2014年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）数学文

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. i是虚数单位，复数$\frac{7+i}{3+4i}$=(　　)

A. 1-i
B. -1+i
C. $\frac{17}{25}+\frac{31}{25}i$
D. $-\frac{17}{7}+\frac{25}{7}i$

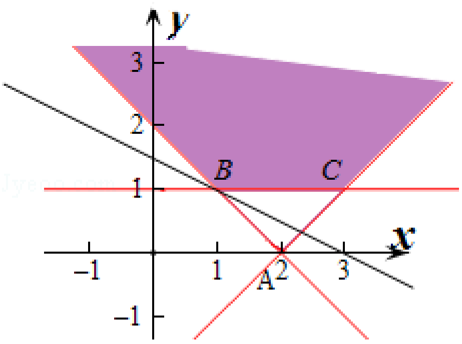
解析：复数$\frac{7+i}{3+4i}=\frac{(7+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{25-25i}{25}=1-i$，

答案：A.

2. 设变量x，y满足约束条件$\begin{cases}x+y-2\geqslant 0\\ x-y-2\leqslant 0\\ y\geqslant 1\end{cases}$，则目标函数z=x+2y的最小值为(　　)

A. 2
B. 3
C. 4
D. 5

解析：作出不等式对应的平面区域，



由z=x+2y，得$y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$，

平移直线$y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$，由图象可知当直线$y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$经过点B(1，1)时，直线$y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$的截距最小，此时z最小.此时z的最小值为z=1+2×1=3，

答案：B.

3. 已知命题p：∀x>0，总有$(x+1)e^x>1$，则¬p为(　　)

A. ∃$x_0\leqslant 0$，使得$(x_0+1)e^{x_0}\leqslant 1$

B. $\exists x_0>0$，使得$(x_0+1)e^{x_0}\leqslant 1$

C. $\forall x>0$，总有$(x+1)e^x\leqslant 1$

D. $\forall x\leqslant 0$，总有$(x+1)e^x\leqslant 1$

解析：根据全称命题的否定为特称命题可知，$\neg p$为$\exists x_0>0$，使得$(x_0+1)e^{x_0}\leqslant 1$，

答案：B.

4. 设$a=\log_2\pi$，$b=\log_{\frac{1}{2}}\pi$，$c=\pi^{-2}$，则(　　)

A. $a>b>c$

B. $b>a>c$

C. $a>c>b$

D. $c>b>a$

解析：$\log_2\pi>1$，$\log_{\frac{1}{2}}\pi<0$，$0<\pi^{-2}<1$，即$a>1$，$b<0$，$0<c<1$，$\therefore a>c>b$，

答案：C

5. 设$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为-1的等差数列，S_n为其前n项和，若S_1，S_2，S_4成等比数列，则$a_1=$(　　)

A. 2

B. -2

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

解析：$\because\{a_n\}$是首项为a_1，公差为-1的等差数列，S_n为其前n项和，

$\therefore S_1=a_1$，$S_2=2a_1-1$，$S_4=4a_1-6$，

由S_1，S_2，S_4成等比数列，得：$S_2^2=S_1\cdot S_4$，

即$(2a_1-1)^2=a_1(4a_1-6)$，解得：$a_1=-\frac{1}{2}$.

答案：D.

6. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一条渐近线平行于直线l：$y=2x+10$，双曲线的一个焦点在直线l上，则双曲线的方程为(　　)

A. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$

B. $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$

C. $\frac{3x^2}{25}-\frac{3y^2}{100}=1$

D. $\frac{3x^2}{100}-\frac{3y^2}{25}=1$

解析：令 y=0，可得 x=-5，即焦点坐标为(-5，0)，∴c=5，

∵双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞0，b＞0)的一条渐近线平行于直线 l：y=2x+10，∴$\frac{b}{a}=2$，

∵$c^2=a^2+b^2$，∴$a^2=5$，$b^2=20$，∴双曲线的方程为$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$.

答案：A.

