2012年普通高等学校招生全国统一考试（湖南卷）

数学（理工农医类）

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.设集合 M={-1,0,1}，N={x|x^2≤x}，则 M∩N=

A.{0}　　B.{0,1}　　C.{-1,1}　　D.{-1,0,0}

【答案】B

【解析】$\because N=\{0,1\}$　M={-1,0,1}　∴M∩N={0,1}.

【点评】本题考查了集合的基本运算，较简单，易得分.

先求出$N=\{0,1\}$,再利用交集定义得出 M∩N.

2.命题“若α=$\frac{\pi}{4}$，则 tanα=1”的逆否命题是

A.若α≠$\frac{\pi}{4}$，则 tanα≠1　　B. 若α=$\frac{\pi}{4}$，则 tanα≠1

C. 若 tanα≠1，则α≠$\frac{\pi}{4}$　　D. 若 tanα≠1，则α=$\frac{\pi}{4}$

【答案】C

【解析】因为“若p，则q”的逆否命题为“若$\neg p$，则$\neg q$”，所以 “若α=$\frac{\pi}{4}$，则 tanα=1”的逆否命题是 “若 tanα≠1，则α≠$\frac{\pi}{4}$”.

【点评】本题考查了“若p，则q”形式的命题的逆命题、否命题与逆否命题，考查分析问题的能力.

3.某几何体的正视图和侧视图均如图1所示，则该几何体的俯视图不可能是

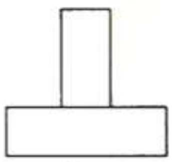
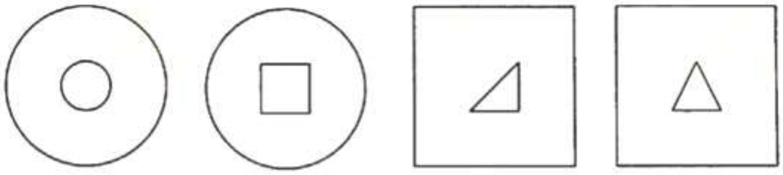


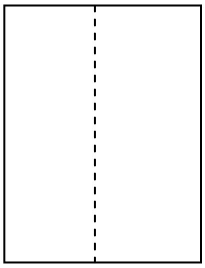
图1



A　　B　　C　　D

【答案】D

【解析】本题是组合体的三视图问题，由几何体的正视图和侧视图均如图1所示知，原图下面图为圆柱或直四棱柱，上面是圆柱或直四棱柱或下底是直角的三棱柱，A，B，C都可能是该几何体的俯视图，D不可能是该几何体的俯视图，因为它的正视图上面应为如图的矩形.



【点评】本题主要考查空间几何体的三视图，考查空间想象能力.是近年高考中的热点题型.

4.设某大学的女生体重 y（单位：kg）与身高 x（单位：cm）具有线性相关关系，根据一组样本数据（x_i，y_i）（i=1，2，…，n），用最小二乘法建立的回归方程为 y =0.85x-85.71，则下列结论中不正确的是

A.y 与 x 具有正的线性相关关系

B.回归直线过样本点的中心（$\overline{x}$，$\overline{y}$）

C.若该大学某女生身高增加 1cm，则其体重约增加 0.85kg

D.若该大学某女生身高为 170cm，则可断定其体重比为 58.79kg

【答案】D

【解析】【解析】由回归方程为 y =0.85x-85.71 知 y 随 x 的增大而增大，所以 y 与 x 具有正的线性相关关系，由最小二乘法建立的回归方程得过程知 $\hat{y}=bx+a=bx+\overline{y}-b\overline{x}(a=\overline{y}-b\overline{x})$，所以回归直线过样本点的中心（$\overline{x}$，$\overline{y}$），利用回归方程可以预测估计总体，所以 D 不正确.

【点评】本题组要考查两个变量间的相关性、最小二乘法及正相关、负相关的概念，并且是找不正确的答案，易错.

5. 已知双曲线 C ：$\frac{x^2}{a^2}$-$\frac{y^2}{b^2}$=1 的焦距为 10 ，点 P （2,1）在 C 的渐近线上，则 C 的方程为

A. $\frac{x^2}{20}$-$\frac{y^2}{5}$=1　B. $\frac{x^2}{5}$-$\frac{y^2}{20}$=1　C. $\frac{x^2}{80}$-$\frac{y^2}{20}$=1　　D. $\frac{x^2}{20}$-$\frac{y^2}{80}$=1

【答案】A

【解析】设双曲线 C ：$\frac{x^2}{a^2}$-$\frac{y^2}{b^2}$=1 的半焦距为 c，则 $2c=10,c=5$.

又∵C 的渐近线为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，点 P （2,1）在 C 的渐近线上，$\therefore 1=\frac{b}{a}\cdot 2$，即 $a=2b$.

又 $c^2=a^2+b^2$，$\therefore a=2\sqrt{5},b=\sqrt{5}$，$\therefore$ C 的方程为 $\frac{x^2}{20}$-$\frac{y^2}{5}$=1.

【点评】本题考查双曲线的方程、双曲线的渐近线方程等基础知识，考查了数形结合的思想和基本运算能力，是近年来常考题型.

6. 函数 f（x）=sinx-cos(x+$\dfrac{\pi}{6}$)的值域为

A． [-2 ,2] B.[-$\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$] C.[-1,1] D.[-$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$]

【答案】B

【解析】f（x）=sinx-cos(x+$\dfrac{\pi}{6}$）$=\sin x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}\sin x=\sqrt{3}\sin(x-\dfrac{\pi}{6})$，

$\because \sin(x-\dfrac{\pi}{6})\in\left[-1,1\right]$，$\therefore f(x)$ 值域为[-$\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$].

