2).

(Ⅰ)求 cosA 的值；

(Ⅱ)求 sin(2B-A)的值.

解析：(Ⅰ)由正弦定理得 asinB=bsinA，结合 asinA=4bsinB，得 a=2b.再由 ac=$\sqrt{5}$（$a^2-b^2-c^2$），

得 $b^2+c^2-a^2=-\frac{\sqrt{5}}{5}ac$，代入余弦定理的推论可求 cosA 的值；

(Ⅱ)由(Ⅰ)可得 sinA=$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，代入 asinA=4bsinB，得 sinB，进一步求得 cosB.利用倍角公式求 sin2B，cos2B，展开两角差的正弦可得 sin(2B-A)的值.

答案：(Ⅰ)由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 asinB=bsinA，

又 asinA=4bsinB，得 4bsinB=asinA，

两式作比得：$\dfrac{a}{4b}=\dfrac{b}{a}$，∴a=2b.

由 ac=$\sqrt{5}$ (a^2-b^2-c^2)，得 b^2+c^2-a^2=$-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ac，

由余弦定理，得 cosA=$\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{-\frac{\sqrt{5}}{5}ac}{ac}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$；

(Ⅱ)由(Ⅰ)，可得 sinA=$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，代入 asinA=4bsinB，得 sinB=asinA4b=55.

由(Ⅰ)知，A 为钝角，则 B 为锐角，∴cosB=$\sqrt{1-\sin^2 B}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

于是 sin2B=2sinBcosB=$\dfrac{4}{5}$，cos2B=1-2$\sin^2$B=$\dfrac{3}{5}$，

故 sin(2B-A)=sin2BcosA-cos2BsinA=$\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)-\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

16.电视台播放甲、乙两套连续剧，每次播放连续剧时，需要播放广告.已知每次播放甲、乙两套连续剧时，连续剧播放时长、广告播放时长、收视人次如下表所示：

	连续剧播放时长（分钟）	广告播放时长（分钟）	收视人次（万）
甲	70	5	60
乙	60	5	25

已知电视台每周安排的甲、乙连续剧的总播放时间不多于 600 分钟，广告的总播放时间不少于 30 分钟，且甲连续剧播放的次数不多于乙连续剧播放次数的 2 倍.分别用 x，y 表示每周计划播出的甲、乙两套连续剧的次数.

(I)用 x，y 列出满足题目条件的数学关系式，并画出相应的平面区域；

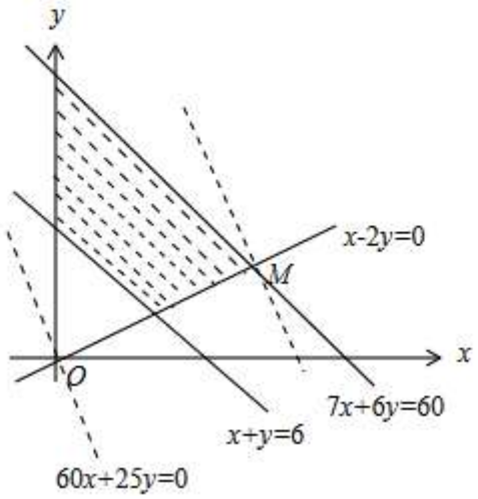
(II)问电视台每周播出甲、乙两套连续剧各多少次，才能使总收视人次最多？

解析：(Ⅰ)直接由题意结合图表列关于 x，y 所满足得不等式组，化简后即可画出二元一次不等式所表示的平面区域；

(Ⅱ)写出总收视人次 z=60x+25y.化目标函数为直线方程的斜截式，数形结合得到最优解，联立方程组求得最优解的坐标，代入目标函数得答案.

答案：(Ⅰ)由已知，x，y满足的数学关系式为$\begin{cases}70x+60y\le 600,\\5x+5y\ge 30,\\x\le 2y,\\x\ge 0,\\y\ge 0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}7x+6y\le 60,\\x+y\ge 6,\\x-2y\le 0,\\x\ge 0,\\y\ge 0.\end{cases}$

该二元一次不等式组所表示的平面区域如图：



(Ⅱ)设总收视人次为z万，则目标函数为z=60x+25y.

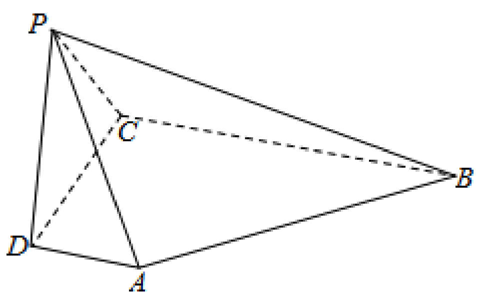
考虑z=60x+25y，将它变形为$y=-\dfrac{12}{5}x+\dfrac{z}{25}$，这是斜率为$-\dfrac{12}{5}$，随z变化的一族平行直线.

