

一、选择题(本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分)

1. (3 分) $-\frac{1}{3}$ 的倒数为()

- A. $\frac{1}{3}$
- B. 3
- C. -3
- D. -1

解析: $\because (-\frac{1}{3}) \times (-3) = 1,$

$\therefore -\frac{1}{3}$ 的倒数为-3.

故选 C.

2. (3 分) 为了考察一批电视机的使用寿命，从中任意抽取了 10 台进行实验，在这个问题中样本是()

- A. 抽取的 10 台电视机
- B. 这一批电视机的使用寿命
- C. 10
- D. 抽取的 10 台电视机的使用寿命

解析: 根据样本的定义可知为了考察一批电视机的使用寿命，从中任意抽取了 10 台进行实验，

则 10 台电视机的使用寿命是样本，

故选 D.

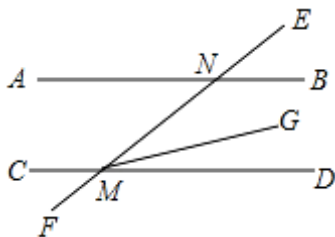
3. (3 分) 中国的领水面积约为 370000km^2 ，将数 370000 用科学记数法表示为()

- A. 37×10^4
- B. 3.7×10^4
- C. 0.37×10^6
- D. 3.7×10^5

解析: $370000 = 3.7 \times 10^5,$

故选: D.

4. (3 分) 如图，已知直线 $AB \parallel CD$ ，直线 EF 与 AB、CD 相交于 N、M 两点，MG 平分 $\angle EMD$ ，若 $\angle BNE = 30^\circ$ ，则 $\angle EMG$ 等于()



- A. 15°

- B. 30°
- C. 75°
- D. 150°

解析：∵直线 $AB \parallel CD$, $\angle BNE = 30^\circ$,

$$\therefore \angle DME = \angle BNE = 30^\circ.$$

∵ MG 是 $\angle EMD$ 的角平分线,

$$\therefore \angle EMG = \frac{1}{2} \angle EMD = 15^\circ.$$

故选 A.

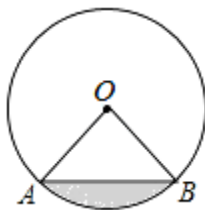
5. (3分) 下列事件发生的概率为 0 的是 ()

- A. 射击运动员只射击 1 次, 就命中靶心
- B. 任取一个实数 x , 都有 $|x| \geq 0$
- C. 画一个三角形, 使其三边的长分别为 8cm, 6cm, 2cm
- D. 抛掷一枚质地均匀且六个面分别刻有 1 到 6 的点数的正方体骰子, 朝上一面的点数为 6

解析: 事件发生的概率为 0 的是画一个三角形, 使其三边的长分别为 8cm, 6cm, 2cm.

故选 C.

6. (3分) 如图, 已知 $\odot O$ 的周长为 4π , \widehat{AB} 的长为 π , 则图中阴影部分的面积为 ()



- A. $\pi - 2$
- B. $\pi - \sqrt{3}$
- C. π
- D. 2

解析: ∵ $\odot O$ 的周长为 4π ,

$$\therefore \odot O \text{ 的半径是 } r = 4\pi \div 2\pi = 2,$$

∵ \widehat{AB} 的长为 π ,

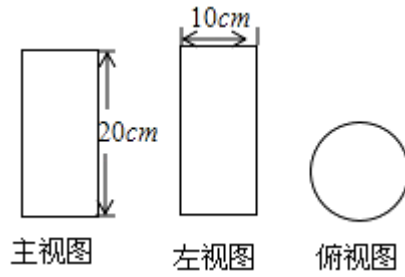
$$\therefore \widehat{AB} \text{ 的长等于 } \odot O \text{ 的周长的 } \frac{1}{4},$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = \frac{1}{4} \times \pi \times 2^2 - 2 \times 2 \div 2 = \pi - 2.$$

故选: A.

7. (3分) 某商品的外包装盒的三视图如图所示, 则这个包装盒的体积是 ()



- A. $200 \pi \text{ cm}^3$
- B. $500 \pi \text{ cm}^3$
- C. $1000 \pi \text{ cm}^3$
- D. $2000 \pi \text{ cm}^3$

解析：根据图示，可得商品的外包装盒是底面直径是 10cm，高是 20cm 的圆柱，
 \therefore 这个包装盒的体积是：

$$\begin{aligned} & \pi \times (10 \div 2)^2 \times 20 \\ &= \pi \times 25 \times 20 \\ &= 500 \pi (\text{cm}^3). \end{aligned}$$

故选：B.

8. (3 分) 将抛物线 $y = -x^2 + 2x + 3$ 在 x 轴上方的部分沿 x 轴翻折至 x 轴下方，图象的剩余部分不变，得到一个新的函数图象，那么直线 $y = x + b$ 与此新图象的交点个数的情况有 () 种.

- A. 6
- B. 5
- C. 4
- D. 3

解析：如图 1，所示：函数图象没有交点.

