2018年上海市长宁区、嘉定区高考一模数学

一、填空题

1.已知集合 A={1，2，3，4}，B={2，4，5}，则 A∩B=_____.

解析：∵集合 A={1，2，3，4}，B={2，4，5}，

∴A∩B={2，4}.

答案：{2，4}

2.不等式 $\frac{x}{x+1} \le 0$ 的解集为_____.

解析：∵ $\frac{x}{x+1} \le 0$，

∴ $\begin{cases} x \le 0 \\ x+1>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \ge 0 \\ x+1<0 \end{cases}$，

解得：﹣1＜x≤0，

答案：(﹣1，0]

3.已知 $\sin\alpha = \frac{4}{5}$，则 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ =_____.

解析：∵sinα $=\frac{4}{5}$，

∴cos($\frac{\pi}{2}$+α)=﹣sinα =﹣ $\frac{4}{5}$.

答案：﹣ $\frac{4}{5}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n - 1}{3^{n+1}+1}$ =_____.

解析：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n - 1}{3^{n+1}+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}$，

∴ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n - 1}{3^{n+1}+1} = \frac{1}{3}$.

答案：$\frac{1}{3}$

5.已知球的表面积为 16π，则该球的体积为_____.

解析：一个球的表面积是 16π，所以球的半径为：2，

所以这个球的体积为：$\frac{4\pi}{3} \times 2^3 = \frac{32}{3}\pi$.

答案：$\frac{32}{3}\pi$

6.已知函数 $f(x)=1+\log_a x$，$y=f^{-1}(x)$是函数 $y=f(x)$的反函数，若 $y=f^{-1}(x)$的图象过点(2，4)，则 a 的值为_____.

解析：∵$y=f^{-1}(x)$的图象过点(2，4)，

∴函数 y=f(x)的图象过点(4，2)，
又 $f(x)=1+\log_a x$，
∴$2=1+\log_a 4$，即 a=4.
答案：4

7.若数列{a_n}为等比数列，且 $a_5=3$，则 $\begin{vmatrix} a_2 & -a_7 \\ a_3 & a_8 \end{vmatrix}$=______.

解析：根据题意，$\begin{vmatrix} a_2 & -a_7 \\ a_3 & a_8 \end{vmatrix}=a_2\cdot a_8-a_3\cdot(-a_7)=a_2\cdot a_8+a_3\cdot a_7$，
又由数列{a_n}为等比数列，且 $a_5=3$，
则有 $a_2\cdot a_8=a_3\cdot a_7=9$，
则 $\begin{vmatrix} a_2 & -a_7 \\ a_3 & a_8 \end{vmatrix}=9+9=18$；
答案：18

8.设△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，(a+b+c)(a－b+c)=ac，则 B=______.
解析：△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，
∵(a+b+c)(a－b+c)=ac，即 $a^2+c^2-b^2=-ac$，
又 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\dfrac{1}{2}$，
∴$B=\dfrac{2\pi}{3}$.
答案：$\dfrac{2\pi}{3}$

9.若 $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ 的二项展开式中的所有二项式系数之和等于 256，则该展开式中常数项的值为______.
解析：由题意可知，$2^n=256$，解得 n=8.
∴$\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^n=\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)^8$，其展开式的通项 $T_{r+1}=C_8^r\cdot(2x)^{8-r}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^r=2^{8-r}\cdot C_8^r\cdot x^{8-2r}$，
令 8－2r=0，得 r=4.
∴该展开式中常数项的值为 $T_5=2^4\cdot C_8^4=1120$.
答案：1120

10.已知函数 f(x)是定义在 R 上且周期为 4 的偶函数，当 x∈[2,4]时，$f(x)=\left|\log_4\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right|$，
则 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$的值为______.
解析：∵函数 f(x)是定义在 R 上且周期为 4 的偶函数，
∴ $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(4-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{7}{2}\right)$，
又当 x∈[2，4]时，$f(x)=\left|\log_4\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right|$，
∴ $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{7}{2}\right)=\left|\log_4\left(\dfrac{7}{2}-\dfrac{3}{2}\right)\right|=\left|\log_4 2\right|=\dfrac{\lg 2}{\lg 4}=\dfrac{\lg 2}{2\lg 2}=\dfrac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

11. 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$2S_n=a_n\bullet a_{n+1}(n\in N^*)$. 若$b_n=(-1)^n\frac{2n+1}{a_n\cdot a_{n+1}}$，则数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=$_____.

