

一、选择题(本大题共 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分)

1. - 7 的倒数是()

A. 7

B. - 7

C. $\frac{1}{7}$

D. $-\frac{1}{7}$

解析: 根据乘积是 1 的两个数互为倒数, - 7 的倒数是 $-\frac{1}{7}$.

答案: D.

2. 下列运算正确的是()

A. $a^6 \div a^3 = a^2$

B. $2a^3 + 3a^3 = 5a^6$

C. $(-a^3)^2 = a^6$

D. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

解析: A、原式= a^3 , 不符合题意;

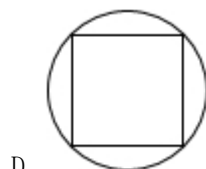
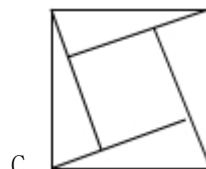
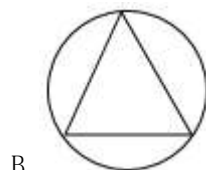
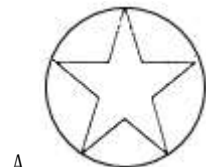
B、原式= $5a^3$, 不符合题意;

C、原式= a^6 , 符合题意;

D、原式= $a^2 + 2ab + b^2$, 不符合题意.

答案: C

3. 下列图形中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是()



解析: A、是轴对称图形, 不是中心对称图形, 不合题意;

B、是轴对称图形, 不是中心对称图形, 不合题意;

C、不是轴对称图形, 是中心对称图形, 不合题意;

D、是轴对称图形, 也是中心对称图形, 符合题意.

答案：D.

4. 抛物线 $y = -\frac{3}{5}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 3$ 的顶点坐标是()

A. $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$

B. $\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$

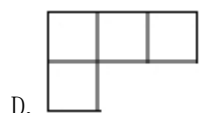
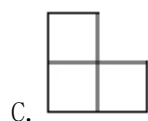
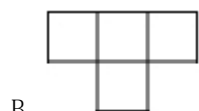
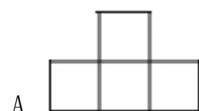
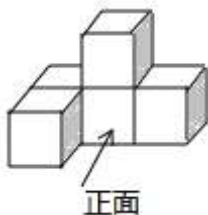
D. $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

解析： $y = -\frac{3}{5}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 3$ 是抛物线的顶点式，

根据顶点式的坐标特点可知，顶点坐标为 $\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$ 。

答案：B.

5. 五个大小相同的正方体搭成的几何体如图所示，其左视图是()



解析：从左边看第一层是两个小正方形，第二层左边是一个小正方形。

答案：C.

6. 方程 $\frac{2}{x+3} = \frac{1}{x-1}$ 的解为()

A. $x=3$

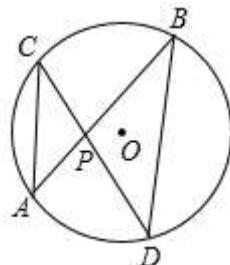
B. $x=4$

C. $x=5$

D. $x=-5$

解析: $2(x-1)=x+3$,
 $2x-2=x+3$,
 $x=5$,
 令 $x=5$ 代入 $(x+3)(x-1) \neq 0$.
 答案: C

7. 如图, $\odot O$ 中, 弦 AB , CD 相交于点 P , $\angle A=42^\circ$, $\angle APD=77^\circ$, 则 $\angle B$ 的大小是()



- A. 43°
- B. 35°
- C. 34°
- D. 44°

解析: $\because \angle D = \angle A = 42^\circ$,
 $\therefore \angle B = \angle APD - \angle D = 35^\circ$.
 答案: B.

8. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AB=4$, $AC=1$, 则 $\cos B$ 的值为()

- A. $\frac{\sqrt{15}}{4}$
- B. $\frac{1}{4}$
- C. $\frac{\sqrt{15}}{15}$
- D. $\frac{4\sqrt{17}}{17}$

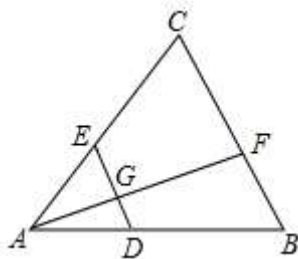
解析: \because 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AB=4$, $AC=1$,

$$\therefore BC = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15},$$

$$\text{则 } \cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

答案: A

9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 分别为 AB 、 AC 边上的点, $DE \parallel BC$, 点 F 为 BC 边上一点, 连接 AF 交 DE 于点 G , 则下列结论中一定正确的是()



A. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{EC}$

B. $\frac{AG}{GF} = \frac{AE}{BD}$

C. $\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$

D. $\frac{AG}{AF} = \frac{AC}{EC}$

解析：(A) ∵ DE // BC,

∴ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$,

∴ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, 故 A 错误;