7.如图，△ABC 是圆的内接三角形，∠BAC 的平分线交圆于点 D，交 BC 于 E，过点 B 的圆的切线与 AD 的延长线交于点 F，在上述条件下，给出下列四个结论：

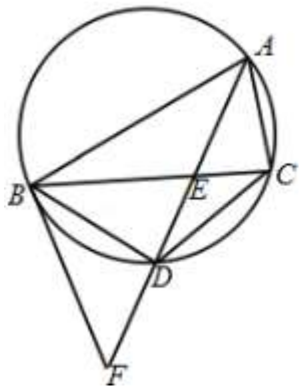
①BD 平分∠CBF;

②FB^2=FD•FA;

③AE•CE=BE•DE;

④AF•BD=AB•BF.

所有正确结论的序号是(　　)



A.①②

B.③④

C.①②③

D.①②④

解析：∵圆周角∠DBC 对应劣弧 CD，圆周角∠DAC 对应劣弧 CD，∴∠DBC=∠DAC.

∵弦切角∠FBD 对应劣弧 BD，圆周角∠BAD 对应劣弧 BD，∴∠FBD=∠BAF.

∵BD 是∠BAC 的平分线，∴∠BAF=∠DAC.

∴∠DBC=∠FBD.即 BD 平分∠CBF.即结论①正确.

又由∠FBD=∠FAB，∠BFD=∠AFB，得△FBD∽△FAB.

由$\frac{FB}{FA}=\frac{FD}{FB}$，$FB^2$=FD•FA.即结论②成立.

由$\frac{BF}{AF}=\frac{BD}{AB}$，得 AF·BD=AB·BF.即结论④成立.
正确结论有①②④.
答案：D

8.已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0)$，$x\in R$，在曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 的交点中，若相邻交点距离的最小值为$\frac{\pi}{3}$，则 f(x)的最小正周期为(　　)

A. $\frac{\pi}{2}$
B. $\frac{2\pi}{3}$
C. π
D. 2π

解析：∵已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$，$x\in R$，

在曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 的交点中，若相邻交点距离的最小值为$\frac{\pi}{3}$，正好等于 f(x)的周期的$\frac{1}{3}$倍，设函数 f(x)的最小正周期为 T，则$\frac{1}{3}\cdot T=\frac{\pi}{3}$，∴T=π，
答案：C.

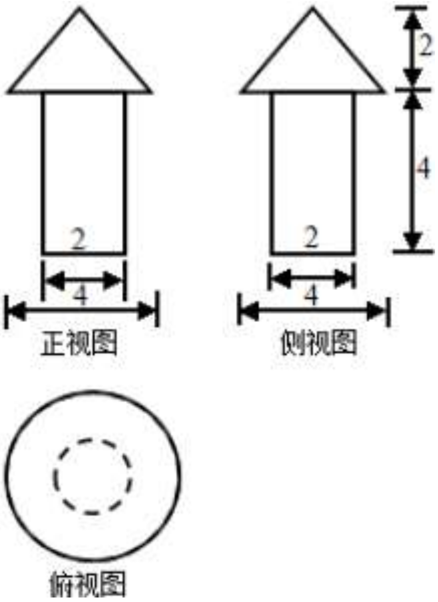
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.某大学为了解在校本科生对参加某项社会实践活动的意向，拟采用分层抽样的方向，从该校四个年级的本科生中抽取一个容量为 300 的样本进行调查，已知该校一年级、二年级、三年级、四年级的本科生人数之比为 4：5：5：6，则应从一年级本科生中抽取__60__名学生.
解析：根据分层抽样的定义和方法，一年级本科生人数所占的比例为$\frac{4}{4+5+5+6}=\frac{1}{5}$，

故应从一年级本科生中抽取名学生数为 $300\times\frac{1}{5}=60$，

答案：60.

10.一个几何体的三视图如图所示(单位：m)，则该几何体的体积为__$\frac{20}{3}\pi$__m^3.



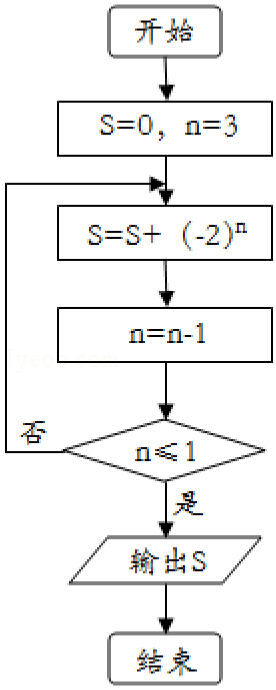
解析：由三视图知：几何体是圆锥与圆柱的组合体，

其中圆柱的高为 4，底面直径为 2，圆锥的高为 2，底面直径为 4，

∴几何体的体积 $V=\pi\times1^2\times4+\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times2=4\pi+\frac{8}{3}\pi=\frac{20}{3}\pi$.