【点评】利用三角恒等变换把 $f(x)$ 化成 $A\sin(\omega x+\varphi)$ 的形式，利用 $\sin(\omega x+\varphi)\in\left[-1,1\right]$，求得 $f(x)$ 的值域.

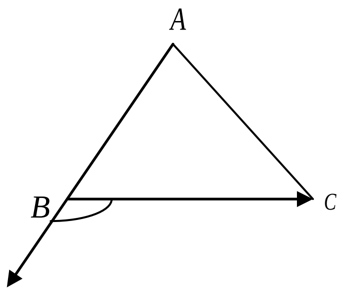
7. 在△ABC 中，AB=2，AC=3，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=1$ 则 $BC=$____.

A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{7}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $\sqrt{23}$

【答案】A

【解析】由下图知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos(\pi-B)=2\times\left|\overrightarrow{BC}\right|\times(-\cos B)=1$.

$\therefore \cos B=\dfrac{1}{-2BC}$.又由余弦定理知 $\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}$，解得 $BC=\sqrt{3}$.



【点评】本题考查平面向量的数量积运算、余弦定理等知识.考查运算能力，考查数形结合思想、等价转化思想等数学思想方法.需要注意 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 $\angle B$ 的外角.

8．已知两条直线 l_1 ：$y=m$ 和 l_2： y=$\dfrac{8}{2m+1}$ (m>0)，l_1 与函数 $y=\left|\log_2 x\right|$ 的图像从左至右相交于点 A，B ，l_2 与函数 $y=\left|\log_2 x\right|$ 的图像从左至右相交于 C,D .记线段 AC 和 BD 在 X 轴上的投影长度分别为 a ,b ,当 m 变化时，$\dfrac{b}{a}$ 的最小值为

A． $16\sqrt{2}$ B. $8\sqrt{2}$ C. $8\sqrt{4}$ D. $4\sqrt{4}$

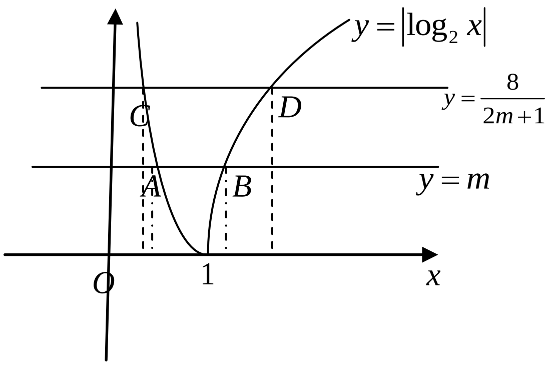
【答案】B

【解析】在同一坐标系中作出 y=m，y=$\dfrac{8}{2m+1}$(m＞0)， $y=\left|\log_2 x\right|$ 图像如下图，

由$\left|\log_2 x\right|$= m，得 $x_1=2^{-m},x_2=2^m$，$\left|\log_2 x\right|$= $\dfrac{8}{2m+1}$，得 $x_3=2^{-\frac{8}{2m+1}},x_4=2^{\frac{8}{2m+1}}$.

依照题意得 $a=\left|2^{-m}-2^{-\frac{8}{2m+1}}\right|,b=\left|2^m-2^{\frac{8}{2m+1}}\right|,\dfrac{b}{a}=\dfrac{\left|2^m-2^{\frac{8}{2m+1}}\right|}{\left|2^{-m}-2^{-\frac{8}{2m+1}}\right|}=2^m2^{\frac{8}{2m+1}}=2^{m+\frac{8}{2m+1}}$.

$\because m+\dfrac{8}{2m+1}=m+\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{m+\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}\geq 4-\dfrac{1}{2}=3\dfrac{1}{2}$，$\therefore (\dfrac{b}{a})_{\min}=8\sqrt{2}$.



【点评】在同一坐标系中作出 y=m，y=$\dfrac{8}{2m+1}$(m＞0)， $y=\left|\log_2 x\right|$ 图像，结合图像可解得.

二 、填空题： 本大题共 8 小题，考生作答 7 小题，每小题 5 分 ，共 35 分，把答案填在答题卡中对应题号后的横线上.

（一）选做题（请考生在第 9、10、 11 三题中任选两题作答，如果全做，则按前两题记分 ）

9. 在直角坐标系 xOy 中，已知曲线C_1：$\begin{cases}x=t+1,\\ y=1-2t\end{cases}$ (t 为参数)与曲线C_2 ：$\begin{cases}x=a\sin\theta,\\ y=3\cos\theta\end{cases}$

(θ为参数，$a>0$) 有一个公共点在 X 轴上，则$a=$___.

【答案】$\dfrac{3}{2}$

【解析】曲线C_1：$\begin{cases}x=t+1,\\ y=1-2t\end{cases}$直角坐标方程为$y=3-2x$，与$x$轴交点为$(\dfrac{3}{2},0)$；

曲线C_2 ：$\begin{cases}x=a\sin\theta,\\ y=3\cos\theta\end{cases}$直角坐标方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1$，其与$x$轴交点为$(-a,0),(a,0)$，

由$a>0$，曲线C_1与曲线C_2有一个公共点在 X 轴上，知$a=\frac{3}{2}$.

【点评】本题考查直线的参数方程、椭圆的参数方程，考查等价转化的思想方法等.曲线C_1与曲线C_2的参数方程分别等价转化为直角坐标方程，找出与x轴交点，即可求得.

