2017年上海市松江区高考一模数学

一.填空题(本大题满分56分)本大题共有12题，考生必须在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，第1～6题每个空格填对得4分，第7～12题每个空格填对得5分，否则一律得零分.

1.设集合M={x|x^2=x}，N={x|lgx≤0}，则M∩N=_____.

解析：∵集合M={x|x^2=x}={0，1}，

N={x|lgx≤0}{x|0＜x≤1}，

∴M∩N={1}.

答案：{1}.

2.已知a，b∈R，i是虚数单位.若a+i=2-bi，则$(a+bi)^2$=_____.

解析：由已知等式结合复数相等的条件求得a，b的值，则复数a+bi可求，然后利用复数代数形式的乘法运算得答案.

答案：3-4i.

3.已知函数f(x)=a^x-1的图象经过(1，1)点，则$f^{-1}(3)$=_____.

解析：根据反函数的与原函数的关系，原函数的定义域是反函数的值域可得答案.

答案：2.

4.不等式x|x-1|＞0的解集为_____.

解析：∵x|x-1|＞0，

∴x＞0，|x-1|＞0，

故x-1＞0或x-1＜0，

解得：x＞1或0＜x＜1，

故不等式的解集是(0，1)∪(1，+∞)，

答案：(0，1)∪(1，+∞).

5.已知向量$\vec{a}$=(sinx，cosx)，$\vec{b}$=(sinx，sinx)，则函数f(x)=$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最小正周期为_____.

解析：由平面向量的坐标运算可得f(x)，再由辅助角公式化积，利用周期公式求得周期.

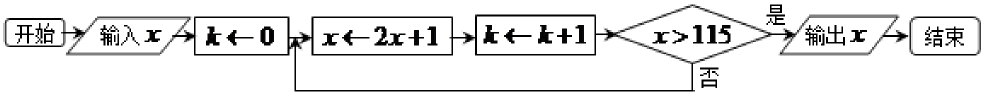
答案：π.

6.里约奥运会游泳小组赛采用抽签方法决定运动员比赛的泳道.在由2名中国运动员和6名外国运动员组成的小组中，2名中国运动员恰好抽在相邻泳道的概率为_____.

解析：先求出基本事件总数n=A_8^8，再求出2名中国运动员恰好抽在相邻泳道的概率为m=$A_2^2A_7^7$，由此能求出2名中国运动员恰好抽在相邻泳道的概率.

答案：$\frac{1}{4}$.

7.按如图所示的程序框图运算：若输入x=17，则输出的x值是_____.



解析：模拟程序的运行，可得

x=17，k=0

执行循环体，x=35，k=1

不满足条件 x＞115，执行循环体，x=71，k=2

不满足条件 x＞115，执行循环体，x=143，k=3

满足条件 x＞115，退出循环，输出 x 的值为 143.

答案：143.

8.设 $(1+x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$，若 $\frac{a_2}{a_3}=\frac{1}{3}$，则 n=_____.

解析：利用二项式定理展开可得：$(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\cdots=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$，比较系数即可得出.

答案：11.

9.已知圆锥底面半径与球的半径都是 1cm，如果圆锥的体积与球的体积恰好也相等，那么这个圆锥的侧面积是_____cm^2.

解析：由已知求出圆锥的母线长，代入圆锥的侧面积公式，可得答案.

答案：$\sqrt{17}$ π.

10.设 P(x，y)是曲线 C：$\sqrt{\frac{x^2}{25}}+\sqrt{\frac{y^2}{9}}$=1 上的点，$F_1$(-4，0)，$F_2$(4，0)，则$|PF_1|+|PF_2|$的最大值=_____.

解析：先将曲线方程化简，再根据图形的对称性可知$|PF_1|+|PF_2|$的最大值为 10.

答案：10.

11.已知函数 f(x)=$\begin{cases}\sqrt{-x^2+4x-3}, 1\le x\le 3\\ 2^x-8, x>3\end{cases}$，若 F(x)=f(x)-kx 在其定义域内有 3 个零点，则实数 k∈_____.

解析：问题转化为 f(x)和 y=kx 有 3 个交点，画出函数 f(x)和 y=kx 的图象，求出临界值，从而求出 k 的范围即可.

答案：(0，$\frac{\sqrt{3}}{3}$).

12.已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_2=3$，若$|a_{n+1}-a_n|=2^n(n\in N^*)$，且$\{a_{2n-1}\}$是递增数列、$\{a_{2n}\}$是递减

数列，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$=______.