解析：∵$2S_n=a_n\bullet a_{n+1}(n\in N^*)$.

当 n≥2 时，$2S_{n-1}=a_{n-1}\bullet a_n$，

∴$2a_n=2S_n-2S_{n-1}=a_n(a_{n+1}-a_{n-1})$，

∵$a_1=1$，

∴$a_n\neq0$

∴$a_{n+1}-a_{n-1}=2$，

∴$(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})=2$，

∴$a_n-a_{n-1}=1$，

∴数列$\{a_n\}$是以 1 为首项，以 1 为公差的等差数列，

∴$a_n=1+(n-1)=n$，

∴$b_n=(-1)^n\frac{2n+1}{a_n\cdot a_{n+1}}=(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}=(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$，

数列$\{b_n\}$的前 n 项和$T_n=-\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\ldots+(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$，

当 n 为偶数时，$T_n=-1+\frac{1}{n+1}$，

当 n 为奇数时，$T_n=-1+\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=-1-\frac{1}{n+1}$，

综上所述$T_n=-1+\frac{(-1)^n}{n+1}$，

答案：$-1+\frac{(-1)^n}{n+1}$

12. 若不等式 $x^2-2y^2\leqslant cx(y-x)$对任意满足 x＞y＞0 的实数 x、y 恒成立，则实数 c 的最大值为_____.

解析：∵不等式 $x^2-2y^2\leqslant cx(y-x)$对任意满足 x＞y＞0 的实数 x、y 恒成立，

∴$c\le\frac{x^2-2y^2}{xy-x^2}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2-2}{\frac{x}{y}-\left(\frac{x}{y}\right)^2}$，

令$\frac{x}{y}=t>1$，

∴$c\le\frac{t^2-2}{t-t^2}=f(t)$，

$f'(t)=\frac{t^2-4t+2}{(t-t^2)^2}=\frac{(t-2-\sqrt{2})(t-2+\sqrt{2})}{(t-t^2)^2}$，

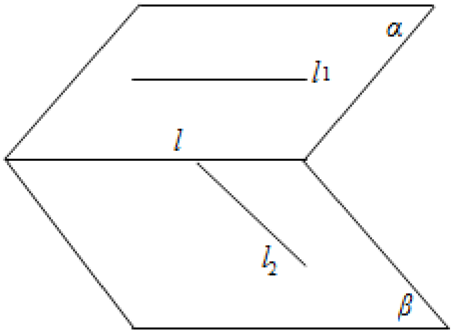
当 $t>2+\sqrt{2}$ 时，$f'(t)>0$，函数 f(t)单调递增；当 $1<t<2+\sqrt{2}$ 时，$f'(t)<0$，函数 f(t)单调递减.

∴当 $t=2+\sqrt{2}$ 时，f(t)取得最小值，$f(2+\sqrt{2})=2\sqrt{2}-4$.

