2007年全国普通高等学校招生统一考试（上海卷）

数学试卷(文史类)

考生注意：

1．答卷前，考生务必将姓名、高考准考证号、校验码等填写清楚．

2．本试卷共有21道试题，满分150分．考试时间120分钟．请考生用钢笔或圆珠笔将答案直接写在试卷上．

一．填空题（本大题满分44分）本大题共有11题，只要求直接填写结果，每个空格填对得4分，否则一律得零分．

1．方程$3^{x-1}=\dfrac{1}{9}$的解是__________________．

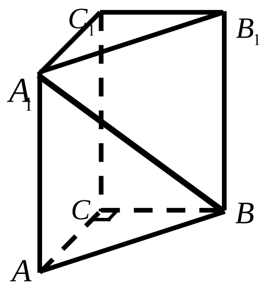
2．函数$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$的反函数$f^{-1}(x)=$____________________．

3．直线$4x+y-1=0$的倾斜角$\theta=$___________________．

4．函数$y=\sec x\bullet\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$的最小正周期$T=$_________________．

5．以双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$的中心为顶点，且以该双曲线的右焦点为焦点的抛物线方程是

____．



6．若向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为60°，$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$，则$\vec{a}\bullet\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=$_____．

7．如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle ACB=90^\circ$，$AA_1=2$，$AC=BC=1$，则异面直线A_1B与AC所成角的大小是____________________（结果用反三角函数值表示）．

8．某工程由A，B，C，D四道工序组成，完成它们需用时间依次为$2,5,x,4$天．四道工序的先后顺序及相互关系是：A，B可以同时开工；A完成后，C可以开工；B，C完成后，D可以开工．若该工程总时数为9天，则完成工序C需要的天数x最大是____．

9．在五个数字$1,2,3,4,5$中，若随机取出三个数字，则剩下两个数字都是奇数的概率是

_____________________（结果用数值表示）．

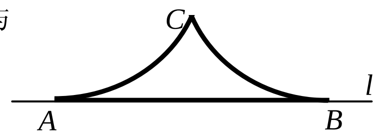
10．对于非零实数a，b，以下四个命题都成立：

① $a+\frac{1}{a}\neq 0$；　　② $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$；

③ 若$|a|=|b|$，则$a=\pm b$；　　④ 若$a^2=ab$，则$a=b$．

那么，对于非零复数a，b，仍然成立的命题的所有序号是__________________．

11．如图，A,B是直线l上的两点，且$AB=2$．两个半径相等的动圆分别与l相切于A,B点，C是这两个圆的公共点，则圆弧AC，CB与线段AB围成图形面积S的取值范围是____________．



二．选择题（本大题满分 16 分）本大题共有 4 题，每题都给出代号为 A，B，C，D 的四个结论，其中有且只有一个结论是正确的，必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内，选对得 4 分，不选、选错或者选出的代号超过一个（不论是否都写在圆括号内），一律得零分．

12．已知a，$b\in\mathbf{R}$，且$2+a\mathrm{i}$, $b+3\mathrm{i}$（i是虚数单位）是一个实系数一元二次方程的两个根，那么a，b的值分别是（　　）

A．$a=-3$，$b=2$　　B．$a=3$，$b=-2$

C．$a=-3$，$b=-2$　　D．$a=3$，$b=2$

13．圆$x^2+y^2-2x-1=0$关于直线$2x-y+3=0$对称的圆的方程是（　　）

A．$(x+3)^2+(y-2)^2=\frac{1}{2}$　　B．$(x-3)^2+(y+2)^2=\frac{1}{2}$

C．$(x+3)^2+(y-2)^2=2$　　D．$(x-3)^2+(y+2)^2=2$

14．数列$\{a_n\}$中，$a_n=\begin{cases}\frac{1}{n^2}, & 1\leqslant n\leqslant 1000,\\ \frac{n^2}{n^2-2n}, & n\geqslant 1001,\end{cases}$ 则数列$\{a_n\}$的极限值（　　）

A．等于0　　B．等于1　　C．等于0或1　　D．不存在

15．设$f(x)$是定义在正整数集上的函数，且$f(x)$满足：“当$f(k)\geqslant k^2$成立时，总可推出$f(k+1)\geqslant(k+1)^2$成立”．　那么，下列命题总成立的是（　　）