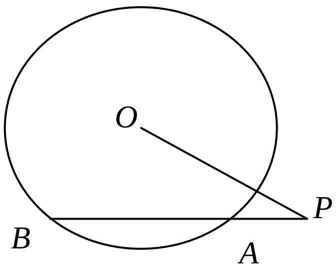
10.不等式|2x+1|-2|x-1|>0 的解集为_______.

【答案】$\left\{x\left|x>\frac{1}{4}\right.\right\}$

【解析】令$f(x)=|2x+1|-2|x-1|$，则由$f(x)=\begin{cases}-3,(x<-\frac{1}{2})\\4x-1,(-\frac{1}{2}\le x\le 1)\\3,(x>1)\end{cases}$得$f(x)>0$的解集为$\left\{x\left|x>\frac{1}{4}\right.\right\}$.

【点评】绝对值不等式解法的关键步骤是去绝对值，转化为代数不等式（组）.

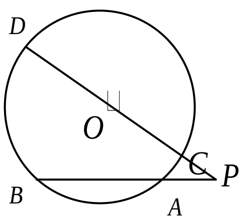
11.如图 2，过点 P 的直线与圆 O 相交于 A，B 两点.若 PA=1，AB=2，PO=3，则圆 O 的半径等于_______.



【答案】$\sqrt{6}$

【解析】设PO交圆 O 于 C，D，如图，设圆的半径为 R，由割线定理知

$PA\cdot PB=PC\cdot PD,$即$1\times(1+2)=(3-r)(3+r),\therefore r=\sqrt{6}.$



【点评】本题考查切割线定理，考查数形结合思想，由切割线定理知$PA\cdot PB=PC\cdot PD$，

从而求得圆的半径.

(二)必做题（12~16 题）

12.已知复数 $z=(3+i)^2$ (i 为虚数单位)，则|z|=_____.

【答案】10

【解析】$z=(3+i)^2=9+6i+i^2=8+6i$，$|z|=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

【点评】本题考查复数的运算、复数的模.把复数化成标准的 $a+bi(a,b\in R)$ 形式，利用 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ 求得.

13.($2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$)^6 的二项展开式中的常数项为_____.（用数字作答）

【答案】-160

【解析】($2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$)^6 的展开式项公式是 $T_{r+1}=C_6^r(2\sqrt{x})^{6-r}(-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^r=C_6^r 2^{6-r}(-1)^r x^{3-r}$.由题意知 $3-r=0, r=3$，所以二项展开式中的常数项为 $T_4=C_6^3 2^3(-1)^3=-160$.

【点评】本题主要考察二项式定理，写出二项展开式的通项公式是解决这类问题的常规办法.

14.如果执行如图 3 所示的程序框图，输入 $x=-1$,n=3,则输出的数 S= ____.

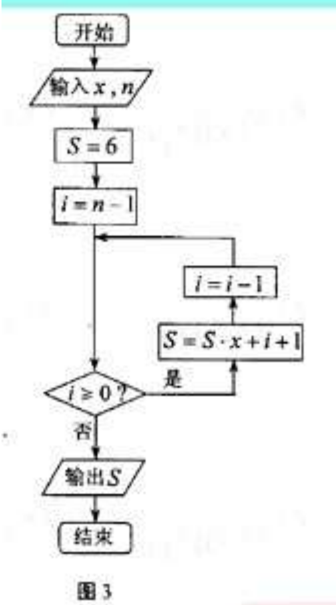


图 3

【答案】-4

【解析】输入 $x=-1$,n=3, ，执行过程如下：$i=2:S=-6+2+3=-3$；$i=1:S=-3(-1)+1+1=5$；$i=0:S=5(-1)+0+1=-4$，所以输出的是 -4.

【点评】本题考查算法流程图，要明白循环结构中的内容，一般解法是逐步执行，一步步将

执行结果写出，特别是程序框图的执行次数不能出错.

15.函数 f（x）=sin（$\omega x+\varphi$)的导函数 $y=f'(x)$ 的部分图像如图 4 所示，其中，P 为图像与 y 轴的交点，A,C 为图像与 x 轴的两个交点，B 为图像的最低点.

（1）若 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，点 P 的坐标为（0，$\frac{3\sqrt{3}}{2}$），则 $\omega=$______；

（2)若在曲线段 ABC 与 x 轴所围成的区域内随机取一点,则该点在△ABC 内的概率为_______.

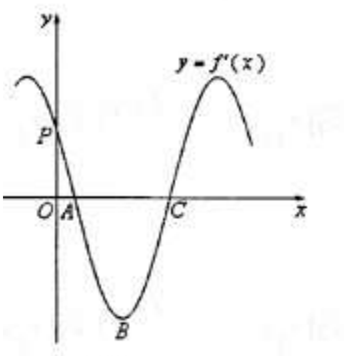


图 4

【答案】（1）3;（2）$\frac{\pi}{4}$

【解析】（1）$y=f'(x)=\omega\cos(\omega x+\varphi)$，当 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，点 P 的坐标为（0，$\frac{3\sqrt{3}}{2}$）时

$\omega\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3\sqrt{3}}{2},\therefore\omega=3$；

（2）由图知 $AC=\frac{T}{2}=\frac{\frac{2\pi}{\omega}}{2}=\frac{\pi}{\omega}$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot\omega=\frac{\pi}{2}$，设 A,B 的横坐标分别为 a,b.

设曲线段 ABC 与 x 轴所围成的区域的面积为 S 则 $S=\left|\int_a^b f'(x)dx\right|=\left|f(x)\big|_a^b\right|=\left|\sin(\omega a+\varphi)-\sin(\omega b+\varphi)\right|=2$，由几何概型知该点在△ABC 内的概率为 $P=\frac{S_{\triangle ABC}}{S}=\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

【点评】本题考查三角函数的图像与性质、几何概型等，（1）利用点 P 在图像上求 ω，（2）几何概型，求出三角形面积及曲边形面积，代入公式即得.