$\dfrac{z}{25}$为直线在y轴上的截距，当$\dfrac{z}{25}$取得最大值时，z的值最大.

又∵x，y满足约束条件，∴由图可知，当直线z=60x+25y经过可行域上的点M时，截距$\dfrac{z}{25}$最大，即z最大.解方程组$\begin{cases}7x+6y=60,\\x-2y=0,\end{cases}$得点M的坐标为(6，3).

∴电视台每周播出甲连续剧6次、乙连续剧3次时才能使总收视人次最多.

17.如图，在四棱锥P-ABCD中，AD⊥平面PDC，AD∥BC，PD⊥PB，AD=1，BC=3，CD=4，PD=2.



(I)求异面直线AP与BC所成角的余弦值；

(II)求证：PD⊥平面PBC；

(II)求直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值.

解析：(Ⅰ)由已知 AD∥BC，从而∠DAP 或其补角即为异面直线 AP 与 BC 所成的角，由此能求出异面直线 AP 与 BC 所成角的余弦值.

(Ⅱ)由 AD⊥平面 PDC，得 AD⊥PD，由 BC∥AD，得 PD⊥BC，再由 PD⊥PB，得到 PD⊥平面 PBC.

(Ⅲ)过点 D 作 AB 的平行线交 BC 于点 F，连结 PF，则 DF 与平面 PBC 所成的角等于 AB 与平面 PBC 所成的角，由 PD⊥平面 PBC，得到∠DFP 为直线 DF 和平面 PBC 所成的角，由此能求出直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值.

答案：(Ⅰ)由已知 AD∥BC，

故∠DAP 或其补角即为异面直线 AP 与 BC 所成的角.

因为 AD⊥平面 PDC，所以 AD⊥PD.

在 Rt△PDA 中，由已知，得 AP= $\sqrt{AD^2+PD^2}=\sqrt{5}$，

故 cos∠DAP= $\frac{AD}{AP}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

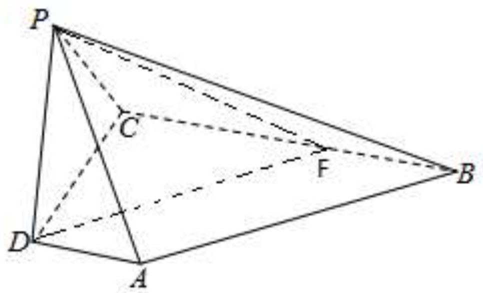
所以，异面直线 AP 与 BC 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(Ⅱ)因为 AD⊥平面 PDC，直线 PD $\subset$平面 PDC，所以 AD⊥PD.

又因为 BC∥AD，所以 PD⊥BC，

又 PD⊥PB，所以 PD⊥平面 PBC.

(Ⅲ)过点 D 作 AB 的平行线交 BC 于点 F，连结 PF，



则 DF 与平面 PBC 所成的角等于 AB 与平面 PBC 所成的角.

因为 PD⊥平面 PBC，故 PF 为 DF 在平面 PBC 上的射影，

所以∠DFP 为直线 DF 和平面 PBC 所成的角.

由于 AD∥BC，DF∥AB，故 BF=AD=1，

由已知，得 CF=BC-BF=2.又 AD⊥DC，故 BC⊥DC，

在 Rt△DCF 中，可得 sin∠DFP= $\frac{PD}{DF}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

所以，直线 AB 与平面 PBC 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

18.已知$\{a_n\}$为等差数列，前 n 项和为$S_n(n\in N*)$，$\{b_n\}$是首项为 2 的等比数列，且公比大于 0，$b_2+b_3=12$，$b_3=a_4-2a_1$，$S_{11}=11b_4$.
(Ⅰ)求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；
(Ⅱ)求数列$\{a_{2n}b_n\}$的前 n 项和$(n\in N^*)$.
解析：(Ⅰ)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，等比数列$\{b_n\}$的公比为 q.通过$b_2+b_3=12$，求出 q，得到$b_n=2^n$.然后求出公差 d，推出$a_n=3n-2$.
(Ⅱ)设数列$\{a_{2n}b_n\}$的前 n 项和为T_n，利用错位相减法，转化求解数列$\{a_{2n}b_n\}$的前 n 项和即可.
答案：(Ⅰ)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，等比数列$\{b_n\}$的公比为 q.由已知 $b_2+b_3=12$，得$b_1(q+q^2)=12$，而$b_1=2$，所以$q^2+q-6=0$.又因为$q>0$，解得$q=2$.所以，$b_n=2^n$.
由$b_3=a_4-2a_1$，可得$3d-a_1=8$.
由$S_{11}=11b_4$，可得$a_1+5d=16$，联立①②，解得$a_1=1$，$d=3$，
由此可得$a_n=3n-2$.所以，$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n-2$，$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2^n$.
(Ⅱ)设数列$\{a_{2n}b_n\}$的前 n 项和为T_n，由$a_{2n}=6n-2$，有$T_n=4\times2+10\times2^2+16\times2^3+\cdots+(6n-2)\times2^n$，
$2T_n=4\times2^2+10\times2^3+16\times2^4+\cdots+(6n-8)\times2^n+(6n-2)\times2^{n+1}$，
上述两式相减，得 $-T_n=4\times2+6\times2^2+6\times2^3+\cdots+6\times2^n-(6n-2)\times2^{n+1}=\dfrac{12\times\left(1-2^n\right)}{1-2}$
$-4-(6n-2)\times2^{n+1}=-(3n-4)2^{n+2}-16$.得$T_n=(3n-4)2^{n+2}+16$.
所以，数列$\{a_{2n}b_n\}$的前 n 项和为$(3n-4)2^{n+2}+16$.