(B) ∵ DE // BC,

∴ $\frac{AG}{GF} = \frac{AE}{EC}$, 故 B 错误;

(C) ∵ DE // BC,

$\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$, 故 C 正确;

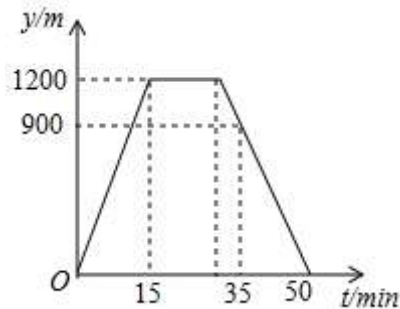
(D) ∵ DE // BC,

∴ $\triangle AGE \sim \triangle AFC$,

∴ $\frac{AG}{AF} = \frac{AE}{AC}$, 故 D 错误.

答案：C

10. 周日，小涛从家沿着一条笔直的公路步行去报亭看报，看了一段时间后，他按原路返回家中，小涛离家的距离 y (单位：m) 与他所用的时间 t (单位：min) 之间的函数关系如图所示，下列说法中正确的是 ()



A. 小涛家离报亭的距离是 900m

B. 小涛从家去报亭的平均速度是 60m/min

C. 小涛从报亭返回家中的平均速度是 80m/min

D. 小涛在报亭看报用了 15min

解析：A、由纵坐标看出小涛家离报亭的距离是 1200m，故 A 不符合题意；

B、由纵坐标看出小涛家离报亭的距离是 1200m，由横坐标看出小涛去报亭用了 15 分钟，小涛从家去报亭的平均速度是 80m/min ，故 B 不符合题意；

C、返回时的解析式为 $y = -60x + 3000$ ，当 $y = 1200$ 时， $x = 30$ ，由横坐标看出返回时的时间是 $50 - 30 = 20\text{min}$ ，返回时的速度是 $1200 \div 20 = 60\text{m/min}$ ，故 C 不符合题意；

D、由横坐标看出小涛在报亭看报用了 $30 - 15 = 15\text{min}$ ，故 D 符合题意.

答案：D.

二、填空题(本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分)

11. 将 57600000 用科学记数法表示为_____.

解析: 57600000 用科学记数法表示为 5.67×10^7 .

答案: 5.67×10^7 .

12. 函数 $y = \frac{2x+1}{x-2}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.

解析: 由 $x - 2 \neq 0$ 得, $x \neq 2$.

答案: $x \neq 2$.

13. 把多项式 $4ax^2 - 9ay^2$ 分解因式的结果是_____.

解析: 原式 $= a(4x^2 - 9y^2) = a(2x+3y)(2x-3y)$.

答案: $a(2x+3y)(2x-3y)$

14. 计算 $\sqrt{27} - 6\sqrt{\frac{1}{3}}$ 的结果是_____.

解析: 原式 $= 3\sqrt{3} - 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$

答案: $\sqrt{3}$

15. 已知反比例函数 $y = \frac{3k-1}{x}$ 的图象经过点 (1, 2), 则 k 的值为_____.

解析: \because 反比例函数 $y = \frac{3k-1}{x}$ 的图象经过点 (1, 2),

$\therefore 2 = 3k - 1$, 解得 $k = 1$.

答案: 1.

16. 不等式组 $\begin{cases} 5-2x \leq 1 \\ x-3 < 0 \end{cases}$ 的解集是_____.

解析: $\begin{cases} 5-2x \leq 1 \text{ ①} \\ x-3 < 0 \text{ ②} \end{cases}$,

由①得: $x \geq 2$,

由②得: $x < 3$,

则不等式组的解集为 $2 \leq x < 3$.

答案: $2 \leq x < 3$.

17. 一个不透明的袋子中装有 17 个小球, 其中 6 个红球、11 个绿球, 这些小球除颜色外无其它差别. 从袋子中随机摸出一个小球, 则摸出的小球是红球的概率为_____.

解析: \because 不透明的袋子中装有 17 个小球, 其中 6 个红球、11 个绿球,

\therefore 摸出的小球是红球的概率为 $\frac{6}{17}$.

答案: $\frac{6}{17}$.

18. 已知扇形的弧长为 4π , 半径为 8, 则此扇形的圆心角为_____.

解析: 设扇形的圆心角为 n° ,

则 $\frac{n\pi \times 8}{180} = 4\pi$,

解得, $n=90$.

答案: 90° .

19. 四边形 ABCD 是菱形, $\angle BAD=60^\circ$, $AB=6$, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O, 点 E 在 AC 上, 若 $OE=\sqrt{3}$, 则 CE 的长为_____.