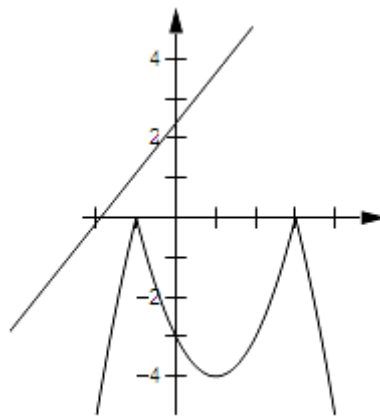


图1

如图 2 所示：函数图象有 1 个交点.

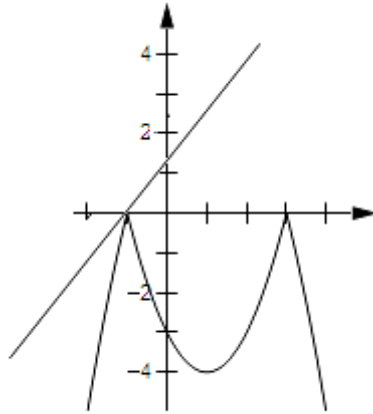


图 2

如图 3 所示，图象有两个交点.

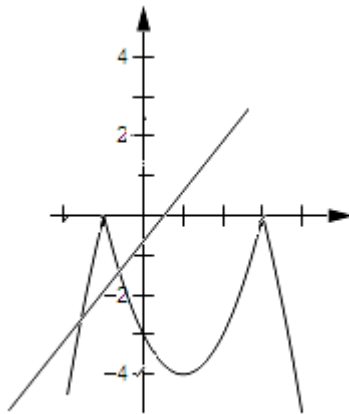


图 3

如图 4 所示，函数图象有 3 个交点.

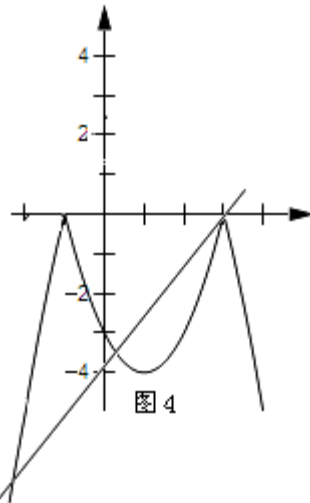
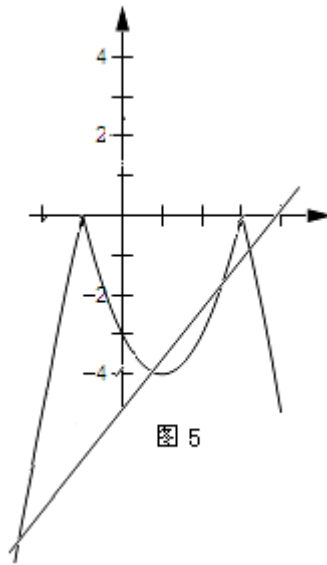


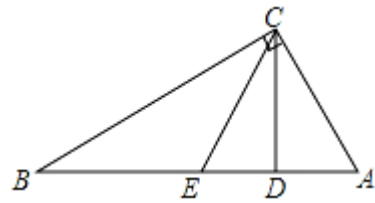
图 4

如图 5 所示，图象有 4 个交点.



综上所述，共有 5 中情况。
 故选：B.

9. (3 分) 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， CD 为 AB 边上的高，若点 A 关于 CD 所在直线的对称点 E 恰好为 AB 的中点，则 $\angle B$ 的度数是()



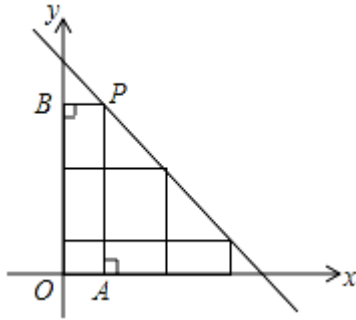
- A. 60°
- B. 45°
- C. 30°
- D. 75°

解析：∵在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， CD 为 AB 边上的高，点 A 关于 CD 所在直线的对称点 E 恰好为 AB 的中点，

∴ $\angle CED = \angle A$ ， $CE = BE = AE$ ，
 ∴ $\angle ECA = \angle A$ ， $\angle B = \angle BCE$ ，
 ∴ $\triangle ACE$ 是等边三角形，
 ∴ $\angle CED = 60^\circ$ ，
 ∴ $\angle B = \frac{1}{2} \angle CED = 30^\circ$.

故选：C.