答案：$\frac{20}{3}\pi$.

11. 阅读如图的框图，运行相应的程序，输出 S 的值为______.



解析：由框图知，第一次循环得到：S=-8，n=2；

第二次循环得到：S=-4，n=1；退出循环，输出-4.

故答案为：-4.

12.函数 $f(x)=\lg x^2$ 的单调递减区间是________.

解析：方法一：$y=\lg x^2=2\lg|x|$，

∴当 $x>0$ 时，$f(x)=2\lg x$ 在 $(0，+\infty)$ 上是增函数；

当 $x<0$ 时，$f(x)=2\lg(-x)$ 在 $(-\infty，0)$ 上是减函数.

∴函数 $f(x)=\lg x^2$ 的单调递减区间是 $(-\infty，0)$.

方法二：原函数是由 $\begin{cases} t=x^2 \\ y=\lg t \end{cases}$ 复合而成，

∵$t=x^2$ 在 $(-\infty，0)$ 上是减函数，在 $(0，+\infty)$ 为增函数；

又 $y=\lg t$ 在其定义域上为增函数，

∴$f(x)=\lg x^2$ 在 $(-\infty，0)$ 上是减函数，在 $(0，+\infty)$ 为增函数，

∴函数 $f(x)=\lg x^2$ 的单调递减区间是 $(-\infty，0)$.

答案：$(-\infty，0)$.

13.已知菱形 ABCD 的边长为 2，$\angle BAD=120°$，点 E，F 分别在边 BC，DC 上，$BC=3BE$，$DC=\lambda DF$，若 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1$，则 λ 的值为_______.

解析：∵$BC=3BE$，$DC=\lambda DF$，∴$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{DF}=\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{DC}$，

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AB}$，

∵菱形 ABCD 的边长为 2，$\angle BAD=120°$，

∴$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AD}|=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\times2\times\cos120°=-2$，

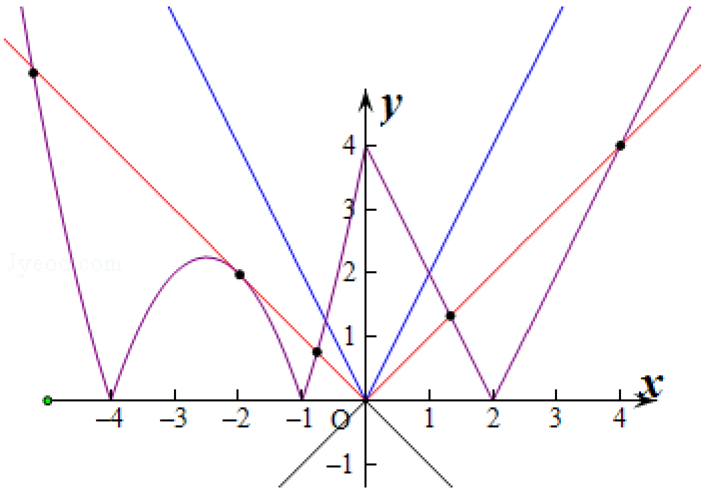
∵$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=1$，∴$(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}^2+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AB}^2+(1+\frac{1}{3\lambda})\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1$，

即 $\frac{1}{3}\times4+\frac{1}{\lambda}\times4-2(1+\frac{1}{3\lambda})=1$，整理得 $\frac{10}{3\lambda}=\frac{5}{3}$，解得 $\lambda=2$，

答案：2.

14.已知函数 $f(x)=\begin{cases} |x^2+5x+4|，& x\leqslant 0 \\ 2|x-2|，& x>0 \end{cases}$，若函数 $y=f(x)-a|x|$ 恰有 4 个零点，则实数 a 的取值范围为________.