解析: \because 四边形 ABCD 是菱形,

$\therefore AB=AD=6$, $AC \perp BD$, $OB=OD$, $OA=OC$,

$\because \angle BAD=60^\circ$,

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形,

$\therefore BD=AB=6$,

$\therefore OB = \frac{1}{2}BD=3$,

$\therefore OC = OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = 3\sqrt{3}$,

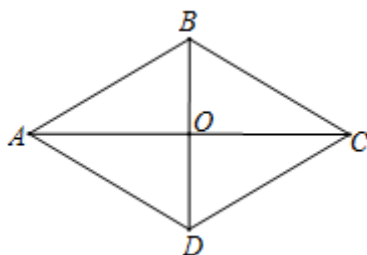
$\therefore AC=2OA=6\sqrt{3}$,

\because 点 E 在 AC 上, $OE=\sqrt{3}$,

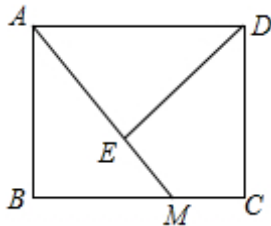
$\therefore CE=OC+\sqrt{3}$ 或 $CE=OC-\sqrt{3}$,

$\therefore CE=4\sqrt{3}$ 或 $CE=2\sqrt{3}$.

答案: $4\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{3}$.



20. 如图, 在矩形 ABCD 中, M 为 BC 边上一点, 连接 AM, 过点 D 作 $DE \perp AM$, 垂足为 E. 若 $DE=DC=1$, $AE=2EM$, 则 BM 的长为_____.



解析: \because 四边形 ABCD 是矩形,

$\therefore AB=DC=1$, $\angle B=\angle C=90^\circ$, $AD \parallel BC$, $AD=BC$,

$\therefore \angle AMB=\angle DAE$,

$\because DE=DC$,

$\therefore AB=DE$,

$\because DE \perp AM$,

$\therefore \angle DEA=\angle DEM=90^\circ$,

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle DEA$ 中,

$$\begin{cases} \angle AMB = \angle DAE \\ \angle B = \angle DEA = 90^\circ, \\ AB = DE \end{cases}$$

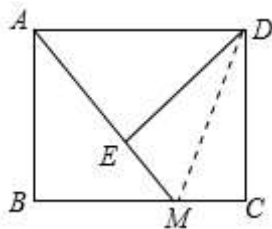
$\therefore \triangle ABM \cong \triangle DEA$ (AAS),

$\therefore AM = AD$,

$\therefore AE = 2EM$,

$\therefore BC = AD = 3EM$,

连接 DM, 如图所示:



在 $\text{Rt}\triangle DEM$ 和 $\text{Rt}\triangle DCM$ 中, $\begin{cases} DM = DM \\ DE = DC \end{cases}$,

$\therefore \text{Rt}\triangle DEM \cong \text{Rt}\triangle DCM$ (HL),

$\therefore EM = CM$,

$\therefore BC = 3EM$,

设 $EM = CM = x$, 则 $BM = 2x$, $AM = BC = 3x$,

在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 中, 由勾股定理得: $1^2 + (2x)^2 = (3x)^2$,

解得: $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore BM = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

答案: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

三、解答题(本大题共 60 分)

21. 先化简, 再求代数式 $\frac{1}{x-1} \div \frac{x+2}{x^2-2x+1} - \frac{x}{x+2}$ 的值, 其中 $x = 4\sin 60^\circ - 2$.

解析: 根据分式的除法和减法可以化简题目中的式子, 然后将 x 的值代入化简后的式子即可解答本题.

答案: $\frac{1}{x-1} \div \frac{x+2}{x^2-2x+1} - \frac{x}{x+2}$

$$= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{x+2} - \frac{x}{x+2}$$

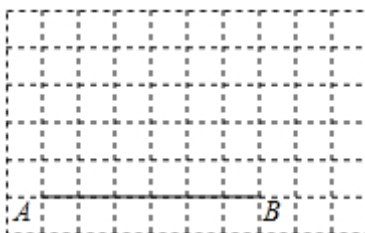
$$= \frac{x-1}{x+2} - \frac{x}{x+2}$$

$$= -\frac{1}{x+2},$$

当 $x = 4\sin 60^\circ - 2 = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 = 2\sqrt{3} - 2$ 时, 原式 $= -\frac{1}{2\sqrt{3}-2+2} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

22. 如图, 方格纸中每个小正方形的边长均为 1, 线段 AB 的两个端点均在小正方形的顶点上.