16.设 $N=2^n$（$n\in N^*$，$n\geqslant 2$），将 N 个数 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 依次放入编号为 1,2，⋯，N 的 N 个位置，

得到排列 $P_0=x_1x_2\cdots x_N$.将该排列中分别位于奇数与偶数位置的数取出，并按原顺序依次放入对应的前 $\frac{N}{2}$ 和后 $\frac{N}{2}$ 个位置，得到排列 $P_1=x_1x_3\cdots x_{N-1}x_2x_4\cdots x_N$，将此操作称为 C 变换，将 P_1 分成两段，每段 $\frac{N}{2}$ 个数，并对每段作 C 变换，得到 p_2；当 $2\leqslant i\leqslant n-2$ 时，将 P_i 分成 2^i 段，每段 $\frac{N}{2^i}$ 个数，并对每段 C 变换，得到 P_{i+1}，例如，当 N=8 时，$P_2=x_1x_5x_3x_7x_2x_6x_4x_8$，此时 x_7 位于 P_2 中的第 4 个位置.

（1）当 N=16 时，x_7 位于 P_2 中的第___个位置；

（2）当 $N=2^n$（$n\geqslant 8$）时，x_{173} 位于 P_4 中的第___个位置.

【答案】（1）6；（2）$3\times 2^{n-4}+11$

【解析】（1）当 N=16 时,

$P_0=x_1\ x_2x_3x_4x_5x_6\cdots x_{16}$,可设为$(1,2,3,4,5,6,\cdots,16)$，

$P_1=x_1x_3x_5x_7\cdots x_{15}x_2x_4x_6\cdots x_{16}$,即为$(1,3,5,7,9,\cdots 2,4,6,8,\cdots,16)$，

$P_2=x_1x_5x_9x_{13}x_3x_7x_{11}x_{15}x_2x_6\cdots x_{16}$,即$(1,5,9,13,3,7,11,15,2,6,\cdots,16)$，$x_7$ 位于 P_2 中的第 6 个位置,;

（2）方法同（1）,归纳推理知 x_{173} 位于 P_4 中的第$3\times 2^{n-4}+11$个位置.

【点评】本题考查在新环境下的创新意识，考查运算能力，考查创造性解决问题的能力.
需要在学习中培养自己动脑的习惯，才可顺利解决此类问题.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 75 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

某超市为了解顾客的购物量及结算时间等信息，安排一名员工随机收集了在该超市购物的 100 位顾客的相关数据，如下表所示.

一次购物量	1 至 4 件	5 至 8 件	9 至 12 件	13 至 16 件	17 件及以上
顾客数（人）	x	30	25	y	10
结算时间（分钟/人）	1	1.5	2	2.5	3

已知这 100 位顾客中的一次购物量超过 8 件的顾客占 55％.

（Ⅰ）确定 x，y 的值，并求顾客一次购物的结算时间 X 的分布列与数学期望；

（Ⅱ）若某顾客到达收银台时前面恰有 2 位顾客需结算，且各顾客的结算相互独立，求该顾客结算前的等候时间不超过 2.5 分钟的概率.

（注：将频率视为概率）

【解析】（1）由已知,得$25+y+10=55, x+y=35,$所以$x=15, y=20.$

该超市所有顾客一次购物的结算时间组成一个总体，所以收集的 100 位顾客一次购物的结算时间可视为总体的一个容量随机样本，将频率视为概率得

$$p(X=1)=\frac{15}{100}=\frac{3}{20},p(X=1.5)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10},p(X=2)=\frac{25}{10}$$

$$p(X=2.5)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5},p(X=3)=\frac{10}{100}=$$

X 的分布为

X	1	1.5	2	2.5	3
P	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

X 的数学期望为

$$E(X)=1\times\frac{3}{20}+1.5\times\frac{3}{10}+2\times\frac{1}{4}+2.5\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{10}.$$

（Ⅱ）记 A 为事件“该顾客结算前的等候时间不超过 2.5 分钟”，$X_i(i=1,2)$ 为该顾客前面第 i 位顾客的结算时间，则

$$P(A)=P(X_1=1且X_2=1)+P(X_1=1且X_2=1.5)+P(X_1=1.5且X_2=1).$$

由于顾客的结算相互独立，且 X_1, X_2 的分布列都与 X 的分布列相同，所以

$$P(A)=P(X_1=1)\times P(X_2=1)+P(X_1=1)\times P(X_2=1.5)+P(X_1=1.5)\times P(X_2=1)$$

$$=\frac{3}{20}\times\frac{3}{20}+\frac{3}{20}\times\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{3}{20}=.$$

故该顾客结算前的等候时间不超过 2.5 分钟的概率为 $\frac{9}{80}$.

【点评】本题考查概率统计的基础知识，考查分布列及数学期望的计算，考查运算能力、分析问题能力.第一问中根据统计表和 100 位顾客中的一次购物量超过 8 件的顾客占 55％知 $25+y+10=100\times55\%, x+y=35,$ 从而解得 x, y，计算每一个变量对应的概率，从而求得分布列和期望；第二问，通过设事件，判断事件之间互斥关系，从而求得该顾客结算前的等候时间不超过 2.5 分钟的概率.

18.（本小题满分 12 分）

如图 5，在四棱锥 P-ABCD 中，PA⊥平面 ABCD，AB=4，BC=3，AD=5，∠DAB=∠ABC=90°，E 是 CD 的中点.

（Ⅰ）证明：CD⊥平面 PAE；

（Ⅱ）若直线 PB 与平面 PAE 所成的角和 PB 与平面 ABCD 所成的角相等，求四棱锥 P-ABCD 的体积.