A．若$f(1)<1$成立，则$f(10)<100$成立

B．若$f(2)<4$成立，则$f(1)\geqslant 1$成立

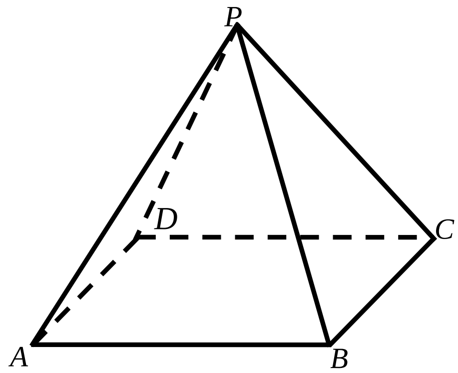
C．若$f(3)\geqslant 9$成立，则当$k\geqslant 1$时，均有$f(k)\geqslant k^2$成立

D．若 $f(4)\geqslant 25$ 成立，则当 $k\geqslant 4$ 时，均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立

三．解答题（本大题满分 90 分）本大题共有 6 题，解答下列各题必须写出必要的步骤．

16．（本题满分 12 分）

在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA=2$，直线 PA 与平面 $ABCD$ 所成的角为 60°，求正四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 V．



17．（本题满分 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，a, b, c 分别是三个内角 A, B, C 的对边．若 $a=2,\ C=\dfrac{\pi}{4}$，$\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，求 $\triangle ABC$ 的面积 S．

18．（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分．

近年来，太阳能技术运用的步伐日益加快．2002 年全球太阳电池的年生产量达到 670 兆瓦，年生产量的增长率为 34%． 以后四年中，年生产量的增长率逐年递增 2%（如，2003 年的年生产量的增长率为 36%）．

（1）求2006年全球太阳电池的年生产量（结果精确到0.1兆瓦）；

（2）目前太阳电池产业存在的主要问题是市场安装量远小于生产量，2006 年的实际安装量为1420兆瓦．假设以后若干年内太阳电池的年生产量的增长率保持在42%，到 2010年，要使年安装量与年生产量基本持平（即年安装量不少于年生产量的95%），这四年中太阳电池的年安装量的平均增长率至少应达到多少（结果精确到0.1%）？

19．（本题满分 **14** 分）本题共有 **2** 个小题，第 **1** 小题满分 **7** 分，第 **2** 小题满分 **7** 分．

已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}$ （$x\neq 0$，常数 $a\in\mathbf{R}$）．

（1）当 $a=2$ 时，解不等式 $f(x)-f(x-1)>2x-1$；

（2）讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性，并说明理由．

20．（本题满分 **18** 分）本题共有 **3** 个小题，第 **1** 小题满分 **3** 分，第 **2** 小题满分 **6** 分，第 **3** 小题满分 **9** 分．

如果有穷数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m$（m 为正整数）满足条件 $a_1=a_m$，$a_2=a_{m-1}$，…，$a_m=a_1$，即 $a_i=a_{m-i+1}$（$i=1,2,\cdots,m$），我们称其为“对称数列”．

例如，数列$1,2,5,2,1$与数列$8,4,2,2,4,8$都是“对称数列”.

（1）设$\{b_n\}$是7项的“对称数列”，其中b_1,b_2,b_3,b_4是等差数列，且$b_1=2$，$b_4=11$. 依次写出$\{b_n\}$的每一项；

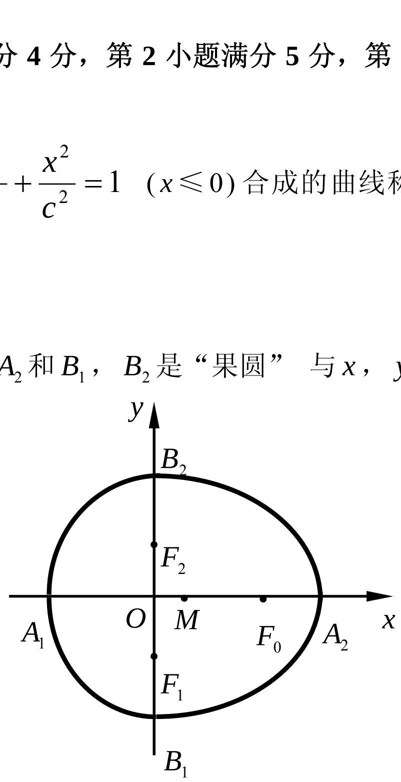
（2）设$\{c_n\}$是49项的“对称数列”，其中$c_{25},c_{26},\cdots,c_{49}$是首项为$1$，公比为$2$的等比数列，求$\{c_n\}$各项的和$S$；

（3）设$\{d_n\}$是100项的“对称数列”，其中$d_{51},d_{52},\cdots,d_{100}$是首项为$2$，公差为$3$的等差数列．求$\{d_n\}$前$n$项的和$S_n$ $(n=1,2,\cdots,100)$.