19.设 a，b∈R，$|a|\leqslant1$.已知函数$f(x)=x^3-6x^2-3a(a-4)x+b$，$g(x)=e^xf(x)$.
(Ⅰ)求 f(x)的单调区间；
(Ⅱ)已知函数 y=g(x)和$y=e^x$的图象在公共点(x_0,y_0)处有相同的切线，
(i)求证：f(x)在$x=x_0$处的导数等于 0；
(ii)若关于 x 的不等式$g(x)\leqslant e^x$在区间$[x_0-1,x_0+1]$上恒成立，求 b 的取值范围.
解析：(Ⅰ)求出函数 f(x)的导函数，得到导函数的零点，由导函数的零点对定义域分段，列表后可得 f(x)的单调区间；
(Ⅱ)(i)求出 g(x)的导函数，由题意知$\begin{cases}g\left(x_0\right)=e^{x_0},\\g'\left(x_0\right)=e^{x_0},\end{cases}$求解可得$\begin{cases}f\left(x_0\right)=1,\\f'\left(x_0\right)=0.\end{cases}$得到 f(x)在$x=x_0$处的导数等于 0；
(ii)由(I)知$x_0=a$.且 f(x)在(a-1，a)内单调递增，在(a，a+1)内单调递减，故当$x_0=a$时，$f(x)\leqslant f(a)=1$ 在[a-1，a+1]上恒成立，从而 $g(x)\leqslant e^x$ 在$[x_0-1,x_0+1]$上恒成立.由$f(a)=a^3-6a^2-3a(a-4)a+b=1$，得$b=2a^3-6a^2+1$，$-1\leqslant a\leqslant1$.构造函数$t(x)=2x^3-6x^2+1$，x∈[-1，1]，利用导数求其值域可得 b 的范围.
答案：(Ⅰ)由$f(x)=x^3-6x^2-3a(a-4)x+b$，可得$f'(x)=3x^2-12x-3a(a-4)=3(x-a)(x-(4-a))$，令$f'(x)=0$，解得 x=a，或 x=4-a.由$|a|\leqslant1$，得$a<4-a$.
当 x 变化时，f'(x)，f(x)的变化情况如下表：

x	(-∞，a)	(a，4-a)	(4-a，+∞)
f'(x)	+	-	+
f(x)	↗	↘	↗

∴f(x)的单调递增区间为(-∞，a)，(4-a，+∞)，单调递减区间为(a，4-a)；

(II)(i)∵g'(x)=ex(f(x)+f'(x))，由题意知$\begin{cases} g(x_0)=e^{x_0}, \\ g'(x_0)=e^{x_0}, \end{cases}$∴$\begin{cases} f(x_0)e^{x_0}=e^{x_0}, \\ e^{x_0}\left(f(x_0)+f'(x_0)\right)=e^{x_0}, \end{cases}$

解得$\begin{cases} f(x_0)=1, \\ f'(x_0)=0. \end{cases}$

∴f(x)在 $x=x_0$ 处的导数等于 0；

(ii)∵g(x)≤e^x，x∈[x_0-1，x_0+1]，由 e^x>0，可得 f(x)≤1.

又∵f(x_0)=1，f'(x_0)=0，

故 x_0 为 f(x)的极大值点，由(I)知 x_0=a.

另一方面，由于|a|≤1，故 a+1<4-a，

由(Ⅰ)知 f(x)在(a-1，a)内单调递增，在(a，a+1)内单调递减，

故当 x_0=a 时，f(x)≤f(a)=1 在[a-1，a+1]上恒成立，从而 g(x)≤e^x在[x_0-1，x_0+1]上恒成立.

由 f(a)=a^3-6a^2-3a(a-4)a+b=1，得 b=2a^3-6a^2+1，-1≤a≤1.