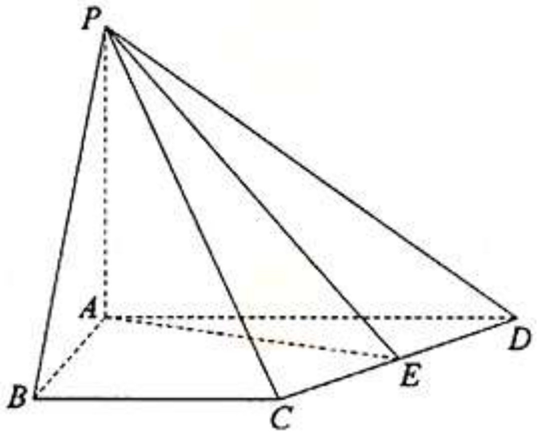


图 5

【解析】

解法 1（Ⅰ如图（1）)，连接 AC，由 AB=4， $BC=3$， $\angle ABC=90^\circ$, 得$AC=5.$

又$AD=5,$ E 是 C D 的中点，所以$CD\perp AE.$

$\because PA\perp$平面$ABCD, CD\subset$平面$ABCD,$ 所以$PA\perp CD.$

而PA, AE是平面PAE 内的两条相交直线，所以 CD⊥平面 PAE.

（Ⅱ）过点 B 作 $BG//CD,$ 分别与AE, AD相交于$F, G,$ 连接$PF.$

由（Ⅰ）CD⊥平面 PAE 知， B G ⊥平面 PAE.于是$\angle BPF$ 为直线 P B 与平面 PAE 所成的角，且$BG\perp AE$.

由$PA\perp$平面$ABCD$知，$\angle PBA$为直线PB与平面$ABCD$所成的角.

$AB=4, AG=2, BG\perp AF,$ 由题意，知$\angle PBA=\angle BPF,$

因为$\sin\angle PBA=\dfrac{PA}{PB}, \sin\angle BPF=\dfrac{BF}{PB},$ 所以$PA=BF.$

由$\angle DAB=\angle ABC=90^\circ$知，$AD//BC,$ 又$BG//CD,$ 所以四边形$BCDG$是平行四边形，故

$GD=BC=3.$ 于是$AG=2.$

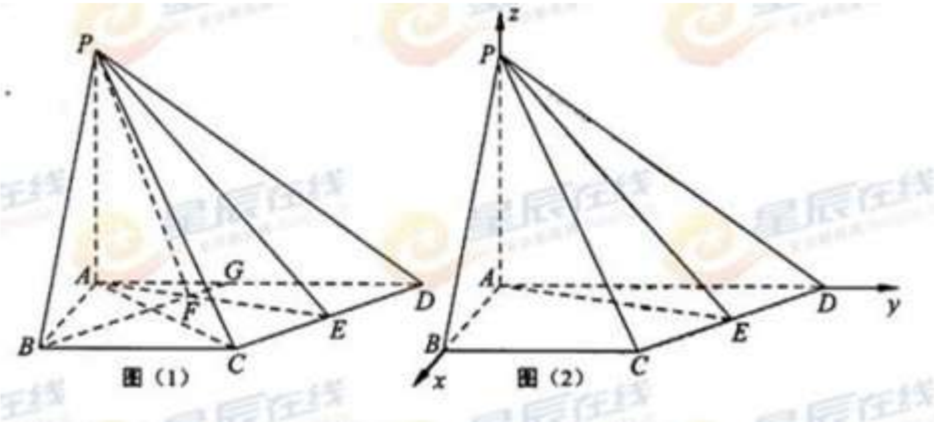
在 $\mathrm{Rt}\Delta BAG$ 中，$AB=4, AG=2, BG\perp AF,$ 所以

$$BG=\sqrt{AB^2+AG^2}=2\sqrt{5}, BF=\frac{AB^2}{BG}=\frac{16}{2\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

于是$PA=BF=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}.$

又梯形$ABCD$的面积为$S=\dfrac{1}{2}\times(5+3)\times4=16,$ 所以四棱锥$P-ABCD$的体积为

$$V=\frac{1}{3}\times S\times PA=\frac{1}{3}\times16\times\frac{8\sqrt{5}}{5}=\frac{128\sqrt{5}}{15}.$$



图（1）　图（2）

解法 2：如图（2），以 A 为坐标原点，AB, AD, AP 所在直线分别为 x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系.设 $PA=h,$ 则相关的各点坐标为：

$A(4,0,0), B(4,0,0), C(4,3,0), D(0,5,0), E(2,4,0), P(0,0,h).$

（Ⅰ）易知 $\overrightarrow{CD}=(-4,2,0), \overrightarrow{AE}=(2,4,0), \overrightarrow{AP}=(0,0,h).$ 因为

$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AE}=-8+8+0=0, \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AP}=0,$ 所以 $CD\perp AE, CD\perp AP.$ 而 AP, AE 是平面 PAE 内的两条相交直线，所以 $CD\perp$ 平面$PAE.$

(Ⅱ)由题设和（Ⅰ）知，$\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AP}$ 分别是平面PAE，平面$ABCD$ 的法向量，而 PB 与平面PAE 所成的角和 PB 与平面$ABCD$ 所成的角相等，所以

$$\left|\cos<\overrightarrow{CD},\overrightarrow{PB}>\right|=\left|\cos<\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB}>\right|,\text{ 即}\left|\frac{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{PB}}{\left|\overrightarrow{CD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PB}\right|}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}}{\left|\overrightarrow{PA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{PB}\right|}\right|.$$