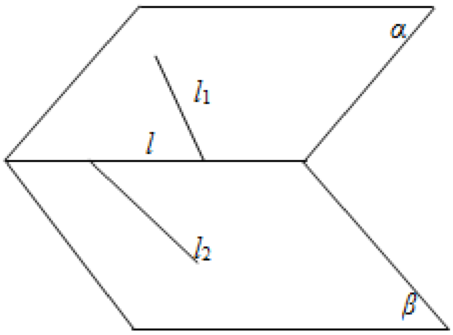
∴实数 c 的最大值为$2\sqrt{2}-4$.
答案：$2\sqrt{2}-4$

二、选择题(本大题共 4 题，每题 5 分，共 20 分)
13. 设角 α 的始边为 x 轴正半轴，则“α 的终边在第一、二象限”是“sinα >0”的(　)
A. 充分非必要条件
B. 必要非充分条件
C. 充分必要条件
D. 既非充分又非必要条件
解析：∵角 α 的始边为 x 轴正半轴，
∴“α 的终边在第一、二象限”⇒“sinα >0”，
“sinα >0”⇒“α 的终边在第一、二象限或 α 的终边在 x 轴正半轴”，
∴“α 的终边在第一、二象限”是“sinα >0”的充分非必要条件.
答案：A

14. 若直线 l_1和 l_2 是异面直线，l_1在平面 α 内，l_2在平面 β 内，l 是平面 α 与平面 β 的交线，则下列命题正确的是(　)
A. l 与 l_1，l_2都不相交
B. l 与 l_1，l_2都相交
C. l 至多与 l_1，l_2中的一条相交
D. l 至少与 l_1，l_2中的一条相交
解析：A. l 与 l_1，l_2可以相交，如图：



∴该选项错误；
B. l 可以和 l_1，l_2中的一个平行，如上图，∴该选项错误；
C. l 可以和 l_1，l_2都相交，如下图：



∴该选项错误；
D. “l 至少与 l_1，l_2中的一条相交”正确，假如 l 和 l_1，l_2都不相交；
∵l 和 l_1，l_2都共面；
∴l 和 l_1，l_2都平行；
∴$l_1 // l_2$，l_1和 l_2共面，这样便不符合已知的 l_1和 l_2异面；
∴该选项正确.
答案：D

15.对任意两个非零的平面向量$\overrightarrow{\alpha}$ 和$\overrightarrow{\beta}$，定义$\overrightarrow{\alpha}\otimes\overrightarrow{\beta}=\frac{|\overrightarrow{\alpha}|}{|\overrightarrow{\beta}|}\cos\theta$，其中θ 为$\overrightarrow{\alpha}$ 和$\overrightarrow{\beta}$ 的夹角，若两个非零的平面向量$\vec{a}$和$\vec{b}$满足：①$|\vec{a}|\geq|\vec{b}|$；②$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$；③$\vec{a}\otimes\vec{b}$和$\vec{b}\otimes\vec{a}$的值都在集合$\left\{x\mid x=\frac{n}{2},\ n\in N\right\}$中，则$\vec{a}\otimes\vec{b}$的值为(　　)

A. $\frac{5}{2}$

B. $\frac{3}{2}$

C. 1

D. $\frac{1}{2}$

解析：∵$\vec{a}\otimes\vec{b}=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\cos\theta=\frac{n}{2},\vec{b}\otimes\vec{a}=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\cos\theta=\frac{m}{2}$，m∈N，

由$\overrightarrow{\alpha}$ 与$\overrightarrow{\beta}$ 的夹角θ ∈(0，$\frac{\pi}{4}$)，知$\cos^2\theta=\frac{mn}{4}\in$($\frac{1}{2}$，1)，

故mn=3，m，n∈N，

∵$|\vec{a}|\geq|\vec{b}|$，

∴$0<\vec{b}\otimes\vec{a}=\frac{m}{2}<1$，

∴m=1，n=3，

∴$\vec{a}\otimes\vec{b}=\frac{3}{2}$，

答案：B

16.已知函数$f(x)=\begin{cases}2x,0\leq x\leq\frac{1}{2}\\2-2x,\frac{1}{2}<x\leq1\end{cases}$，且$f_1(x)=f(x)$，$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$，n=1，2，3，….则满足方程$f_n(x)=x$的根的个数为(　　)

A. 2n 个

B. $2n^2$个

C. 2^n个

D. $2(2^n-1)$个

解析：当x∈[0，$\frac{1}{2}$]时，$f_1(x)=f(x)=2x=x$，解得x=0;

当x∈($\frac{1}{2}$，1]时，$f_1(x)=f(x)=2-2x=x$，解得x=$\frac{2}{3}$，

∴f 的1阶根的个数是2.