- (1) 在图中画出以 AB 为底、面积为 12 的等腰 $\triangle ABC$ ，且点 C 在小正方形的顶点上；
- (2) 在图中画出平行四边形 ABDE，且点 D 和点 E 均在小正方形的顶点上， $\tan \angle EAB = \frac{3}{2}$ ，连接 CD，请直接写出线段 CD 的长。

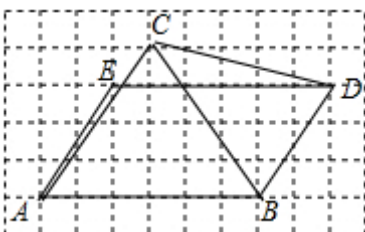


解析：(1) 因为 AB 为底、面积为 12 的等腰 $\triangle ABC$ ，所以高为 4，点 C 在线段 AB 的垂直平分线上，由此即可画出图形；

(2) 扇形根据 $\tan \angle EAB = \frac{3}{2}$ 的值确定点 E 的位置，由此即可解决问题，利用勾股定理计算 CD 的长；

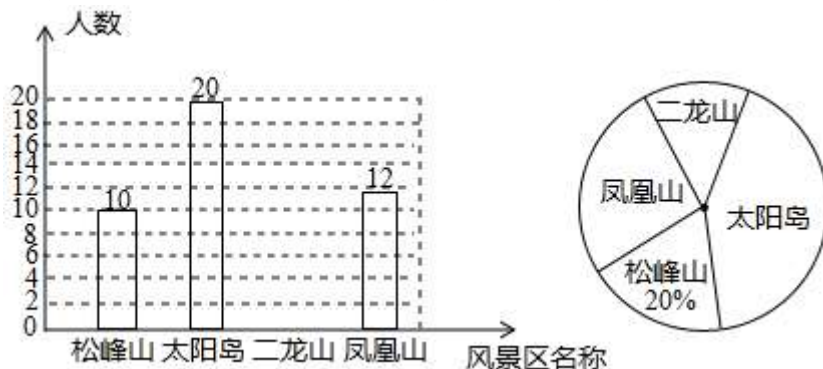
答案：(1) $\triangle ABC$ 如图所示；

(2) 平行四边形 ABDE 如图所示， $CD = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$ 。



23. 随着社会经济的发展和城市周边交通状况的改善，旅游已成为人们的一种生活时尚，洪祥中学开展以“我最喜欢的风景区”为主题的调查活动，围绕“在松峰山、太阳岛、二龙山和凤凰山四个风景区中，你最喜欢哪一个？(必选且只选一个)”的问题，在全校范围内随机抽取了部分学生进行问卷调查，将调查结果整理后绘制成如图所示的不完整的统计图，请你根据图中提供的信息回答下列问题：

- (1) 本次调查共抽取了多少名学生？
- (2) 通过计算补全条形统计图；
- (3) 若洪祥中学共有 1350 名学生，请你估计最喜欢太阳岛风景区的学生有多少名。



解析：(1) 根据条形统计图与扇形统计图求出总人数即可；

(2) 根据题意作出图形即可；

(3) 根据题意列出算式，计算即可得到结果。

答案：(1) $10 \div 20\% = 50$ (名)，

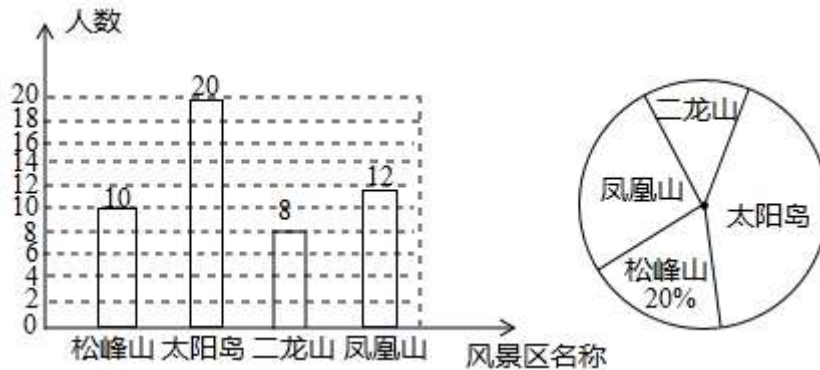
答：本次调查共抽取了 50 名学生；

(2) $50 - 10 - 20 - 12 = 8$ (名)，

补全条形统计图如图所示，

$$(3) 1350 \times \frac{20}{50} = 540 (\text{名}),$$

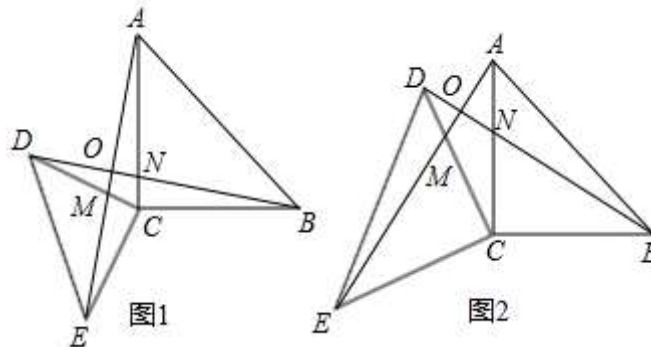
答：估计最喜欢太阳岛风景区的学生有 540 名。



24. 已知： $\triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 都是等腰直角三角形， $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ ，连接 AE ， BD 交于点 O ， AE 与 DC 交于点 M ， BD 与 AC 交于点 N 。