21．（本题满分 18 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 5 分，第 3 小题满分 9 分．

我们把由半椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (x\geqslant 0)$与半椭圆$\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1 \quad (x\leqslant 0)$合成的曲线称作“果圆”，其中$a^2=b^2+c^2$，$a>0$，$b>c>0$.

如图，设点F_0，F_1，F_2是相应椭圆的焦点，A_1，A_2和B_1，B_2是“果圆” 与x，y轴的交点，M是线段A_1A_2的中点.



（1）若$\triangle F_0F_1F_2$是边长为 1 的等边三角形，求该“果圆”的方程;

（2）设P是“果圆”的半椭圆$\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{c^2}=1$ $(x\leqslant 0)$上任意一点．求证：当$|PM|$取得最小值时，

P 在点 B_1，B_2 或 A_1 处；

（3）若 P 是“果圆”上任意一点，求 $\left|PM\right|$ 取得最小值时点 P 的横坐标.

2007年全国普通高等学校招生统一考试（上海卷）
数学试卷(文史类)答案要点

一、填空题（第1题至第11题）

1． $x=-1$　　2． $1+\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$　　3． $\pi-\arctan 4$　　4． π

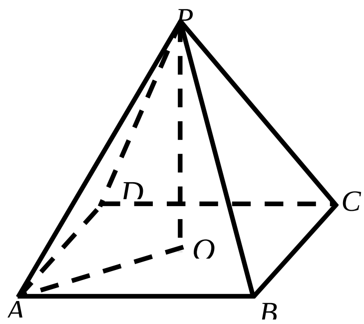
5． $y^2=12x$　　6． $\frac{1}{2}$　　7． $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$　　8． 3

9． 0.3　　10． ②　④　　11． $\left(0,2-\frac{\pi}{2}\right]$

二、选择题（第12题至第15题）

题　号	12	13	14	15
答　案	A	C	B	D

三、解答题（第16题至第21题）



16．解：作 $PO\perp$平面 $ABCD$，垂足为 O．连接 AO，O 是正方形 $ABCD$ 的中心，$\angle PAO$ 是直线 PA 与平面 $ABCD$ 所成的角．

$\angle PAO=60^\circ$，$PA=2$．$\therefore$　$PO=\sqrt{3}$．

$AO=1$，$AB=\sqrt{2}$，

$\therefore$　$V=\frac{1}{3}PO\bullet S_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times 2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$．

17．解：　由题意，得 $\cos B=\frac{3}{5}$，B 为锐角，$\sin B=\frac{4}{5}$，

$\sin A=\sin(\pi-B-C)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}-B\right)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，

由正弦定理得　$c=\frac{10}{7}$，

$\therefore$　$S=\frac{1}{2}ac\bullet\sin B=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{10}{7}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{7}$．

18．解：(1)　由已知得2003，2004，2005，2006年太阳电池的年生产量的增长率依次为

36%，38%，40%，42%． 则 2006 年全球太阳电池的年生产量为

$670\times1.36\times1.38\times1.40\times1.42\approx2499.8$ (兆瓦).

（2）设太阳电池的年安装量的平均增长率为 x，则 $\dfrac{1420(1+x)^4}{2499.8(1+42\%)^4}\geqslant95\%$．

解得 $x\geqslant0.615$．

因此，这四年中太阳电池的年安装量的平均增长率至少应达到 61.5%．

19．解：（1）$x^2+\dfrac{2}{x}-(x-1)^2-\dfrac{2}{x-1}>2x-1$，

$\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{x-1}>0$，

$x(x-1)<0$．

∴ 原不等式的解为 $0<x<1$．

（2）当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2$，

对任意 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，

∴ $f(x)$ 为偶函数.

当 $a\neq0$ 时，$f(x)=x^2+\dfrac{a}{x}\,(a\neq0,x\neq0)$，

取 $x=\pm1$，得 $f(-1)+f(1)=2\neq0,\quad f(-1)-f(1)=-2a\neq0$，

∴ $f(-1)\neq-f(1),\quad f(-1)\neq f(1)$，

∴ 函数 $f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数.