解析：由 $y=f(x)-a|x|=0$ 得 $f(x)=a|x|$，作出函数 $y=f(x)$，$y=a|x|$ 的图象，



当 a≤0，不满足条件，∴a＞0，

当 a=2 时，此时 y=a|x|与 f(x)有三个 交点，

当 a=1 时，此时 y=a|x|与 f(x)有五个 交点，∴要使函数 y=f(x)-a|x|恰有 4 个零点，

则 1＜a＜2，

答案：(1，2)

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15.(13 分)某校夏令营有 3 名男同学，A、B、C 和 3 名女同学 X，Y，Z，其年级情况如表：

	一年级	二年级	三年级
男同学	A	B	C
女同学	X	Y	Z

现从这 6 名同学中随机选出 2 人参加知识竞赛（每人被选到的可能性相同）

(Ⅰ)用表中字母列举出所有可能的结果；

(Ⅱ)设 M 为事件“选出的 2 人来自不同年级且恰有 1 名男同学和 1 名女同学”，求事件 M 发生的概率.

解析：(Ⅰ)用表中字母一一列举出所有可能的结果，共 15 个.

(Ⅱ)用列举法求出事件 M 包含的结果有 6 个，而所有的结果共 15 个，由此求得事件 M 发生的概率.

答案：(Ⅰ)用表中字母列举出所有可能的结果有：(A，B)、(A，C)、(A，X)、(A，Y)、(A，Z)、(B，C)、(B，X)、(B，Y)、(B，Z)、(C，X)、(C，Y)、(C，Z)、(X，Y)、(X，Z)、(Y，Z)，共计 15 个结果.

(Ⅱ)设 M 为事件“选出的 2 人来自不同年级且恰有 1 名男同学和 1 名女同学”，

则事件 M 包含的结果有：(A，Y)、(A，Z)、(B，X)、(B，Z)、(C，X)、(C，Y)，共计 6 个结果，

故事件 M 发生的概率为 $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

16.(13 分)在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $a-c=\frac{\sqrt{6}}{6}b$，$\sin B=\sqrt{6}\sin C$，

(Ⅰ)求 cosA 的值；

(Ⅱ)求 $\cos(2A-\frac{\pi}{6})$的值.

解析：(Ⅰ)已知第二个等式利用正弦定理化简，代入第一个等式表示出 a，利用余弦定理表示出 cosA，将表示出的 a，b 代入计算，即可求出 cosA 的值；

(Ⅱ)由cosA的值，利用同角三角函数间的基本关系求出sinA的值，进而利用二倍角的正弦、余弦函数公式求出 sin2A 与 cos2A 的值，原式利用两角和与差的余弦函数公式及特殊角的三角函数值化简，将各自的值代入计算即可求出值.

答案：(Ⅰ)将 $\sin B=\sqrt{6}\sin C$，利用正弦定理化简得：$b=\sqrt{6}c$，

代入 $a-c=\frac{\sqrt{6}}{6}b$，得：a-c=c，即 a=2c，$\therefore\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6c^2+c^2-4c^2}{2\sqrt{6}c^2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$；

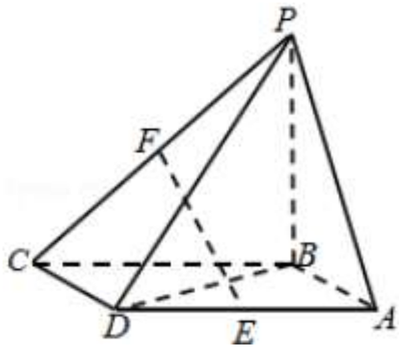
(Ⅱ)$\because\cos A=\frac{\sqrt{6}}{4}$，A 为三角形内角，$\therefore\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{\sqrt{10}}{4}$，

$\therefore\cos 2A=2\cos^2A-1=-\frac{1}{4}$，$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

则 $\cos(2A-\frac{\pi}{6})=\cos 2A\cos\frac{\pi}{6}+\sin 2A\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{15}}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{8}$.

点评：　此题考查了正弦、余弦定理，同角三角函数间的基本关系，二倍角的正弦、余弦函数公式，以及两角和与差的余弦函数公式，熟练掌握定理及公式是解本题的关键.

17.(13 分)如图，四棱锥 P-ABCD 的底面 ABCD 是平行四边形，$BA=BD=\sqrt{2}$，AD=2，$PA=PD=\sqrt{5}$，E，F 分别是棱 AD，PC 的中点.