(1) 如图 1，求证： $AE = BD$ ；

(2) 如图 2，若 $AC = DC$ ，在不添加任何辅助线的情况下，请直接写出图 2 中四对全等的直角三角形。



解析：(1) 根据全等三角形的性质即可求证 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$ ，从而可知 $AE = BD$ ；

(2) 根据条件即可判断图中的全等直角三角形；

答案：(1) $\because \triangle ACB$ 和 $\triangle DCE$ 都是等腰直角三角形，

$$\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = BC, DC = EC,$$

$$\therefore \angle ACB + \angle ACD = \angle DCE + \angle ACD,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle ACE,$$

在 $\triangle ACE$ 与 $\triangle BCD$ 中，

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACE = \angle BCD \\ CE = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD (\text{SAS}),$$

$$\therefore AE = BD,$$

$$(2) \because AC = DC,$$

$$\therefore AC = CD = EC = CB,$$

$$\triangle ACB \cong \triangle DCE (\text{SAS});$$

由 (1) 可知： $\angle AEC = \angle BDC$ ， $\angle EAC = \angle DBC$

$$\therefore \angle DOM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEC = \angle CAE = \angle CBD,$$

$\therefore \triangle EMC \cong \triangle BCN$ (ASA),
 $\therefore CM = CN$,
 $\therefore DM = AN$,
 $\triangle AON \cong \triangle DOM$ (AAS),
 $\therefore DE = AB$, $AO = DO$,
 $\therefore \triangle AOB \cong \triangle DOE$ (HL)

25. 威丽商场销售 A, B 两种商品, 售出 1 件 A 种商品和 4 件 B 种商品所得利润为 600 元, 售出 3 件 A 种商品和 5 件 B 种商品所得利润为 1100 元.

(1) 求每件 A 种商品和每件 B 种商品售出后所得利润分别为多少元;

(2) 由于需求量大, A、B 两种商品很快售完, 威丽商场决定再一次购进 A、B 两种商品共 34 件. 如果将这 34 件商品全部售完后所得利润不低于 4000 元, 那么威丽商场至少需购进多少件 A 种商品?

解析: (1) 设 A 种商品售出后所得利润为 x 元, B 种商品售出后所得利润为 y 元. 由售出 1 件 A 种商品和 4 件 B 种商品所得利润为 600 元, 售出 3 件 A 种商品和 5 件 B 种商品所得利润为 1100 元建立两个方程, 构成方程组求出其解就可以;

(2) 设购进 A 种商品 a 件, 则购进 B 种商品 $(34 - a)$ 件. 根据获得的利润不低于 4000 元, 建立不等式求出其解就可以了.

答案: (1) 设 A 种商品售出后所得利润为 x 元, B 种商品售出后所得利润为 y 元. 由题意, 得

$$\begin{cases} x + 4y = 600 \\ 3x + 5y = 1100 \end{cases},$$

解得:
$$\begin{cases} x = 200 \\ y = 100 \end{cases}$$

答: A 种商品售出后所得利润为 200 元, B 种商品售出后所得利润为 100 元.

(2) 设购进 A 种商品 a 件, 则购进 B 种商品 $(34 - a)$ 件. 由题意, 得

$$200a + 100(34 - a) \geq 4000,$$

解得: $a \geq 6$

答: 威丽商场至少需购进 6 件 A 种商品.

26. 已知: AB 是 $\odot O$ 的弦, 点 C 是 AB 的中点, 连接 OB、OC, OC 交 AB 于点 D.

(1) 如图 1, 求证: $AD = BD$;

(2) 如图 2, 过点 B 作 $\odot O$ 的切线交 OC 的延长线于点 M, 点 P 是 AC 上一点, 连接 AP、BP, 求证: $\angle APB - \angle OMB = 90^\circ$;

(3) 如图 3, 在 (2) 的条件下, 连接 DP、MP, 延长 MP 交 $\odot O$ 于点 Q, 若 $MQ = 6DP$, $\sin \angle ABO = \frac{3}{5}$,

求 $\frac{MP}{MQ}$ 的值.