解析：依题意，可求得 $a_3-a_2=2^2$，$a_4-a_3=-2^3$，…，$a_{2n}-a_{2n-1}=-2^{2n-1}$，累加求和，可得 $a_{2n}=\dfrac{13}{3}-\dfrac{1}{3}\cdot 2^{2n}$，

$a_{2n-1}=a_{2n}+2^{2n-1}=\dfrac{13}{3}+\dfrac{1}{6}\cdot 2^{2n}$；从而可求得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$的值.

答案：$-\dfrac{1}{2}$.

二、选择题(本大题满分 20 分)本大题共有 4 题，每题有且只有一个正确答案，考生必须在答题纸相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得 5 分，否则一律得零分.

13.已知 a，b∈R，则“ab＞0“是“$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$＞2”的(　　)

A.充分非必要条件

B.必要非充分条件

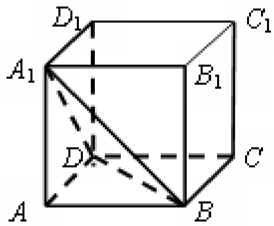
C.充要条件

D.既非充分也非必要条件

解析：根据充分必要条件的定义判断即可.

答案：B.

14.如图，在棱长为 1 的正方体 ABCD-$A_1B_1C_1D_1$中，点 P 在截面 A_1DB 上，则线段 AP 的最小值等于(　　)



A. $\dfrac{1}{3}$

B. $\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解析：由已知可得 AC_1⊥平面 A_1DB，可得 P 为 AC_1与截面 A_1DB 的垂足时线段 AP 最小，然后利用等积法求解.

答案：C.

15.若矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$满足：$a_{11}$，$a_{12}$，$a_{21}$，$a_{22}\in\{0，1\}$，且$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0$，则这样的互不相等的矩阵共有(　　)

A.2个

B.6个

C.8个

D.10个

解析：根据题意，分类讨论，考虑全为0；全为1；三个0，一个1；两个0，两个1，即可得出结论.

答案：D.

16.解不等式$(\frac{1}{2})^x-x+\frac{1}{2}>0$时，可构造函数$f(x)=(\frac{1}{2})^x-x$，由f(x)在x∈R是减函数，及f(x)>f(1)，可得x<1.用类似的方法可求得不等式$\arcsin x^2+\arcsin x+x^6+x^3>0$的解集为(　　)

A.(0，1]

B.(-1，1)

C.(-1，1]

D.(-1，0)

解析：由题意，构造函数$g(x)=\arcsin x+x^3$，在x∈[-1，1]上是增函数，且是奇函数，

不等式$\arcsin x^2+\arcsin x+x^6+x^3>0$可化为$g(x^2)>g(-x)$，

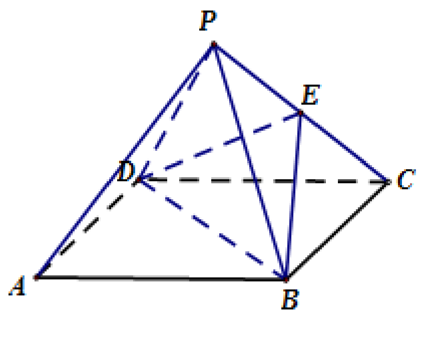
$\therefore -1\leqslant -x<x^2\leqslant 1$，

$\therefore 0<x\leqslant 1$.

答案：A.

三.解答题(本大题满分74分)本大题共有5题，解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

17.如图，在正四棱锥P-ABCD中，PA=AB=a，E是棱PC的中点.



(1)求证：PC⊥BD；

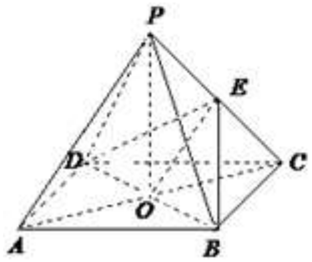
(2)求直线BE与PA所成角的余弦值.

解析：(1)推导出△PBC，△PDC都是等边三角形，从而BE⊥PC，DE⊥PC，由此能证明PC⊥BD.

(2)连接AC，交BD于点O，连OE，则AP∥OE，∠BOE即为BE与PA所成的角，由此能求出直线BE与PA所成角的余弦值.

答案：(1)∵四边形ABCD为正方形，且PA=AB=a，

∴△PBC，△PDC 都是等边三角形，
∵E 是棱 PC 的中点，
∴BE⊥PC，DE⊥PC，又 BE∩DE=E，
∴PC⊥平面 BDE
又 BD⊂平面 BDE，
∴PC⊥BD
(2)连接 AC，交 BD 于点 O，连 OE.