由（Ⅰ）知，$\overrightarrow{CD}=(-4,2,0), \overrightarrow{AP}=(0,0,-h),$ 由 $\overrightarrow{PB}=(4,0,-h),$ 故

$$\left|\frac{-16+0+0}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{16+h^2}}\right|=\left|\frac{0+0+h^2}{h\cdot\sqrt{16+h^2}}\right|.$$

解得 $h=\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

又梯形 ABCD 的面积为 $S=\frac{1}{2}\times(5+3)\times4=16$，所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为

$$V=\frac{1}{3}\times S\times PA=\frac{1}{3}\times16\times\frac{8\sqrt{5}}{5}=\frac{128\sqrt{5}}{15}.$$

【点评】本题考查空间线面垂直关系的证明，考查空间角的应用，及几何体体积计算.第一问只要证明$PA\perp CD$即可，第二问算出梯形的面积和棱锥的高，由$V=\frac{1}{3}\times S\times PA$算得体积，或者建立空间直角坐标系，求得高几体积.

19.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，记$A(n)=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$，$B(n)=a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n+1}$，$C(n)=a_3+a_4+\cdots\cdots+a_{n+2}$，$n=1,2$，……

（1） 若$a_1=1$，$a_2=5$，且对任意$n\in\mathbb{N}^*$，三个数$A(n)$，$B(n)$，$C(n)$组成等差数列，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

（2） 证明：数列$\{a_n\}$是公比为q的等比数列的充分必要条件是：对任意$n\in\mathbb{N}^*$，三个数$A(n)$，$B(n)$，$C(n)$组成公比为q的等比数列.

【解析】

解（1）对任意$n\in\mathbb{N}^*$，三个数$A(n),B(n),C(n)$是等差数列，所以

$$B(n)-A(n)=C(n)-B(n),$$

即$a_{n+1}-a_1=a_{n+2}$，亦即$a_{n+2}-a_{n-1}=a_2-a_1=4.$

故数列$\{a_n\}$是首项为 1，公差为 4 的等差数列.于是$a_n=1+(n-1)\times4=4n-3.$

（Ⅱ）（1）必要性：若数列$\{a_n\}$是公比为q的等比数列，则对任意$n\in\mathbb{N}^*$，有

$a_{n-1}=a_{nq}$.由$a_n>0$知，$A(n),B(n),C(n)$均大于 0，于是

$$\frac{B(n)}{A(n)}=\frac{a_2+a_3+\ldots+a_{n+1}}{a_1+a_2+\ldots+a_n}=\frac{q(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{a_1+a_2+\ldots+a_n}=q,$$

$$\frac{C(n)}{B(n)}=\frac{a_3+a_4+\ldots+a_{n+2}}{a_2+a_3+\ldots+a_{n+1}}=\frac{q(a_2+a_3+\ldots+a_{n+1})}{a_2+a_3+\ldots+a_{n+1}}=q,$$

即$\frac{B(n)}{A(n)}=\frac{C(n)}{B(n)}=q$，所以三个数$A(n),B(n),C(n)$组成公比为$q$的等比数列.

（2）充分性：若对于任意$n\in\mathbb{N}^*$，三个数$A(n),B(n),C(n)$组成公比为q的等比数列，则

$$B(n)=qA(n),\ C(n)=qB(n),$$

于是$C(n)-B(n)=q\left[B(n)-A(n)\right]$，得$a_{n+2}-a_2=q(a_{n+1}-a_1)$，即

$$a_{n+2}-qa_{n+1}=a_2-qa_1.$$

由$n=1$有$B(1)=qA(1)$，即$a_2=qa_1$，从而$a_{n+2}-qa_{n+1}=0$.

因为$a_n>0$，所以$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_2}{a_1}=q$，故数列$\{a_n\}$是首项为$a_1$，公比为$q$的等比数列，

综上所述，数列$\{a_n\}$是公比为q的等比数列的充分必要条件是：对任意 n∈N *，三个数

$A(n),B(n),C(n)$组成公比为q的等比数列.

【点评】本题考查等差数列、等比数列的定义、性质及充要条件的证明.第一问由等差数列定义可得；第二问要从充分性、必要性两方面来证明，利用等比数列的定义及性质易得证.

20.（本小题满分 13 分）
某企业接到生产 3000 台某产品的 A，B，C 三种部件的订单，每台产品需要这三种部件的数量分别为 2，2，1（单位：件）.已知每个工人每天可生产 A 部件 6 件，或 B 部件 3 件，或 C 部件 2 件.该企业计划安排 200 名工人分成三组分别生产这三种部件，生产 B 部件的人数与生产 A 部件的人数成正比，比例系数为 k（k 为正整数）.
（1）设生产 A 部件的人数为 x，分别写出完成 A，B，C 三种部件生产需要的时间；
（2）假设这三种部件的生产同时开工，试确定正整数 k 的值，使完成订单任务的时间最短，并给出时间最短时具体的人数分组方案.
【解析】
解：（Ⅰ）设完成 A,B,C 三种部件的生产任务需要的时间（单位：天）分别为

$T_1(x),T_2(x),T_3(x)$, 由题设有

$$T_1(x)=\frac{2\times 3000}{6x}=\frac{1000}{x},T_2(x)=\frac{2000}{kx},T_3(x)=\frac{1500}{200-(1+k)x}$$

期中$x,kx,200-(1+k)x$均为 1 到 200 之间的正整数.