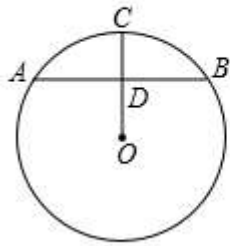


图1

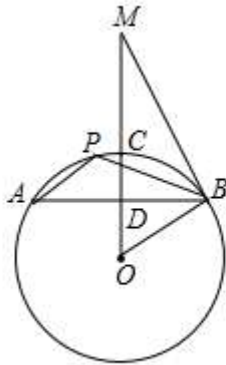


图2

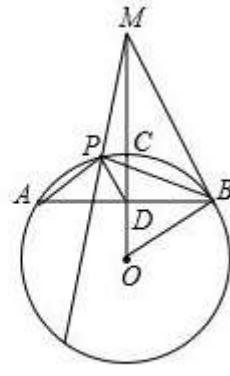


图3

解析：(1)如图1，连接OA，利用垂径定理和圆周角定理可得结论；

(2)如图2，延长BO交 $\odot O$ 于点T，连接PT，由圆周角定理可得 $\angle BPT=90^\circ$ ，易得 $\angle APT=\angle APB - \angle BPT=\angle APB - 90^\circ$ ，利用切线的性质定理和垂径定理可得 $\angle ABO=\angle OMB$ ，等量代换可得 $\angle ABO=\angle APT$ ，易得结论；

(3)如图3，连接MA，利用垂直平分线的性质可得 $MA=MB$ ，易得 $\angle MAB=\angle MBA$ ，作 $\angle PMG=\angle AMB$ ，在射线MG上截取 $MN=MP$ ，连接PN，BN，易得 $\triangle APM\cong\triangle BNM$ ，由全等三角形的性质可得 $AP=BN$ ， $\angle MAP=\angle MBN$ ，延长PD至点K，使 $DK=DP$ ，连接AK、BK，易得四边形APBK是平行四边形，由平行四边形的性质和平行线的性质可得 $\angle PAB=\angle ABK$ ， $\angle APB+\angle PBK=180^\circ$ ，由(2)得 $\angle APB - (90^\circ - \angle MBA)=90^\circ$ ，易得 $\angle NBP=\angle KBP$ ，可得 $\triangle PBN\cong\triangle PBK$ ， $PN=2PH$ ，利用三角函数的定义可得 $\sin\angle PMH=\frac{PH}{PM}$ ， $\sin\angle ABO=\frac{3}{5}$ ，设 $DP=3a$ ，则 $PM=5a$ ，可得结果。

答案：(1)证明：如图1，连接OA，

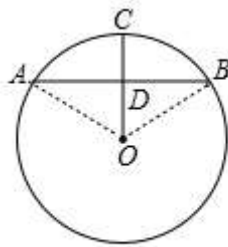


图1

$\because C$ 是 AB 的中点，

$\therefore AC = BC$ ，

$\therefore \angle AOC = \angle BOC$ ，

$\because OA = OB$ ，

$\therefore OD \perp AB$ ， $AD = BD$ ；

(2)证明：如图2，延长BO交 $\odot O$ 于点T，连接PT

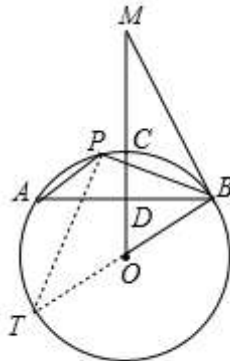


图2

$\because BT$ 是 $\odot O$ 的直径

$\therefore \angle BPT=90^\circ$,
 $\therefore \angle APT=\angle APB - \angle BPT=\angle APB - 90^\circ$,
 \because BM 是 $\odot O$ 的切线,
 $\therefore OB \perp BM$,
 又 $\angle OBA+\angle MBA=90^\circ$,
 $\therefore \angle ABO=\angle OMB$
 又 $\angle ABO=\angle APT$
 $\therefore \angle APB - 90^\circ =\angle OMB$,
 $\therefore \angle APB - \angle OMB=90^\circ$;
 (3)解: 如图 3, 连接 MA,