10. (3 分) 如图，在一次函数 $y=-x+6$ 的图象上取一点 P ，作 $PA \perp x$ 轴于点 A ， $PB \perp y$ 轴于点 B ，且矩形 $PBOA$ 的面积为 5，则在 x 轴的上方满足上述条件的点 P 的个数共有()



- A. 1 个
- B. 2 个
- C. 3 个
- D. 4 个

解析：①当 $0 < x < 6$ 时，设点 $P(x, -x+6)$ ，

∴ 矩形 PBOA 的面积为 5，

∴ $x(-x+6)=5$ ，化简 $x^2-6x+5=0$ ，解得 $x_1=1$ ， $x_2=5$ ，

∴ $P_1(1, 5)$ ， $P_2(5, 1)$ ，

②当 $x < 0$ 时，设点 $P(x, -x+6)$ ，

∴ 矩形 PBOA 的面积为 5，

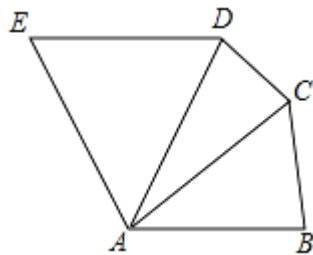
∴ $-x(-x+6)=5$ ，化简 $x^2-6x-5=0$ ，解得 $x_3=3-\sqrt{14}$ ， $x_4=3+\sqrt{14}$ (舍去)，

∴ $P_3(3-\sqrt{14}, 3+\sqrt{14})$ ，

∴ 在 x 轴的上方满足上述条件的点 P 的个数共有 3 个。

故选：C.

11. (3 分) 如图，在五边形 ABCDE 中， $AB=AC=AD=AE$ ，且 $AB \parallel ED$ ， $\angle EAB=120^\circ$ ，则 $\angle DCB=(\quad)$



- A. 150°
- B. 160°
- C. 130°
- D. 60°

解析：∵ $AB \parallel ED$ ，

∴ $\angle E=180^\circ - \angle EAB=180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ，

∵ $AD=AE$ ，

∴ $\triangle ADE$ 是等边三角形，

∴ $\angle EAD=60^\circ$ ，

∴ $\angle BAD=\angle EAB-\angle DAE=120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ ，

∵ $AB=AC=AD$ ，

$\therefore \angle B = \angle ACB, \angle ACD = \angle ADC,$

在四边形 ABCD 中, $\angle BCD = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle BAD) = \frac{1}{2}(360^\circ - 60^\circ) = 150^\circ.$

故选 A.

12. (3分) 已知 $m=x+1, n=-x+2$, 若规定 $y = \begin{cases} 1+m-n, & m \geq n \\ 1-m+n, & m < n \end{cases}$, 则 y 的最小值为()

A. 0

B. 1

C. -1

D. 2

解析: 因为 $m=x+1, n=-x+2$,

当 $x+1 \geq -x+2$ 时, 可得: $x \geq 0.5$, 则 $y=1+x+1+x-2=2x$, 则 y 的最小值为 1;

当 $x+1 < -x+2$ 时, 可得: $x < 0.5$, 则 $y=1-x-1-x+2=-2x+2$, 则 $y > 1$,

故选 B.

二、填空题(每小题 3 分, 共 15 分)

13. (3分) 分解因式: $a^3-a=$ _____.

解析: $a^3-a,$

$=a(a^2-1),$

$=a(a+1)(a-1).$

故答案为: $a(a+1)(a-1).$

14. (3分) 不等式组 $\begin{cases} x+1 > 0 \\ 1-\frac{1}{3}x \geq 0 \end{cases}$ 的解集为_____.

解析: $\begin{cases} x+1 > 0 \textcircled{1} \\ 1-\frac{1}{3}x \geq 0 \textcircled{2} \end{cases}$

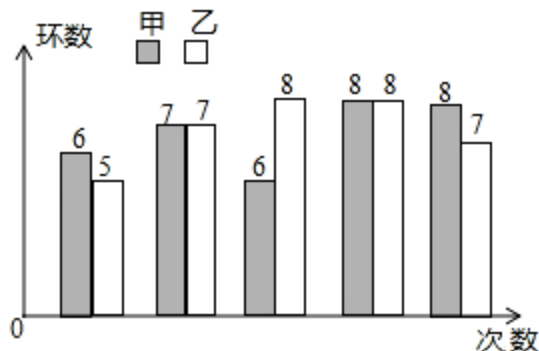
由①得 $x > -1$,

由②得 $x \leq 3$.

故原不等式组的解集为 $-1 < x \leq 3$.

故答案为: $-1 < x \leq 3$.

15. (3分) 在某次军事夏令营射击考核中, 甲、乙两名同学各进行了 5 次射击, 射击成绩如图所示, 则这两人中水平发挥较为稳定的是_____同学.



解析: $\because \bar{x}_{甲} = \frac{1}{5} (6+7+6+8+8) = 7, \bar{x}_{乙} = \frac{1}{5} (5+7+8+8+7) = 7;$

$$\therefore S^2_{甲} = \frac{1}{5} [(6-7)^2 + (7-7)^2 + (6-7)^2 + (8-7)^2 + (8-7)^2] = \frac{4}{5},$$

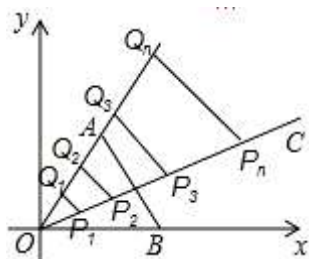
$$S^2_{乙} = \frac{1}{5} [(5-7)^2 + (7-7)^2 + (8-7)^2 + (8-7)^2 + (7-7)^2] = \frac{6}{5};$$

$$\therefore S^2_{甲} < S^2_{乙},$$

\therefore 甲在射击中成绩发挥比较稳定.