当x∈[0，$\frac{1}{4}$]时，$f_1(x)=f(x)=2x$，$f_2(x)=4x=x$，解得x=0;

当x∈($\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$]时，$f_1(x)=f(x)=2x$，$f_2(x)=2-4x=x$，解得x=$\frac{2}{5}$；

当x∈($\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$]时，$f_1(x)=2-2x$，$f_2(x)=-2+4x=x$，解得x=$\frac{2}{3}$；

当 x∈($\frac{3}{4}$，1]时，$f_1(x)=2-2x$，$f_2(x)=4-4x=x$，解得 $x=\frac{4}{5}$.

∴f 的 2 阶根的个数是 2^2.

依此类推

∴f 的 n 阶根的个数是 2^n.

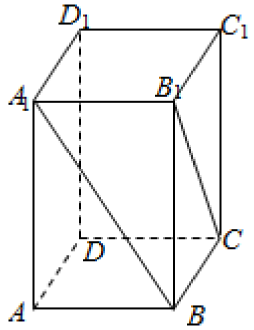
答案：C

三.解答题(本大题共 5 题，共 14+14+14+16+18=76 分)

17.如图，设长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AB=BC=3，$AA_1=4$.

(1)求四棱锥 A_1-ABCD 的体积；

(2)求异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角的大小.(结果用反三角函数值表示)



解析：(1)A_1到平面 ABCD 的距离 $d=AA_1=4$，$S_{正方体ABCD}=AB\times BC=9$，由此能求出四棱锥 A_1-ABCD 的体积.

(2)由 $A_1B\parallel D_1C$，知∠D_1CB_1是异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角(或所成角的补角)，由此能求出异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角.

答案：(1)∵A_1到平面 ABCD 的距离 $d=AA_1=4$，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，AB=BC=3，

∴$S_{正方体ABCD}=AB\times BC=3\times 3=9$，

∴四棱锥 A_1-ABCD 的体积 $V=\frac{1}{3}\times AA_1\times S_{正方体ABCD}=\frac{1}{3}\times 4\times 9=12$.

(2)∵$A_1B\parallel D_1C$，

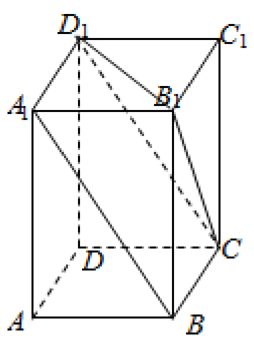
∴∠D_1CB_1是异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角(或所成角的补角)，

∵ $B_1D_1=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$，$B_1C=D_1C=\sqrt{9+16}=5$，

∴ $\cos\angle D_1CB_1=\frac{B_1C^2+D_1C^2-B_1D_1^2}{2\times B_1C\times D_1C}=\frac{25+25-18}{2\times 5\times 5}=\frac{16}{25}$，

∴∠$D_1CB_1=\arccos\frac{16}{25}$.

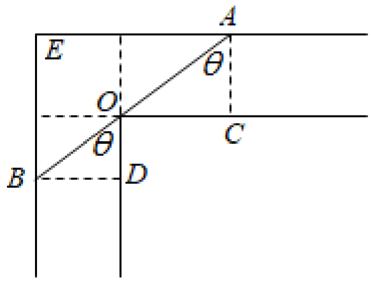
∴异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角为 $\arccos\frac{16}{25}$.



18.已知复数 z 满足 $|z|=\sqrt{2}$，z^2的虚部为 2.