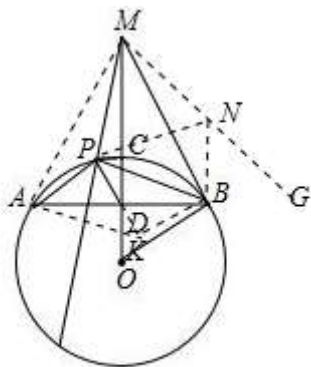


图3

\because MO 垂直平分 AB,
 $\therefore MA=MB$,
 $\therefore \angle MAB=\angle MBA$,
 作 $\angle PMG=\angle AMB$,
 在射线 MG 上截取 $MN=MP$,
 连接 PN, BN,
 则 $\angle AMP=\angle BMN$,
 $\therefore \triangle APM \cong \triangle BNM$,
 $\therefore AP=BN$, $\angle MAP=\angle MBN$,
 延长 PD 至点 K,
 使 $DK=DP$,
 连接 AK、BK,
 \therefore 四边形 APBK 是平行四边形;
 $AP \parallel BK$,
 $\therefore \angle PAB=\angle ABK$, $\angle APB+\angle PBK=180^\circ$,
 由(2)得 $\angle APB - (90^\circ - \angle MBA)$
 $=90^\circ$,
 $\therefore \angle APB+\angle MBA=180^\circ$
 $\therefore \angle PBK=\angle MBA$,
 $\therefore \angle MBP=\angle ABK=\angle PAB$,
 $\therefore \angle MAP=\angle PBA=\angle MBN$,
 $\therefore \angle NBP=\angle KBP$,
 $\because PB=PB$,
 $\therefore \triangle PBN \cong \triangle PBK$,
 $\therefore PN=PK=2PD$,
 过点 M 作 $MH \perp PN$ 于点 H,
 $\therefore PN=2PH$,
 $\therefore PH=DP$, $\angle PMH=\angle ABO$,

$$\because \sin \angle PMH = \frac{PH}{PM}, \sin \angle ABO = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{PH}{PM} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{DP}{PM} = \frac{3}{5}, \text{ 设 } DP=3a, \text{ 则 } PM=5a,$$

$$\therefore MQ=6DP=18a,$$

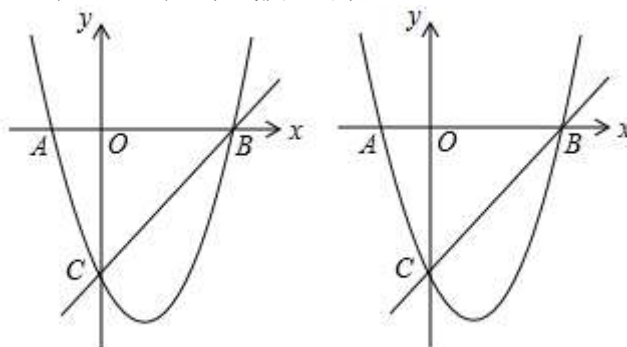
$$\therefore \frac{PM}{MQ} = \frac{5}{18}.$$

27. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 O 为坐标原点, 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 交 x 轴于 A 、 B 两点, 交 y 轴于点 C , 直线 $y=x-3$ 经过 B 、 C 两点.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 过点 C 作直线 $CD \perp y$ 轴交抛物线于另一点 D , 点 P 是直线 CD 下方抛物线上的一个动点, 且在抛物线对称轴的右侧, 过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于点 E , PE 交 CD 于点 F , 交 BC 于点 M , 连接 AC , 过点 M 作 $MN \perp AC$ 于点 N , 设点 P 的横坐标为 t , 线段 MN 的长为 d , 求 d 与 t 之间的函数关系式(不要求写出自变量 t 的取值范围);

(3) 在(2)的条件下, 连接 PC , 过点 B 作 $BQ \perp PC$ 于点 Q (点 Q 在线段 PC 上), BQ 交 CD 于点 T , 连接 OQ 交 CD 于点 S , 当 $ST=TD$ 时, 求线段 MN 的长.



备用图

解析: (1) 首先求出点 B 、 C 的坐标, 然后利用待定系数法求出抛物线的解析式;

(2) 根据 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AMC} + S_{\triangle AMB}$, 由三角形面积公式可求 y 与 m 之间的函数关系式;

(3) 如图 2, 由抛物线对称性可得 $D(2, -3)$, 过点 B 作 $BK \perp CD$ 交直线 CD 于点 K , 可得四边形 $OCKB$ 为正方形, 过点 O 作 $OH \perp PC$ 交 PC 延长线于点 H , $OR \perp BQ$ 交 BQ 于点 I 交 BK 于点 R , 可得四边形 $OHQI$ 为矩形, 可证 $\triangle OBQ \cong \triangle OCH$, $\triangle OSR \cong \triangle OGR$, 得到 $\tan \angle QCT = \tan \angle TBK$, 设 $ST=TD=m$, 可得 $SK=2m+1$, $CS=2-2m$, $TK=m+1=BR$, $SR=3-m$, $RK=2-m$, 在 $Rt\triangle SKR$ 中, 根据勾股定理求得 m , 可得 $\tan \angle PCD = \frac{1}{2}$, 过点 P 作 $PE' \perp x$ 轴于 E' 交 CD 于点 F' , 得到

$$P(t, -\frac{1}{2}t-3), \text{ 可得 } -\frac{1}{2}t-3=t^2-2t-3, \text{ 求得 } t, \text{ 再根据 } MN=d \text{ 求解即可.}$$

答案: (1) \because 直线 $y=x-3$ 经过 B 、 C 两点,

$$\therefore B(3, 0), C(0, -3),$$

$\because y=x^2+bx+c$ 经过 B 、 C 两点,

$$\therefore \begin{cases} 9+3b+c=0 \\ c=-3 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} b=-2 \\ c=-3 \end{cases},$$

故抛物线的解析式为 $y=x^2-2x-3$;