故答案为: 甲.

16. (3分) 如图, 在直角坐标系 xOy 中, 点 A 在第一象限, 点 B 在 x 轴的正半轴上, $\triangle AOB$ 为正三角形, 射线 $OC \perp AB$, 在 OC 上依次截取点 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, 使 $OP_1=1, P_1P_2=3, P_2P_3=5, \dots, P_{n-1}P_n=2n-1$ (n 为正整数), 分别过点 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ 向射线 OA 作垂线段, 垂足分别为点 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$, 则点 Q_n 的坐标为_____.



解析: 利用特殊直角三角形求出 OP_n 的值, 再利用 $\angle AOB=60^\circ$ 即可求出点 Q_n 的坐标.

答案: $\because \triangle AOB$ 为正三角形, 射线 $OC \perp AB$,

$$\therefore \angle AOC=30^\circ,$$

又 $\because P_{n-1}P_n=2n-1, P_nQ_n \perp OA$,

$$\therefore OQ_n = \frac{\sqrt{3}}{2} (OP_1 + P_1P_2 + P_2P_3 + \dots + P_{n-1}P_n) = \frac{\sqrt{3}}{2} (1+3+5+\dots+2n-1) = \frac{\sqrt{3}}{2} n^2,$$

$$\therefore Q_n \text{ 的坐标为 } \left(\frac{\sqrt{3}}{2} n^2 \cdot \cos 60^\circ, \frac{\sqrt{3}}{2} n^2 \cdot \sin 60^\circ \right),$$

$$\therefore Q_n \text{ 的坐标为 } \left(\frac{\sqrt{3}}{4} n^2, \frac{3}{4} n^2 \right).$$

故答案为: $(\frac{\sqrt{3}}{4}n^2, \frac{3}{4}n^2)$.

17. (3分) 下列四个命题中, 正确的是_____ (填写正确命题的序号)

①三角形的外心是三角形三边垂直平分线的交点;

②函数 $y=(1-a)x^2-4x+6$ 与 x 轴只有一个交点, 则 $a=\frac{1}{3}$;

③半径分别为 1 和 2 的两圆相切, 则两圆的圆心距为 3;

④若对于任意 $x>1$ 的实数, 都有 $ax>1$ 成立, 则 a 的取值范围是 $a\geq 1$.

解析: 三角形的外心是三角形三边垂直平分线的交点, 所以①正确;

函数 $y=(1-a)x^2-4x+6$ 与 x 轴只有一个交点, 则 $a=\frac{1}{3}$ 或 1, 所以②错误;

半径分别为 1 和 2 的两圆相切, 则两圆的圆心距为 1 或 3;

若对于任意 $x>1$ 的实数, 都有 $ax>1$ 成立, 则 a 的取值范围是 $a\geq 1$, 所以④正确.

故答案为: ①④.

三、解答题(共 69 分, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

18. (6分) 计算: $2^{-1}+\tan 45^\circ -|2-\sqrt[3]{27}|+\sqrt{18}\div\sqrt{8}$.

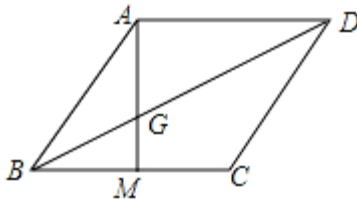
解析: 分别根据特殊角的三角函数值、绝对值的性质及负整数指数幂的计算法则分别计算出各数, 再根据实数混合运算的法则进行计算即可;

答案: 原式 $=\frac{1}{2}+1-(3-2)+3\sqrt{2}\div 2\sqrt{2}$

$$=\frac{3}{2}-1+\frac{3}{2}$$

$=2$.

19. (7分) 如图, 四边形 ABCD 为菱形, M 为 BC 上一点, 连接 AM 交对角线 BD 于点 G, 并且 $\angle ABM=2\angle BAM$.



(1) 求证: $AG=BG$;

(2) 若点 M 为 BC 的中点, 同时 $S_{\triangle BMG}=1$, 求三角形 ADG 的面积.

解析: (1) 根据菱形的对角线平分一组对角, 得出 $\angle ABD=\angle CBD$, 再根据 $\angle ABM=2\angle BAM$, 得出 $\angle ABD=\angle BAM$, 然后根据等角对等边证明即可.

(2) 根据相似三角形面积的比等于相似比的平方即可求得.

答案: (1) 证明: \because 四边形 ABCD 是菱形,

$\therefore \angle ABD=\angle CBD$,

$\because \angle ABM=2\angle BAM$,

$\therefore \angle ABD=\angle BAM$,

∴AG=BG.