(1)求复数 z；
(2)设 z、z^2、$z-z^2$在复平面上的对应点分别为 A、B、C，求△ABC 的面积.
解析：(1)设 z=a+bi(a，b∈R)，由已知列关于 a，b 的方程组，求解可得复数 z；
(2)分类求得 A、B、C 的坐标，再由三角形面积公式求解.
答案：(1)设 z=a+bi(a，b∈R)，
由已知可得：$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}\\2ab=2\end{cases}$，即$\begin{cases}a^2+b^2=2\\ab=1\end{cases}$，
解得$\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$或$\begin{cases}a=-1\\b=-1\end{cases}$.
∴z=1+i 或 z=-1-i；
(2)当 z=1+i 时，$z^2=2i$，$z-z^2=1-i$，
∴A(1，1)，B(0，2)，C(1，-1)，
故△ABC 的面积 S=$\frac{1}{2}\times2\times1=1$；
当 z=-1-i 时，$z^2=2i$，$z-z^2=-1-3i$，
∴A(-1，-1)，B(0，2)，C(-1，-3)，
故△ABC 的面积 S=$\frac{1}{2}\times2\times1=1$.
∴△ABC 的面积为 1.

19.一根长为 L 的铁棒 AB 欲通过如图所示的直角走廊，已知走廊的宽 AC=BD=2m.
(1)设∠BOD=θ，试将 L 表示为θ 的函数；
(2)求 L 的最小值，并说明此最小值的实际意义.



解析：(1)利用直角三角形中的边角关系，求得 L 的解析式.
(2)求导，分析导函数的符号，进而可得 L 的最值，进而得到最值的含义.
答案：(1)∵走廊的宽 AC=BD=2m.
∠BOD=∠BAC=θ，
∴ $L=\frac{2}{\sin\theta}+\frac{2}{\cos\theta}$；
(2)∵ $L=\frac{2}{\sin\theta}+\frac{2}{\cos\theta}$
∴ $L'=\frac{-2\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}$.
∵θ∈(0，$\frac{\pi}{4}$)，L′<0，L 为减函数；
θ∈($\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}$)，L′>0，L 为增函数；
∴θ=$\frac{\pi}{4}$时，L 取最小值$4\sqrt{2}$，
该最小值表示：超过$4\sqrt{2}$则无法通过.

20.已知函数 $f(x)=2^x+2^{-x}$.

(1)求证：函数 $f(x)$ 是偶函数；

(2)设 $a\in R$，求关于 x 的函数 $y=2^{2x}+2^{-2x}-2af(x)$ 在 $x\in[0，+\infty)$ 时的值域 $g(a)$ 表达式；

(3)若关于 x 的不等式 $mf(x)\leqslant 2^{-x}+m-1$ 在 $x\in(0，+\infty)$ 时恒成立，求实数 m 的取值范围.

解析：(1)利用奇偶性的定义，可得函数 $f(x)$ 是偶函数；

(2)令 $t=f(x)=2^x+2^{-x}$.则 $t\geqslant 2$，$2^{2x}+2^{-2x}=t^2-2$，$y=2^{2x}+2^{-2x}-2af(x)=t^2-2at-2$，结合二次函数的性质分类讨论，可得不同情况下，函数的值域；

(3)若关于 x 的不等式 $mf(x)\leqslant 2^{-x}+m-1$ 在 $x\in(0，+\infty)$ 时恒成立，即 $m\le\dfrac{2^{-x}-1}{2^x+2^{-x}-1}$ 在 $x\in(0，+\infty)$ 时恒成立，求出 $\dfrac{2^{-x}-1}{2^x+2^{-x}-1}$ 的最小值，可得答案.

答案：(1)∵函数 $f(x)=2^x+2^{-x}$ 的定义域关于原点对称，

且 $f(-x)=2^{-x}+2^x=2^x+2^{-x}=f(x)$，

故函数 $f(x)$ 是偶函数；

(2)令 $t=f(x)=2^x+2^{-x}$.