(Ⅰ)证明 EF∥平面 PAB；

(Ⅱ)若二面角 P-AD-B 为 60°，

(i)证明平面 PBC⊥平面 ABCD；

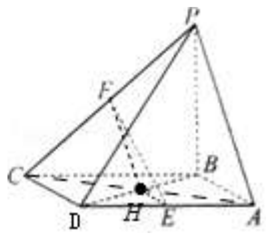
(ii)求直线 EF 与平面 PBC 所成角的正弦值.

解析：(Ⅰ)要证明 EF∥平面 PAB，可以先证明平面 EFH∥平面 PAB，而要证明面面平行则可用面面平行的判定定理来证；

(Ⅱ)(i)要证明平面 PBC⊥平面 ABCD，可用面面垂直的判定定理，即只需证 PB⊥平面 ABCD 即可；

(ii)由(i)知，BD，BA，BP 两两垂直，建立空间直角坐标系 B-DAP，得到直线 EF 的方向向量与平面 PBC 法向量，其夹角的余弦值的绝对值即为所成角的正弦值.

答案：(Ⅰ)连结 AC，AC∩BD=H，



∵底面 ABCD 是平行四边形，∴H 为 BD 中点，

∵E 是棱 AD 的中点. ∴在△ABD 中，EH∥AB，

又∵AB⊂平面 PAB，EH⊄平面 PAD，∴EH∥平面 PAB.

同理可证，FH∥平面 PAB.

又∵EH∩FH=H，∴平面 EFH∥平面 PAB，

∵EF⊂平面 EFH，∴EF∥平面 PAB；

(Ⅱ)(i)如图，连结 PE，BE.

∵BA=BD=$\sqrt{2}$，AD=2，PA=PD=$\sqrt{5}$，∴BE=1，PE=2.

又∵E 为 AD 的中点，∴BE⊥AD，PE⊥AD，

∴∠PEB 即为二面角 P-AD-B 的平面角，即∠PEB=60°，∴PB=$\sqrt{3}$.

∵△PBD 中，$BD^2+PB^2=PD^2$，∴PB⊥BD，同理 PB⊥BA，

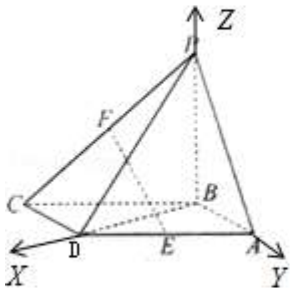
∴PB⊥平面 ABD，

∵PB⊂平面 PBC，∴平面 PAB⊥平面 ABCD；

(ii)由(i)知，PB⊥BD，PB⊥BA，

∵BA=BD=$\sqrt{2}$，AD=2，∴BD⊥BA，∴BD，BA，BP 两两垂直，

以 B 为坐标原点，分别以 BD，BA，BP 为 X，Y，Z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 B-DAP，



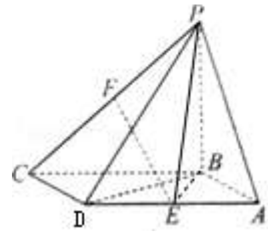
则有 A(0，$\sqrt{2}$，0)，B(0，0，0)，C($\sqrt{2}$，-$\sqrt{2}$，0)，D($\sqrt{2}$，0，0)，P(0，0，$\sqrt{3}$)，

∴ $\overrightarrow{BC}$=($\sqrt{2}$，-$\sqrt{2}$，0)，$\overrightarrow{BP}$=(0，0，$\sqrt{3}$)，

设平面 PBC 的法向量为$\overrightarrow{n}$=（x，y，z），

∵$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0\end{cases}$，∴$\begin{cases}\sqrt{2}x-\sqrt{2}y=0\\\sqrt{3}z=0\end{cases}$，令 x=1，则 y=1，z=0，故$\overrightarrow{n}$=(1，1，0)，

∵E，F 分别是棱 AD，PC 的中点，



$\therefore E(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$，$F(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$，$\therefore \overrightarrow{EF}=(0, -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$，

$\therefore \cos\langle \vec{n}, \overrightarrow{EF} \rangle=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}}{|\vec{n}||\overrightarrow{EF}|}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{11}}{2}}=-\frac{2\sqrt{11}}{11}$，

即直线 EF 与平面 PBC 所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt{11}}{11}$.

18.(13 分)设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1、F_2，右顶点为 A，上顶点为 B，已知$|AB|=\frac{\sqrt{3}}{2}|F_1F_2|$.