(2)解: ∵AD//BC,

∴△ADG∽△MBG,

$$\therefore \frac{AG}{GM} = \frac{AD}{BM},$$

∵点M为BC的中点,

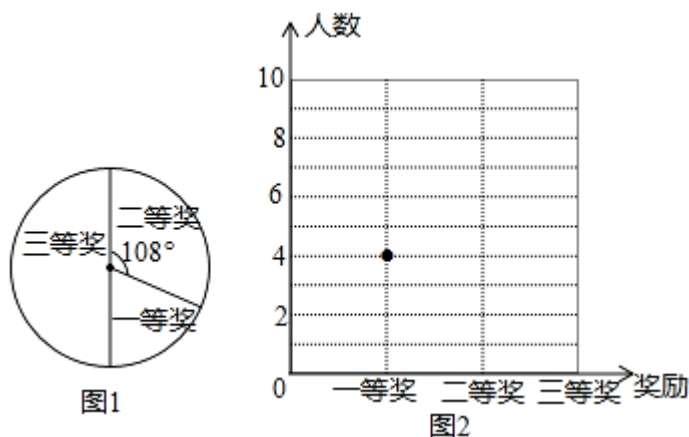
$$\therefore \frac{AD}{BM} = 2,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADG}}{S_{\triangle BMG}} = \left(\frac{AD}{BM}\right)^2 = 4$$

∵ $S_{\triangle BMG} = 1$,

∴ $S_{\triangle ADG} = 4$.

20. (11分) 希望学校八年级共有4个班, 在世界地球日来临之际, 每班各选拔10名学生参加环境知识竞赛, 评出了一、二、三等奖各若干名, 校学生会将获奖情况绘制成如图所示的两幅不完整的统计图, 请依据图中信息解答下列问题:



(1) 本次竞赛获奖总人数为_____人; 获奖率为_____;

(2) 补全折线统计图;

(3) 已知获得一等奖的4人为每班各一人, 学校采取随机抽签的方式在4人中选派2人参加上级团委组织的“爱护环境、保护地球”夏令营, 请用列举法求出抽到的两人恰好来自二、三班的概率.

解析: (1) 先利用扇形统计图计算出一等奖所占的百分比, 然后用一等奖的人数除以它所占百分比即可得到获奖总人数, 再计算获奖率;

(2) 分别计算出二、三等奖的人数, 然后补全折线统计图;

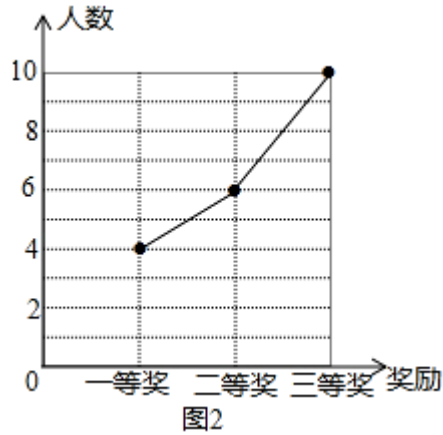
(3) 利用树状图法列举出所有的可能, 进而利用概率公式求出即可.

答案: (1) 本次竞赛获奖总人数 = $4 \div \frac{108-108}{360} = 20$ (人), 获奖率 = $\frac{20}{40} \times 100\% = 50\%$;

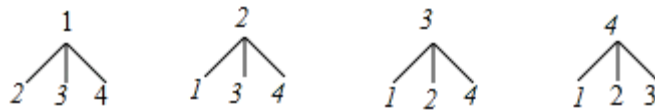
故答案为 20; 50%;

(2) 三等奖的人数 = $20 \times 50\% = 10$ (人), 二等奖的人数 = $20 - 4 - 10 = 6$ (人),

折线统计图为:



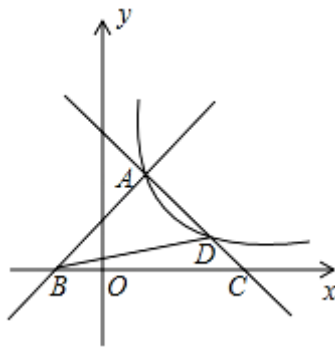
(3) 画树状图为:



共有 12 种等可能的结果数，其中抽到的两人恰好来自二、三班的有 2 种情况，

所以抽到的两人恰好来自二、三班的概率 = $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

21. (10 分) 如图，直线 $y=x+1$ 和 $y=-x+3$ 相交于点 A，且分别与 x 轴交于 B, C 两点，过点 A 的双曲线 $y=\frac{k}{x}$ ($x>0$) 与直线 $y=-x+3$ 的另一交点为点 D.



(1) 求双曲线的解析式;

(2) 求 $\triangle BCD$ 的面积.

解析: (1) 先通过解方程组 $\begin{cases} y=x+1 \\ y=-x+3 \end{cases}$ 得 A(1, 2), 然后把 A(1, 2) 代入 $y=\frac{k}{x}$ 中求出 k 的值

即可得到反比例函数解析式;

(2) 根据反比例函数与一次函数的交点问题, 通过解方程组 $\begin{cases} y=\frac{2}{x} \\ y=-x+3 \end{cases}$ 得 D(2, 1), 再利用

x 轴上点的坐标特征确定 B 点和 C 点坐标, 然后根据三角形面积公式求解即可.