令 t(x)=2x^3-6x^2+1，x∈[-1，1]，∴t'(x)=6x^2-12x，

令 t'(x)=0，解得 x=2(舍去)，或 x=0.

∵t(-1)=-7，t(1)=-3，t(0)=1，故 t(x)的值域为[-7，1].∴b 的取值范围是[-7，1].

20.已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a>b>0)的左焦点为 F(-c，0)，右顶点为 A，点 E 的坐标为(0，c)，△EFA 的面积为$\frac{b^2}{2}$.

(I)求椭圆的离心率；

(II)设点 Q 在线段 AE 上，|FQ|=$\frac{3}{2}$c，延长线段 FQ 与椭圆交于点 P，点 M，N 在 x 轴上，PM∥QN，且直线 PM 与直线 QN 间的距离为 c，四边形 PQNM 的面积为 3c.

(i)求直线 FP 的斜率；

(ii)求椭圆的方程.

解析：(Ⅰ)设椭圆的离心率为 e.通过$\frac{1}{2}(c+a)c=\frac{b^2}{2}$.转化求解椭圆的离心率.

(Ⅱ)(ⅰ)依题意，设直线 FP 的方程为 x=my−c(m＞0)，则直线 FP 的斜率为$\frac{1}{m}$.通过 a=2c，可得直线 AE 的方程为$\frac{x}{2c}+\frac{y}{c}$=1,求解点 Q 的坐标为($\frac{(2m-2)c}{m+2}$，$\frac{3c}{m+2}$).利用|FQ|=$\frac{3c}{2}$，求出 m，然后求解直线 FP 的斜率.

(ii)求出椭圆方程的表达式你，求出直线 FP 的方程为 3x−4y+3c=0，与椭圆方程联立通过|FP|=$\sqrt{(c+c)^2+\left(\frac{3c}{2}\right)^2}=\frac{5c}{2}$，结合直线 PM 和 QN 都垂直于直线 FP.结合四边形 PQNM 的面积为 3c，求解 c，然后求椭圆的方程.

答案：(Ⅰ)设椭圆的离心率为 e.由已知，可得$\frac{1}{2}(c+a)c=\frac{b^2}{2}$.又由 $b^2=a^2-c^2$，可得 $2c^2+ac-a^2=0$，即 $2e^2+e-1=0$.又因为 0＜e＜1，解得 e=$\frac{1}{2}$.所以，椭圆的离心率为$\frac{1}{2}$；

(Ⅱ)(ⅰ)依题意，设直线 FP 的方程为 x=my−c(m＞0)，则直线 FP 的斜率为$\frac{1}{m}$.

由(Ⅰ)知 a=2c，可得直线 AE 的方程为$\frac{x}{2c}+\frac{y}{c}$=1，即 x+2y−2c=0，与直线 FP 的方程联立，可解得 x=$\frac{(2m-2)c}{m+2}$，y=$\frac{3c}{m+2}$，即点 Q 的坐标为($\frac{(2m-2)c}{m+2}$，$\frac{3c}{m+2}$).

由已知|FQ|=$\frac{3c}{2}$，有$\left[\frac{(2m-2)c}{m+2}+c\right]^2+\left(\frac{3c}{m+2}\right)^2=\left(\frac{3c}{2}\right)^2$，整理得 $3m^2-4m=0$，所以 m=$\frac{4}{3}$，即直线 FP 的斜率为$\frac{3}{4}$.

(ii)由 a=2c，可得 b=$\sqrt{3}$c，故椭圆方程可以表示为$\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$.

由(i)得直线 FP 的方程为 3x−4y+3c=0，与椭圆方程联立$\begin{cases}3x-4y+3c=0,\\ \frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1\end{cases}$消去 y，整理得 $7x^2+6cx-13c^2=0$，解得 x=−$\frac{13c}{7}$(舍去)，或 x=c.因此可得点 P(c，$\frac{3c}{2}$)，进而可得|FP|=$\sqrt{(c+c)^2+\left(\frac{3c}{2}\right)^2}=\frac{5c}{2}$，所以|PQ|=|FP|−|FQ|=$\frac{5c}{2}-\frac{3c}{2}$=c.由已知，线段 PQ 的长即为 PM 与 QN 这两条平行直线间的距离，故直线 PM 和 QN 都垂直于直线 FP.

因为 QN⊥FP,所以|QN|=|FQ| •tan∠QFN$\frac{3c}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{9c}{8}$,所以 FQN 的面积为$\frac{1}{2}|FQ||QN|=\frac{27c^2}{32}$，

同理FPM的面积等于$\frac{75c^2}{32}$，由四边形PQNM的面积为3c，得$\frac{75c^2}{32}-\frac{27c^2}{32}=3c$，整理得$c^2=2c$，

又由$c>0$，得$c=2$.所以，椭圆的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.