(Ⅰ)求椭圆的离心率;

(Ⅱ)设 P 为椭圆上异于其顶点的一点，以线段 PB 为直径的圆经过点 F_1，经过点 F_2 的直线 l 与该圆相切于点 M，$|MF_2|=2\sqrt{2}$，求椭圆的方程.

解析：(Ⅰ)分别用 a，b，c 表示出|AB|和$|F_1F_2|$，根据已知建立等式求得 a 和 c 的关系，进而求得离心率 e.

(Ⅱ)根据(1)中 a 和 c 的关系，用 c 表示出椭圆的方程，设出 P 点的坐标，根据 PB 为直径，推断出 $BF_1\perp PF_1$，进而知两直线斜率相乘得-1，进而求得 sinθ 和 cosθ，表示出 P 点坐标，利用 P，B 求得圆心坐标，则可利用两点间的距离公式分别表示出|OB|，$|OF_2|$，利用勾股定理建立等式求得 c，则椭圆的方程可得.

答案：(Ⅰ)依题意可知$\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2c$，

$\because b^2=a^2-c^2$，$\therefore a^2+b^2=2a^2-c^2=3c^2$，$\therefore a^2=2c^2$，$\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知 $a^2=2c^2$，$\therefore b^2=a^2-c^2=c^2$，$\therefore$椭圆方程为$\frac{x^2}{2c^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$，B(0，c)，$F_1$(-c，0)

设 P 点坐标($\sqrt{2}c\sin\theta$，$c\cos\theta$)，圆心为 O，

$\because$PB 为直径，$\therefore BF_1\perp PF_1$，$\therefore k_{BF_1}\cdot k_{PF_1}=\frac{c}{c}\cdot\frac{c\cos\theta}{\sqrt{2}c\sin\theta+c}=-1$，

求得 $\sin\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$或 0(舍去)，

由椭圆对称性可知，P 在 x 轴下方和上方结果相同，只看在 x 轴上方时，$\cos\theta=\sqrt{1-\frac{8}{9}}=\frac{1}{3}$，

$\therefore$P 坐标为$(-\frac{4}{3}c, \frac{1}{3}c)$，$\therefore$圆心坐标为$(-\frac{2}{3}c, \frac{2}{3}c)$，

$\therefore r=|OB|=\sqrt{\frac{4}{9}c^2+\frac{c^2}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}c$，$|OF_2|=\sqrt{\frac{25c^2}{9}+\frac{4c^2}{9}}=\frac{\sqrt{29}}{3}c$，

$\because r^2+|MF_2|^2=|OF_2|^2$，$\therefore \frac{5c^2}{9}+8=\frac{29}{9}c^2$，$\therefore c^2=3$，$\therefore a^2=6$，$b^2=3$，

$\therefore$椭圆的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

19.(14分)已知函数$f(x)=x^2-\frac{2}{3}ax^3(a>0)$，$x\in R$.

(Ⅰ)求$f(x)$的单调区间和极值；

(Ⅱ)若对于任意的$x_1\in(2,+\infty)$，都存在$x_2\in(1,+\infty)$，使得$f(x_1)\cdot f(x_2)=1$，求a的取值范围.

解析：(Ⅰ)求导数，利用导数的正负，可得$f(x)$的单调区间，从而求出函数的极值；

(Ⅱ)由$f(0)=f(\frac{3}{2a})=0$及(Ⅰ)知，当$x\in(0,\frac{3}{2a})$时，$f(x)>0$；当$x\in(\frac{3}{2a},+\infty)$时，$f(x)<0$.设集合$A=\{f(x)|x\in(2,+\infty)\}$，集合$B=\{\frac{1}{f(x)}|x\in(1,+\infty),f(x)\neq0\}$，则对于任意的$x_1\in(2,+\infty)$，都存在$x_2\in(1,+\infty)$，使得$f(x_1)\cdot f(x_2)=1$，等价于$A\subseteq B$，分类讨论，即可求a的取值范围.