答案: (1) 解方程组 $\begin{cases} y=x+1 \\ y=-x+3 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$,

则 A(1, 2),

把 A(1, 2) 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得 $k = 1 \times 2 = 2$,

所以反比例函数解析式为 $y = \frac{2}{x}$;

$$(2) \text{ 解方程组 } \begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = -x + 3 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases},$$

则 D(2, 1),

当 $y=0$ 时, $x+1=0$, 解得 $x=-1$, 则 B(-1, 0);

当 $y=0$ 时, $-x+3=0$, 解得 $x=3$, 则 C(3, 0),

所以 $\triangle BCD$ 的面积 $= \frac{1}{2} \times (3+1) \times 1 = 2$.

22. (10分) 大华服装厂生产一件秋冬季外套需面料 1.2 米, 里料 0.8 米, 已知面料的单价比里料的单价的 2 倍还多 10 元, 一件外套的布料成本为 76 元.

(1) 求面料和里料的单价;

(2) 该款外套 9 月份投放市场的批发价为 150 元/件, 出现购销两旺态势, 10 月份进入批发淡季, 厂方决定采取打折促销. 已知生产一件外套需人工等固定费用 14 元, 为确保每件外套的利润不低于 30 元.

① 设 10 月份厂方的打折数为 m , 求 m 的最小值; (利润 = 销售价 - 布料成本 - 固定费用)

② 进入 11 月份以后, 销售情况出现好转, 厂方决定对 VIP 客户在 10 月份最低折扣价的基础上实施更大的优惠, 对普通客户在 10 月份最低折扣价的基础上实施价格上浮. 已知对 VIP 客户的降价率和对普通客户的提价率相等, 结果一个 VIP 客户用 9120 元批发外套的件数和一个普通客户用 10080 元批发外套的件数相同, 求 VIP 客户享受的降价率.

解析: (1) 设里料的单价为 x 元/米, 面料的单价为 $(2x+10)$ 元/米, 根据成本为 76 元列方程求解即可;

(2) ① 设打折数为 m , 根据利润大于等于 30 元列不等式求解即可;

② 设 vip 客户享受的降价率为 x , 然后根据 VIP 客户与普通用户批发件数相同列方程求解即可.

答案: (1) 设里料的单价为 x 元/米, 面料的单价为 $(2x+10)$ 元/米.

根据题意得: $0.8x + 1.2(2x+10) = 76$.

解得: $x = 20$.

$2x+10 = 2 \times 20 + 10 = 50$.

答: 面料的单价为 50 元/米, 里料的单价为 20 元/米.

(2) ① 设打折数为 m .

根据题意得: $150 \times \frac{m}{10} - 76 - 14 \geq 30$.

解得: $m \geq 8$.

$\therefore m$ 的最小值为 8.

答: m 的最小值为 8.

② $150 \times 0.8 = 120$ 元.

设 vip 客户享受的降价率为 x .

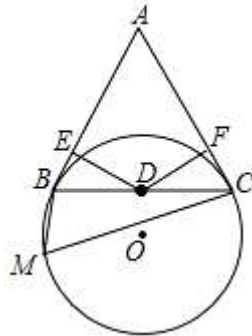
根据题意得：
$$\frac{9120}{120 \times (1-x)} = \frac{10080}{120(1+x)},$$

解得： $x=0.05$

经检验 $x=0.05$ 是原方程的解.

答：vip 客户享受的降价率为 5%.

23. (11 分) 如图，已知 BC 是 $\odot O$ 的弦，A 是 $\odot O$ 外一点， $\triangle ABC$ 为正三角形，D 为 BC 的中点，M 为 $\odot O$ 上一点，并且 $\angle BMC=60^\circ$.



(1) 求证：AB 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 E, F 分别是边 AB, AC 上的两个动点，且 $\angle EDF=120^\circ$ ， $\odot O$ 的半径为 2，试问 BE+CF 的值是否为定值？若是，求出这个定值；若不是，请说明理由.

解析：(1) 连结 OB、OD，如图 1，由于 D 为 BC 的中点，根据垂径定理的推理得 $OD \perp BC$ ， $\angle BOD = \angle COD$ ，再根据圆周角定理得 $\angle BOD = \angle M = 60^\circ$ ，则 $\angle OBD = 30^\circ$ ，所以 $\angle ABO = 90^\circ$ ，于是根据切线的判定定理得 AB 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 作 $DM \perp AB$ 于 M， $DN \perp AC$ 于 N，连结 AD，如图 2，根据等边三角形三角形的性质得 AD 平分 $\angle BAC$ ， $\angle BAC = 60^\circ$ ，则利用角平分线性质的性质得 $DM = DN$ ，根据四边形内角和得 $\angle MDN = 120^\circ$ ，由于 $\angle EDF = 120^\circ$ ，所以 $\angle MDE = \angle NDF$ ，接着证明 $\triangle DME \cong \triangle DNF$ 得到 $ME = NF$ ，于是 $BE + CF = BM + CN$ ，再计算出 $BM = \frac{1}{2} BD$ ， $CN = \frac{1}{2} OC$ ，则 $BE + CF = \frac{1}{2} BC$ ，于是可判断 BE+CF 的值是定值，为等边 $\triangle ABC$ 边长的一半.