(2) 如图 1, $y=x^2-2x-3$,
 $y=0$ 时, $x^2-2x-3=0$,
 解得 $x_1=-1, x_2=3$,
 $\therefore A(-1, 0)$,
 $\therefore OA=1, OB=OC=3$,
 $\therefore \angle ABC=45^\circ, AC=\sqrt{10}, AB=4$,
 $\therefore PE \perp x$ 轴,
 $\therefore \angle EMB=\angle EBM=45^\circ$,
 \therefore 点 P 的横坐标为 1,
 $\therefore EM=EB=3-t$,
 连结 AM,
 $\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AMC}+S_{\triangle AMB}$,
 $\therefore \frac{1}{2}AB \cdot OC = \frac{1}{2}AC \cdot MN + \frac{1}{2}AB \cdot EM$,
 $\therefore \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = \frac{1}{2} \times \sqrt{10}d + \frac{1}{2} \times 4(3-t)$,
 $\therefore d = \frac{2\sqrt{10}}{5}t$;

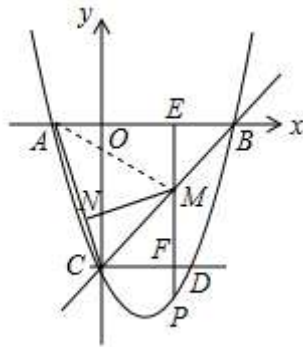


图1

(3) 如图 2,
 $\therefore y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$,
 \therefore 对称轴为 $x=1$,
 \therefore 由抛物线对称性可得 $D(2, -3)$,
 $\therefore CD=2$,
 过点 B 作 $BK \perp CD$ 交直线 CD 于点 K,
 \therefore 四边形 OCKB 为正方形,
 $\therefore \angle OBK=90^\circ, CK=OB=BK=3$,
 $\therefore DK=1$,
 $\therefore BQ \perp CP$,
 $\therefore \angle CQB=90^\circ$,
 过点 O 作 $OH \perp PC$ 交 PC 延长线于点 H, $OR \perp BQ$ 交 BQ 于点 I 交 BK 于点 R,
 $\therefore \angle OHC=\angle OIQ=\angle OIB=90^\circ$,
 \therefore 四边形 OHQI 为矩形,
 $\therefore \angle OCQ+\angle OBQ=180^\circ$,
 $\therefore \angle OBQ=\angle OCH$,
 $\therefore \triangle OBQ \cong \triangle OCH$,
 $\therefore OQ=OS, \angle GOB=\angle SOC$,
 $\therefore \angle SOG=90^\circ$,
 $\therefore \angle ROG=45^\circ$,
 $\therefore OR=OR$,

$$\begin{aligned}
&\therefore \triangle OSR \cong \triangle OGR, \\
&\therefore SR=GR, \\
&\therefore SR=CS+BR, \\
&\because \angle BOR + \angle OBI = 90^\circ, \quad \angle IBO + \angle TBK = 90^\circ, \\
&\therefore \angle BOR = \angle TBK, \\
&\therefore \tan \angle BOR = \tan \angle TBK, \\
&\therefore \frac{BR}{OB} = \frac{TK}{BK}, \\
&\therefore BR=TK, \\
&\because \angle CTQ = \angle BTK, \\
&\therefore \angle QCT = \angle TBK, \\
&\therefore \tan \angle QCT = \tan \angle TBK, \\
&\text{设 } ST=TD=m, \\
&\therefore SK=2m+1, \quad CS=2-2m, \quad TK=m+1=BR, \quad SR=3-m, \quad RK=2-m, \\
&\text{在 Rt}\triangle SKR \text{ 中,} \\
&\therefore SK^2 + RK^2 = SR^2, \\
&\therefore (2m+1)^2 + (2-m)^2 = (3-m)^2,
\end{aligned}$$

$$\text{解得 } m_1 = -2 (\text{舍去}), \quad m_2 = \frac{1}{2};$$

$$\therefore ST=TD = \frac{1}{2}, \quad TK = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \tan \angle TBK = \frac{TK}{BK} = \frac{3}{2} \div 3 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \tan \angle PCD = \frac{1}{2},$$

过点 P 作 $PE' \perp x$ 轴于 E' 交 CD 于点 F' ,

$$\therefore CF' = OE' = t,$$

$$\therefore PF' = \frac{1}{2}t,$$

$$\therefore PE' = \frac{1}{2}t + 3,$$

$$\therefore P(t, -\frac{1}{2}t - 3),$$

$$\therefore -\frac{1}{2}t - 3 = t^2 - 2t - 3,$$

$$\text{解得 } t_1 = 0 (\text{舍去}), \quad t_2 = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore MN = d = \frac{2\sqrt{10}}{5}t = \frac{2\sqrt{10}}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