20．解：（1）设数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，则 $b_4=b_1+3d=2+3d=11$，解得 $d=3$，

∴ 数列 $\{b_n\}$ 为 $2,5,8,11,8,5,2$．

（2）$S=c_1+c_2+\cdots+c_{49}=2(c_{25}+c_{26}+\cdots+c_{49})-c_{25}$

$$=2\left(1+2+2^2+\cdots+2^{24}\right)-1=2\left(2^{25}-1\right)-1=2^{26}-3=67108861.$$

（3）$d_{51}=2,\quad d_{100}=2+3\times(50-1)=149$．

由题意得 $d_1,d_2,\cdots,d_{50}$ 是首项为 149，公差为 -3 的等差数列.

当 $n\leqslant50$ 时，$S_n=d_1+d_2+\cdots+d_n$

$$=149n+\frac{n(n-1)}{2}(-3)=-\frac{3}{2}n^2+\frac{301}{2}n.$$

当$51 \leqslant n \leqslant 100$时，$S_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$

$$= S_{50} + \left(d_{51} + d_{52} + \cdots + d_n\right)$$

$$= 3775 + 2 \bullet (n-50) + \frac{(n-50)(n-51)}{2} \times 3$$

$$= \frac{3}{2}n^2 - \frac{299}{2}n + 7500.$$

综上所述，$S_n = \begin{cases} -\dfrac{3}{2}n^2 + \dfrac{301}{2}n, & 1 \leqslant n \leqslant 50, \\ \dfrac{3}{2}n^2 - \dfrac{299}{2}n + 7500, & 51 \leqslant n \leqslant 100. \end{cases}$

21．解：（1）$\because$ $F_0(c,0)$，$F_1\left(0, -\sqrt{b^2-c^2}\right)$，$F_2\left(0, \sqrt{b^2-c^2}\right)$，

$\therefore$ $\left|F_0F_2\right| = \sqrt{\left(b^2-c^2\right)+c^2} = b = 1$，$\left|F_1F_2\right| = 2\sqrt{b^2-c^2} = 1$，

于是$c^2 = \dfrac{3}{4}$，$a^2 = b^2 + c^2 = \dfrac{7}{4}$，

所求“果圆”方程为$\dfrac{4}{7}x^2 + y^2 = 1 \quad (x \geqslant 0)$，$y^2 + \dfrac{4}{3}x^2 = 1 \quad (x \leqslant 0)$．

（2）设$P(x,y)$，则

$$|PM|^2 = \left(x - \frac{a-c}{2}\right)^2 + y^2$$

$$= \left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)x^2 - (a-c)x + \frac{(a-c)^2}{4} + b^2, \quad -c \leqslant x \leqslant 0,$$

$\because$ $1 - \dfrac{b^2}{c^2} < 0$，$\therefore$ $|PM|^2$的最小值只能在$x=0$或$x=-c$处取到.

即当$\left|PM\right|$取得最小值时，P在点B_1，B_2或A_1处.

（3）$\because$ $|A_1M| = |MA_2|$，且B_1和B_2同时位于“果圆”的半椭圆$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (x \geqslant 0)$和半椭圆$\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{x^2}{c^2} = 1 \quad (x \leqslant 0)$上，所以，由（2）知，只需研究$P$位于“果圆”的半椭圆$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\,(x \geqslant 0)$上的情形即可.

$$|PM|^2 = \left(x - \frac{a-c}{2}\right)^2 + y^2$$

$$= \frac{c^2}{a^2}\left[x - \frac{a^2(a-c)}{2c^2}\right]^2 + b^2 + \frac{(a-c)^2}{4} - \frac{a^2(a-c)^2}{4c^2}.$$

当 $x=\dfrac{a^2(a-c)}{2c^2}\leqslant a$，即 $a\leqslant 2c$ 时，$|PM|^2$ 的最小值在 $x=\dfrac{a^2(a-c)}{2c^2}$ 时取到，

此时 P 的横坐标是 $\dfrac{a^2(a-c)}{2c^2}$.

当 $x=\dfrac{a^2(a-c)}{2c^2}>a$，即 $a>2c$ 时，由于 $|PM|^2$ 在 $x<a$ 时是递减的，$|PM|^2$ 的最小值在 $x=a$ 时取到，此时 P 的横坐标是 a.

综上所述，若 $a\leqslant 2c$，当 $|PM|$ 取得最小值时，点 P 的横坐标是 $\dfrac{a^2(a-c)}{2c^2}$；若 $a>2c$，当 $|PM|$ 取得最小值时，点 P 的横坐标是 a 或 $-c$.