（Ⅱ）完成订单任务的时间为$f(x)=\max\{T_1(x),T_2(x),T_3(x)\}$,其定义域为

$\left\{x\left|0<x<\frac{200}{1+k},x\in N^*\right.\right\}$.易知，$T_1(x),T_2(x)$为减函数，$T_3(x)$为增函数.注意到

$T_2(x)=\frac{2}{k}T_1(x)$, 于是

（1）当$k=2$时，$T_1(x)=T_2(x)$，此时

$$f(x)=\max\{T_1(x),T_3(x)\}=\max\left\{\frac{1000}{x},\frac{1500}{200-3x}\right\},$$

由函数$T_1(x),T_3(x)$的单调性知，当$\frac{1000}{x}=\frac{1500}{200-3x}$时$f(x)$取得最小值，解得

$x=\frac{400}{9}$.由于

$44<\dfrac{400}{9}<45$, 而 $f(44)=T_1(44)=\dfrac{250}{11}$, $f(45)=T_3(45)=\dfrac{300}{13}$, $f(44)<f(45)$.

故当 $x=44$ 时完成订单任务的时间最短，且最短时间为 $f(44)=\dfrac{250}{11}$.

（2）当 $k>2$ 时，$T_1(x)>T_2(x)$, 由于 k 为正整数，故 $k\geq 3$，此时 $T(x)=\dfrac{375}{50-x}$, $\varphi(x)=\max\left\{T_1(x),T(x)\right\}$ 易知 $T(x)$ 为增函数，则

$$f(x)=\max\left\{T_1(x),T_3(x)\right\}$$

$$\geq\max\left\{T_1(x),T(x)\right\}$$

$$=\varphi(x)=\max\left\{\frac{1000}{x},\frac{375}{50-x}\right\}.$$

由函数 $T_1(x),T(x)$ 的单调性知，当 $\dfrac{1000}{x}=\dfrac{375}{50-x}$ 时 $\varphi(x)$ 取得最小值，解得 $x=\dfrac{400}{11}$.由于

$36<\dfrac{400}{11}<37$, 而 $\varphi(36)=T_1(36)=\dfrac{250}{9}>\dfrac{250}{11}$, $\varphi(37)=T(37)=\dfrac{375}{13}>\dfrac{250}{11}$

此时完成订单任务的最短时间大于 $\dfrac{250}{11}$.

（3）当 $k<2$ 时，$T_1(x)<T_2(x)$, 由于 k 为正整数，故 $k=1$，此时

$f(x)=\max\left\{T_2(x),T_3(x)\right\}=\max\left\{\dfrac{2000}{x},\dfrac{750}{100-x}\right\}$. 由函数 $T_2(x),T_3(x)$ 的单调性知，

当 $\dfrac{2000}{x}=\dfrac{750}{100-x}$ 时 $f(x)$ 取得最小值，解得 $x=\dfrac{800}{11}$.类似（1）的讨论.此时

完成订单任务的最短时间为 $\dfrac{250}{9}$，大于 $\dfrac{250}{11}$.

综上所述，当 $k=2$ 时完成订单任务的时间最短，此时生产Ａ，Ｂ，Ｃ三种部件的人数分别为 44,88,68.

【点评】本题为函数的应用题，考查分段函数、函数单调性、最值等，考查运算能力及用数学知识分析解决实际应用问题的能力.第一问建立函数模型；第二问利用单调性与最值来解决，体现分类讨论思想.

21.（本小题满分 13 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的点均在 C_2：$(x-5)^2+y^2=9$ 外，且对 C_1 上任意一点 M，M 到直线 $x=-2$ 的距离等于该点与圆 C_2 上点的距离的最小值.

（Ⅰ）求曲线 C_1 的方程；

（Ⅱ）设 $P(x_0,y_0)$（$y_0\neq\pm 3$）为圆 C_2 外一点，过 P 作圆 C_2 的两条切线，分别与曲线 C_1 相交于点 A，B 和 C，D.证明：当 P 在直线 $x=-4$ 上运动时，四点 A，B，C，D 的纵坐标之积为定值.

【解析】（Ⅰ）解法 1 ：设 M 的坐标为 (x,y)，由已知得

$$|x+2|=\sqrt{(x-5)^2+y^2}-3,$$

易知圆C_2上的点位于直线$x=-2$的右侧.于是$x+2>0$，所以

$$\sqrt{(x-5)^2+y^2}=x+5.$$

化简得曲线C_1的方程为$y^2=20x$.

解法 2 ：由题设知，曲线C_1上任意一点 M 到圆心C_2 $(5,0)$的距离等于它到直线$x=-5$的距离，因此，曲线C_1是以$(5,0)$为焦点，直线$x=-5$为准线的抛物线，故其方程为$y^2=20x$.

（Ⅱ）当点 P 在直线$x=-4$上运动时，P 的坐标为$(-4,y_0)$，又$y_0\neq\pm3$，则过 P 且与圆C_2相切得直线的斜率k存在且不为 0，每条切线都与抛物线有两个交点，切线方程为$y-y_0=k(x+4)$,即$kx-y+y_0+4k=0$.于是

$$\frac{|5k+y_0+4k|}{\sqrt{k^2+1}}=3.$$

整理得

$$72k^2+18y_0k+y_0^2-9=0. \qquad ①$$

设过 P 所作的两条切线PA,PC的斜率分别为k_1,k_2，则k_1,k_2是方程①的两个实根，故

$$k_1+k_2=-\frac{18y_0}{72}=-\frac{y_0}{4}. \qquad ②$$

由$\begin{cases}k_1x-y+y_0+4k_1=0,\\ y^2=20x,\end{cases}$得$k_1y^2-20y+20(y_0+4k_1)=0. \qquad ③$

设四点 A,B,C,D 的纵坐标分别为y_1,y_2,y_3,y_4，则是方程③的两个实根，所以

$$y_1\cdot y_2=\frac{20(y_0+4k_1)}{k_1}. \qquad ④$$

同理可得

$$y_3\cdot y_4=\frac{20(y_0+4k_2)}{k_2}. \qquad ⑤$$

于是由②，④，⑤三式得

$$y_1y_2y_3y_4=\frac{400(y_0+4k_1)(y_0+4k_2)}{k_1k_2}$$

$$=\frac{400\left[y_0^2+4(k_1+k_2)y_0+16k_1k_2\right]}{k_1k_2}$$

$$=\frac{400\left[y_0^2-y_0^2+16k_1k_2\right]}{k_1k_2}6400.$$

所以，当 P 在直线 $x=-4$ 上运动时，四点 A，B，C，D 的纵坐标之积为定值 6400.