答案：(1) 证明：连结 OB、OD，如图 1，

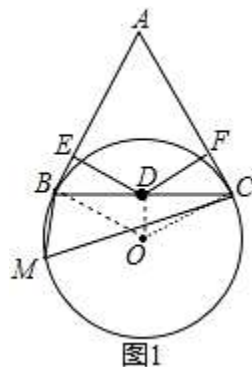


图1

\because D 为 BC 的中点，

$\therefore OD \perp BC$ ， $\angle BOD = \angle COD$ ，

$\therefore \angle ODB = 90^\circ$ ，

$\because \angle BMC = \frac{1}{2} \angle BOC,$
 $\therefore \angle BOD = \angle M = 60^\circ,$
 $\therefore \angle OBD = 30^\circ,$
 $\because \triangle ABC$ 为正三角形,
 $\therefore \angle ABC = 60^\circ,$
 $\therefore \angle ABO = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ,$
 $\therefore AB \perp OB,$
 $\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 解: $BE+CF$ 的值是为定值.

作 $DM \perp AB$ 于 M , $DN \perp AC$ 于 N , 连结 AD , 如图 2,

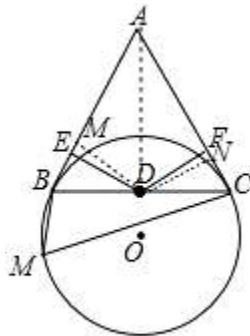


图2

$\because \triangle ABC$ 为正三角形, D 为 BC 的中点,
 $\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$, $\angle BAC = 60^\circ,$
 $\therefore DM = DN$, $\angle MDN = 120^\circ,$
 $\because \angle EDF = 120^\circ,$
 $\therefore \angle MDE = \angle NDF,$
 在 $\triangle DME$ 和 $\triangle DNF$ 中,

$$\begin{cases} \angle DME = \angle DNF \\ DM = DN \\ \angle MDE = \angle NDF \end{cases},$$

$\therefore \triangle DME \cong \triangle DNF,$

$\therefore ME = NF,$

$\therefore BE + CF = BM - EM + CN + NF = BM + CN,$

在 $\text{Rt}\triangle DMB$ 中, $\because \angle DBM = 60^\circ,$

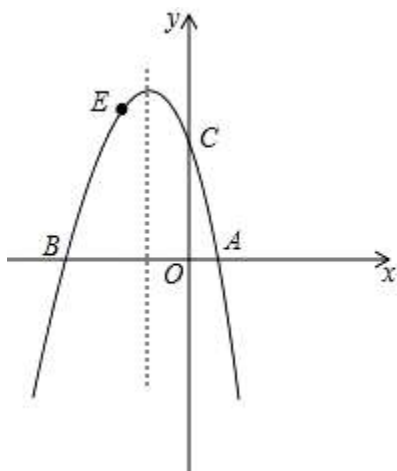
$$\therefore BM = \frac{1}{2} BD,$$

同理可得 $CN = \frac{1}{2} OC,$

$$\therefore BE + CF = \frac{1}{2} OB + \frac{1}{2} OC = \frac{1}{2} BC,$$

$\therefore BE+CF$ 的值是定值, 为等边 $\triangle ABC$ 边长的一半.

24. (14分) 如图, 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 $B(-3, 0)$, 与 y 轴交于点 C , 且 $OC=OB$.



- (1) 求此抛物线的解析式;
- (2) 若点 E 为第二象限抛物线上一动点, 连接 BE , CE , 求四边形 $BOCE$ 面积的最大值, 并求出此时点 E 的坐标;
- (3) 点 P 在抛物线的对称轴上, 若线段 PA 绕点 P 逆时针旋转 90° 后, 点 A 的对应点 A' 恰好也落在此抛物线上, 求点 P 的坐标.

解析: (1) 已知抛物线过 A 、 B 两点, 可将两点的坐标代入抛物线的解析式中, 用待定系数法即可求出二次函数的解析式;

(2) 由于四边形 $BOCE$ 不是规则的四边形, 因此可将四边形 $BOCE$ 分割成规则的图形进行计算, 过 E 作 $EF \perp x$ 轴于 F , 四边形 $BOCE$ 的面积 = 三角形 BFE 的面积 + 直角梯形 $FOCE$ 的面积. 直角梯形 $FOCE$ 中, FO 为 E 的横坐标的绝对值, EF 为 E 的纵坐标, 已知 C 的纵坐标, 就知道了 OC 的长. 在三角形 BFE 中, $BF = BO - OF$, 因此可用 E 的横坐标表示出 BF 的长. 如果根据抛物线设出 E 的坐标, 然后代入上面的线段中, 即可得出关于四边形 $BOCE$ 的面积与 E 的横坐标的函数关系式, 根据函数的性质即可求得四边形 $BOCE$ 的最大值及对应的 E 的横坐标的值. 即可求出此时 E 的坐标;

(3) 由 P 在抛物线的对称轴上, 设出 P 坐标为 $(-2, m)$, 如图所示, 过 A' 作 $A'N \perp$ 对称轴于 N , 由旋转的性质得到一对边相等, 再由同角的余角相等得到一对角相等, 根据一对直角相等, 利用 AAS 得到 $\triangle A'NP \cong \triangle PMA$, 由全等三角形的对应边相等得到 $A'N = PM = |m|$, $PN = AM = 2$, 表示出 A' 坐标, 将 A' 坐标代入抛物线解析式中求出相应 m 的值, 即可确定出 P 的坐标.