则 $t\geqslant 2$，$2^{2x}+2^{-2x}=t^2-2$

$y=2^{2x}+2^{-2x}-2af(x)=t^2-2at-2$，

当 $a\leqslant 2$ 时，当 $t=2$ 时，函数取最小值 $2-4a$，无最大值；

此时函数的值域为 $[2-4a，+\infty)$，

$a>2$ 时，当 $t=a$ 时，函数取最小值 $-a^2-2$，无最大值；

此时值域为 $[-a^2-2，+\infty)$；

(3)若关于 x 的不等式 $mf(x)\leqslant 2^{-x}+m-1$ 在 $x\in(0，+\infty)$ 时恒成立

即 $m(2^x+2^{-x})\leqslant 2^{-x}+m-1$ 在 $x\in(0，+\infty)$ 时恒成立

即 $m\le\dfrac{2^{-x}-1}{2^x+2^{-x}-1}=1-\dfrac{2^x}{2^x+2^{-x}-1}=1-\dfrac{1}{\left(2^{-x}\right)^2-2^{-x}+1}$ 在 $x\in(0，+\infty)$ 时恒成立

当 $x=1$ 时，$2^{-x}=\dfrac{1}{2}$，此时 $(2^{-x})^2-2^{-x}+1$ 取最小值 $\dfrac{3}{4}$，

故 $\dfrac{1}{\left(2^{-x}\right)^2-2^{-x}+1}$ 取最大值 $\dfrac{4}{3}$，

故 $1-\dfrac{1}{\left(2^{-x}\right)^2-2^{-x}+1}$ 取最小值 $-\dfrac{1}{3}$

故 $m\le-\dfrac{1}{3}$.

21.已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\sqrt{\dfrac{1}{a_n^2}+4}$，$n\in N^*$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $\dfrac{S_{n+1}}{a_n^2}=\dfrac{S_n}{a_{n+1}^2}+16n^2-8n-3$，试确定 b_1 的值，使得数列 $\{b_n\}$ 为等差数列；

(3)将数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n^2}\right\}$ 中的部分项按原来顺序构成新数列 $\{c_n\}$，且 $c_1=5$，求证：存在无数个满足条件的无穷等比数列 $\{c_n\}$.

解析：(1)由 $a_1=1$，两边平方化简可得 $\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}=4$，则数列 $\left\{\frac{1}{a_n^2}\right\}$ 是以 1 为首项，以 4 为公差的等差数列，根据等差数列的通项公式即可求得 $\frac{1}{a_n^2}$，即可求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)由(1)可得化简整理 $\frac{S_{n+1}}{4n+1}-\frac{S_n}{4n-3}=1$，得利用等差数列的通项公式可得：$\frac{S_n}{4n-3}=b_1+n-1$，即 $S_n=(b_1+n-1)(4n-3)$，当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}$，化为 $b_n=4b_1+8n-11$，取 $n=1$ 即可得出；

(3)解法 1：令等比数列 $\{c_n\}$ 的公比 $q=4^m(m\in N^*)$，则 $c_n=c_1q^{n-1}=5\times 4^{m(n-1)}$，设 $k=m(n-1)$，可得 $5\times 4^{m(n-1)}=3[5(1+4+4^2+\cdots+4^{k-1})+2]-1$，….因为 $5(1+4+4^2+\cdots+4^{k-1})+2$ 为正整数，可得数列 $\{c_n\}$ 是数列 $\{a_n\}$ 中包含的无穷等比数列，进而证明结论.

解法 2：设 $c_2=4k_2-3(k_2\geqslant 3)$，所以公比 $q=\frac{4k_2-3}{5}$，由等比数列 $\{c_n\}$ 的各项为整数，则 q 为整数，取 $q=4m+1$，故 $c_n=5\cdot(4m+1)^{n-1}$，利用等差数列定义可得 k_n 是正整数，因此以数列 $\{c_n\}$ 是数列 $\{a_n\}$ 中包含的无穷等比数列，即可证明.