【点评】本题考查曲线与方程、直线与曲线的位置关系，考查运算能力，考查数形结合思想、函数与方程思想等数学思想方法.第一问用直接法或定义法求出曲线的方程；第二问设出切线方程，把直线与曲线方程联立，由一元二次方程根与系数的关系得到 A,B,C,D 四点纵坐标之积为定值，体现“设而不求”思想.

22.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)==e^{ax}-x$，其中 a≠0.

（1） 若对一切 x∈R， $f(x)$ ≥1 恒成立，求 a 的取值集合.

（2）在函数 $f(x)$ 的图像上取定两点 $A(x_1,f(x_1))$， $B(x_2,f(x_2))$ $(x_1<x_2)$，记直线AB 的斜率为K，问：是否存在 x_0∈（x_1，x_2），使 $f'(x_0)>k$ 成立？若存在，求 x_0 的取值范围；若不存在，请说明理由.

【解析】(Ⅰ) 若 $a<0$，则对一切 $x>0$， $f(x)=e^{ax}-x<1$，这与题设矛盾，又 $a\neq 0$，故 $a>0$.

而 $f'(x)=ae^{ax}-1,$ 令 $f'(x)=0,$ 得$x=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}.$

当 $x<\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}$ 时， $f'(x)<0, f(x)$ 单调递减；当 $x>\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}$ 时， $f'(x)>0, f(x)$ 单调递增，故当 $x=\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}$ 时， $f(x)$ 取最小值 $f(\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a})=\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}.$

于是对一切 $x\in R, f(x)\geq 1$ 恒成立，当且仅当

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}\geq 1 . \qquad ①$$

令 $g(t)=t-t\ln t,$ 则 $g'(t)=-\ln t.$

当 $0<t<1$ 时， $g'(t)>0, g(t)$ 单调递增；当 $t>1$ 时， $g'(t)<0, g(t)$ 单调递减.

故当 $t=1$ 时， $g(t)$ 取最大值 $g(1)=1$.因此，当且仅当 $\frac{1}{a}=1$ 即 $a=1$ 时，①式成立.

综上所述，a 的取值集合为$\{1\}$.

（Ⅱ）由题意知，$k=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{e^{ax_2}-e^{ax_1}}{x_2-x_1}-1.$

令$\varphi(x)=f'(x)-k=ae^{ax}-\frac{e^{ax_2}-e^{ax_1}}{x_2-x_1}$,则

$\varphi(x_1)=-\frac{e^{ax_1}}{x_2-x_1}\left[e^{a(x_2-x_1)}-a(x_2-x_1)-1\right],$

$\varphi(x_2)=\frac{e^{ax_2}}{x_2-x_1}\left[e^{a(x_1-x_2)}-a(x_1-x_2)-1\right].$

令$F(t)=e^t-t-1$，则$F'(t)=e^t-1$.

当$t<0$时，$F'(t)<0, F(t)$单调递减；当$t>0$时，$F'(t)>0, F(t)$单调递增.

故当$t=0$，$F(t)>F(0)=0,$ 即$e^t-t-1>0.$

从而$e^{a(x_2-x_1)}-a(x_2-x_1)-1>0$，$e^{a(x_1-x_2)}-a(x_1-x_2)-1>0,$ 又$\frac{e^{ax_1}}{x_2-x_1}>0,$ $\frac{e^{ax_2}}{x_2-x_1}>0,$

所以$\varphi(x_1)<0, \varphi(x_2)>0.$

因为函数$y=\varphi(x)$在区间$\left[x_1,x_2\right]$上的图像是连续不断的一条曲线，所以存在$x_0\in(x_1,x_2)$使

$\varphi(x_0)=0,$ $\varphi'(x)=a^2e^{ax}>0, \varphi(x)$单调递增，故这样的$c$是唯一的，且$c=\frac{1}{a}\ln\frac{e^{ax_2}-e^{ax_1}}{a(x_2-x_1)}$.

故当且仅当$x\in(\frac{1}{a}\ln\frac{e^{ax_2}-e^{ax_1}}{a(x_2-x_1)},x_2)$时，　$f'(x_0)>k$.

综上所述，存在$x_0\in(x_1,x_2)$使$f'(x_0)>k$成立.且x_0的取值范围为

$$(\frac{1}{a}\ln\frac{e^{ax_2}-e^{ax_1}}{a(x_2-x_1)},x_2).$$

【点评】本题考查利用导函数研究函数单调性、最值、不等式恒成立问题等，考查运算能力，考查分类讨论思想、函数与方程思想，转化与划归思想等数学思想方法.第一问利用导函数法求出$f(x)$取最小值$f(\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a})=\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln\frac{1}{a}$.对一切 x∈R，f(x) ≥1 恒成立转化为$f(x)_{\min}\geq 1$，从而得出 a 的取值集合；第二问在假设存在的情况下进行推理，通过构造函数，研究这个函数的单调性及最值来进行分析判断.