答案: (1) \because 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 $B(-3, 0)$,

$$\therefore OB=3,$$

$$\because OC=OB,$$

$$\therefore OC=3,$$

$$\therefore c=3,$$

$$\therefore \begin{cases} a+b+3=0 \\ 9a-3b+3=0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases},$$

\therefore 所求抛物线解析式为: $y=-x^2-2x+3$;

(2) 如图 2, 过点 E 作 $EF \perp x$ 轴于点 F, 设 $E(a, -a^2-2a+3)$ ($-3 < a < 0$),

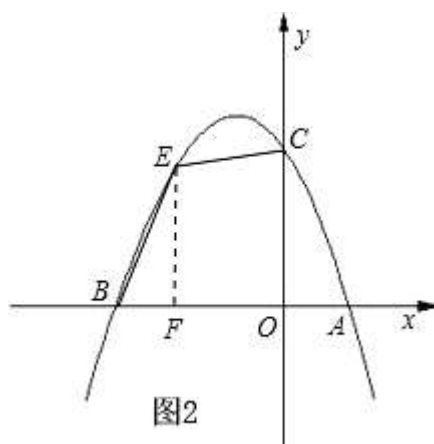


图2

$$\therefore EF = -a^2 - 2a + 3, BF = a + 3, OF = -a,$$

$$\therefore S_{\text{四边形BOCE}} = \frac{1}{2} BF \cdot EF + \frac{1}{2} (OC + EF) \cdot OF,$$

$$= \frac{1}{2} (a+3) \cdot (-a^2-2a+3) + \frac{1}{2} (-a^2-2a+6) \cdot (-a),$$

$$= -\frac{3}{2} a^2 - \frac{9}{2} a + \frac{9}{2},$$

$$= -\frac{3}{2} \left(a + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{63}{8},$$

$$\therefore \text{当 } a = -\frac{3}{2} \text{ 时, } S_{\text{四边形BOCE}} \text{ 最大, 且最大值为 } \frac{63}{8}.$$

此时, 点 E 坐标为 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$;

(3) \because 抛物线 $y = -x^2 - 2x + 3$ 的对称轴为 $x = -1$, 点 P 在抛物线的对称轴上,

\therefore 设 $P(-1, m)$,

\because 线段 PA 绕点 P 逆时针旋转 90° 后, 点 A 的对应点 A' 恰好也落在此抛物线上,

① 当 $m \geq 0$ 时,

$\therefore PA = PA_1, \angle APA_1 = 90^\circ$,

如图 3, 过 A_1 作 $A_1N \perp$ 对称轴于 N, 设对称轴于 x 轴交于点 M,

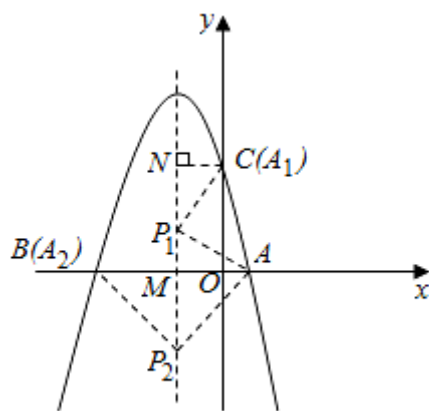


图3

$$\therefore \angle NPA_1 + \angle MPA = \angle NA_1P + \angle NPA_1 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NA_1P = \angle NPA,$$

在 $\triangle A_1NP$ 与 $\triangle PMA$ 中,

$$\begin{cases} \angle A'NP = \angle PMA = 90^\circ \\ \angle NA'P = \angle MPA \\ PA' = AP \end{cases},$$

$\therefore \triangle A_1NP \cong \triangle PMA$,

$\therefore A_1N = PM = m, PN = AM = 2$,

$\therefore A_1(m-1, m+2)$,

代入 $y = -x^2 - 2x + 3$ 得: $m+2 = -(m-1)^2 - 2(m-1) + 3$,

解得: $m=1, m=-2$ (舍去),

②当 $m < 0$ 时, 要使 $P_2A = P_2A_2$, 由图可知 A_2 点与 B 点重合,

$\therefore \angle AP_2A_2 = 90^\circ, \therefore MP_2 = MA = 2$,

$\therefore P_2(-1, -2)$,

\therefore 满足条件的点 P 的坐标为 $P(-1, 1)$ 或 $(-1, -2)$.