答案：(Ⅰ)$f'(x)=2x-2ax^2=2x(1-ax)$，

$\because a>0$，$\therefore$当$x<0$或$x>\frac{1}{a}$时，$f'(x)<0$，当$0<x<\frac{1}{a}$时，$f'(x)>0$，

$f(x)$单调递减区间为：$(-\infty,0)$和$(\frac{1}{a},+\infty)$，单调递增区间为$(0,\frac{1}{a})$，

当$x=0$时，有极小值$f(0)=0$，当$x=\frac{1}{a}$时，有极大值$f(\frac{1}{a})=\frac{1}{3a^2}$；

(Ⅱ)由$f(0)=f(\frac{3}{2a})=0$及(Ⅰ)知，当$x\in(0,\frac{3}{2a})$时，$f(x)>0$；当$x\in(\frac{3}{2a},+\infty)$时，$f(x)<0$.

设集合$A=\{f(x)|x\in(2,+\infty)\}$，集合$B=\{\frac{1}{f(x)}|x\in(1,+\infty),f(x)\neq0\}$，则对于任意的$x_1\in(2,+\infty)$，都存在$x_2\in(1,+\infty)$，使得$f(x_1)\cdot f(x_2)=1$，等价于$A\subseteq B$，显然$A\neq\emptyset$

下面分三种情况讨论：

(1)当$\frac{3}{2a}>2$，即$0<a<\frac{3}{4}$时，由$f(\frac{3}{2a})=0$可知，$0\in A$，而$0\in B$，$\therefore A$不是B的子集；

(2)当$1\leqslant\frac{3}{2a}\leqslant2$，即$\frac{3}{4}\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$时，$f(2)\leqslant0$，且$f(x)$在$(2,+\infty)$上单调递减，故$A=(-\infty,f(2))$，$\therefore A\subseteq(-\infty,0)$；由$f(1)\geqslant0$，有$f(x)$在$(1,+\infty)$上的取值范围包含$(-\infty,0)$，即$(-\infty,0)\subseteq B$，$\therefore A\subseteq B$；

(3)当$\frac{3}{2a}<1$，即$a>\frac{3}{2}$时，有$f(1)<0$，且$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，

故 B=($\frac{1}{f(1)}$，0)，A=(-∞，f(2))，∴A 不是 B 的子集.

综上，a 的取值范围是[$\frac{3}{4}$，$\frac{3}{2}$].

20.(14 分)已知 q 和 n 均为给定的大于 1 的自然数，设集合 M={0，1，2，…，q-1}，集合 A={x|$x=x_1+x_2q+\cdots+x_nq^{n-1}$，$x_i\in M$，i=1，2，…n}.

(Ⅰ)当 q=2，n=3 时，用列举法表示集合 A；

(Ⅱ)设 s，t∈A，$s=a_1+a_2q+\cdots+a_nq^{n-1}$，$t=b_1+b_2q+\cdots+b_nq^{n-1}$，其中 a_i，$b_i\in M$，i=1，2，…，n. 证明：若 $a_n<b_n$，则 s<t.

解析：(Ⅰ)当 q=2，n=3 时，M={0，1}，A={x|$x=x_1+x_2\cdot 2+x_3\cdot 2^2$，$x_i\in M$，i=1，2，3}.

即可得到集合 A.

(Ⅱ)由题意可得 $s-t=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)q+\cdots+(a_{n-1}-b_{n-1})q^{n-2}+(a_n-b_n)q^{n-1}\leqslant(q-1)+(q-1)q+\cdots+(q-1)q^{n-2}+(q-1)q^{n-1}$ 再利用等比数列的前 n 项和公式即可得出.

答案：(Ⅰ)当 q=2，n=3 时，M={0，1}，A={x|$x=x_1+x_2\cdot 2+x_3\cdot 2^2$，$x_i\in M$，i=1，2，3}.

可得 A={0，1，2，3，4，5，6，7}.

(Ⅱ)由设 s，t∈A，$s=a_1+a_2q+\cdots+a_nq^{n-1}$，$t=b_1+b_2q+\cdots+b_nq^{n-1}$，其中 a_i，$b_i\in M$，i=1，2，…，n. $a_n<b_n$，

可得 $s-t=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)q+\cdots+(a_{n-1}-b_{n-1})q^{n-2}+(a_n-b_n)q^{n-1}$

$\leqslant(q-1)+(q-1)q+\cdots+(q-1)q^{n-2}+(q-1)q^{n-1}$

$=\frac{(q-1)(1-q^{n-1})}{1-q}-q^{n-1}=-1<0$. ∴s<t.