答案：(1) $\frac{1}{a_{n+1}}=\sqrt{\frac{1}{a_n^2}+4}$，则 $\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}=4$，$n\in N^*$

∴数列 $\left\{\frac{1}{a_n^2}\right\}$ 是以 1 为首项，以 4 为公差的等差数列，则 $\frac{1}{a_n^2}=1+4(n-1)=4n-3$，

∴ $a_n=\frac{1}{\sqrt{4n-3}}$，

∴数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\frac{1}{\sqrt{4n-3}}$；

(2)由(1)可得 $a_n=\frac{1}{\sqrt{4n-3}}$，

∵ $\frac{S_{n+1}}{a_n^2}=\frac{S_n}{a_{n+1}^2}+16n^2-8n-3$，∴ $(4n-3)S_{n+1}=(4n+1)S_n+16n^2-8n-3$，

∴ $\frac{S_{n+1}}{4n+1}-\frac{S_n}{4n-3}=1$，

∴数列 $\left\{\frac{S_n}{4n-3}\right\}$ 是等差数列，首项为 S_1，公差为 1.∴ $\frac{S_n}{4n-3}=b_1+n-1$，

∴$S_n=(b_1+n-1)(4n-3)$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=S_n-S_{n-1}=(b_1+n-1)(4n-3)-(b_1+n-2)(4n-7)$，化为 $b_n=4b_1+8n-11$，

若数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，则上式对于 $n=1$ 时也成立，

∴$b_1=4b_1-3$，解得 $b_1=1$.∴$b_n=8n-7$ 为等差数列.

∴$b_1=1$，数列 $\{b_n\}$ 为等差数列；

(3)证明：由(1)可得 $\frac{1}{a_n^2}=4n-3$.

解法 1：令等比数列 $\{c_n\}$ 的公比 $q=4^m(m\in N^*)$，则 $c_n=c_1q^{n-1}=5\times 4^{m(n-1)}$，

设 $k=m(n-1)$，因为 $1+4+4^2+\cdots+4^{k-1}=\frac{4^k-1}{3}$，

所以 $5\times 4^{m(n-1)}=5\times[3(1+4+4^2+\cdots+4^{k-1})+1]$，

$=3[5(1+4+4^2+\cdots+4^{k-1})+2]-1$，

因为 $5(1+4+4^2+\cdots+4^{k-1})+2$ 为正整数，

所以数列 $\{c_n\}$ 是数列 $\{a_n\}$ 中包含的无穷等比数列，

因为公比 $q=4^m(m\in N^*)$ 有无数个不同的取值，对应着不同的等比数列，

故无穷等比数列 $\{c_n\}$ 有无数个.

解法 2：设 $c_2=4k_2-3(k_2\geqslant3)$，所以公比 $q=\frac{4k_2-3}{5}$.
因为等比数列 $\{b_n\}$ 的各项为整数，所以 q 为整数，
取 $k_2=5m+2(m\in N*)$，则 $q=4m+1$，故 $c_n=5\cdot(4m+1)^{n-1}$，
由 $4k_n-3=5\cdot(4m+1)^{n-1}$ 得，$k_n=\frac{1}{4}[5(4m+1)^{n-1}+3](n\in N*)$，
而当 $n\geqslant2$ 时，$k_n-k_{n-1}=\frac{5}{4}[(4m+1)^{n-1}-(4m+1)^{n-2}]=5m(4m+1)^{n-2}$，
即 $k_n=k_{n-1}+5m(4m+1)^{n-2}$，
又因为 $k_1=2$，$5m(4m+1)^{n-2}$ 都是正整数，所以 k_n 也都是正整数，
所以数列 $\{c_n\}$ 是数列 $\{a_n\}$ 中包含的无穷等比数列，
因为公比 $q=4m+1(m\in N^*)$ 有无数个不同的取值，对应着不同的等比数列，
故无穷等比数列 $\{c_n\}$ 有无数个.