四边形 ABCD 为正方形，∴O 是 AC 的中点
又 E 是 PC 的中点
∴OE 为△ACP 的中位线，∴AP∥OE
∴∠BEO 即为 BE 与 PA 所成的角

在 Rt△BOE 中，BE=$\frac{\sqrt{3}}{2}$a，EO=$\frac{1}{2}$PA=$\frac{1}{2}$a，

∴cos∠BEO=$\frac{OE}{BE}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

∴直线 BE 与 PA 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

18.已知函数 F(x)=$\frac{a\cdot 2^x-1}{2^x+1}$，(a 为实数).

(1)根据 a 的不同取值，讨论函数 y=f(x)的奇偶性，并说明理由；
(2)若对任意的 x≥1，都有 1≤f(x)≤3，求 a 的取值范围.
解析：(1)根据题意，先求出函数的定义域，易得其定义域关于原点对称，求出 F(-x)的解析式，进而分 2 种情况讨论：①若 y=f(x)是偶函数，②若 y=f(x)是奇函数，分别求出每种情况下 a 的值，综合即可得答案；
(2)根据题意，由 f(x)的范围，分 2 种情况进行讨论：f(x)≥1 以及 f(x)≤3，分析求出每种情况下函数的恒成立的条件，可得 a 的值，进而综合 2 种情况，可得答案.

答案：(1)函数 F(x)=$\frac{a\cdot 2^x-1}{2^x+1}$定义域为 R，

且 F(-x)=$\frac{a\cdot 2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{a-2^x}{1+2^x}$，

①若 y=f(x)是偶函数，则对任意的 x 都有 f(x)=f(-x)，

即$\frac{a\cdot 2^x-1}{2^x+1}=\frac{a-2^x}{1+2^x}$，即 $2^x(a+1)=a+1$，

解可得 a=-1；

②若 y=f(x)是奇函数，则对任意的 x 都有 f(x)=-f(-x)，

即$\frac{a\cdot 2^x-1}{2^x+1}=-\frac{a-2^x}{1+2^x}$，即 $2^x(a-1)=1-a$，

解可得 a=1；

故当 a=-1 时，y=f(x)是偶函数，

当 a=1 时，y=f(x)是奇函数，

当 a≠±1 时，y=f(x)既非偶函数也非奇函数，

(2)由 f(x)≥1 可得：$2^x+1\leqslant a\cdot 2^x-1$，即$\frac{2}{2^x}\leqslant a-1$

∵当 x≥1 时，函数 $y_1=\frac{2}{2^x}$ 单调递减，其最大值为 1，

则必有 a≥2，

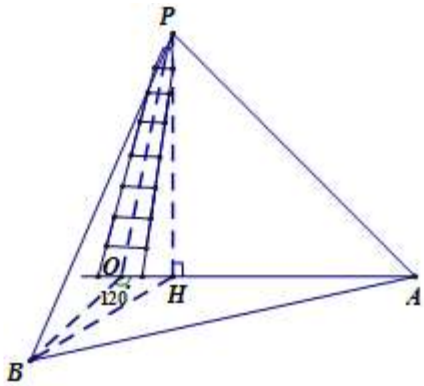
同理，由 f(x)≤3 可得：$a\cdot 2^x-1\leqslant 3\cdot 2^x+3$，即 $a-3\leqslant\frac{4}{2^x}$，

∵当 x≥1 时，$y_2=\frac{4}{2^x}$ 单调递减，且无限趋近于 0，

故 a≤3，

综合可得：2≤a≤3.

19.上海市松江区天马山上的“护珠塔”因其倾斜度超过意大利的比萨斜塔而号称“世界第一斜塔”.兴趣小组同学实施如下方案来测量塔的倾斜度和塔高：如图，记 O 点为塔基、P 点为塔尖、点 P 在地面上的射影为点 H.在塔身 OP 射影所在直线上选点 A，使仰角 k∠HAP=45°，过 O 点与 OA 成 120° 的地面上选 B 点，使仰角∠HPB=45°（点 A、B、O 都在同一水平面上），此时测得∠OAB=27°，A 与 B 之间距离为 33.6 米.试求：



(1)塔高(即线段 PH 的长，精确到 0.1 米)；

(2)塔身的倾斜度(即 PO 与 PH 的夹角，精确到 0.1°).

解析：(1)由题意可知：△PAH，△PBH 均为等腰直角三角形，AH=BH=x，∠HAB=27°，AB=33.6，

即可求得 x=$\dfrac{\frac{AB}{2}}{\cos\angle HAB}=\dfrac{16.8}{\cos 27°}$=18.86；

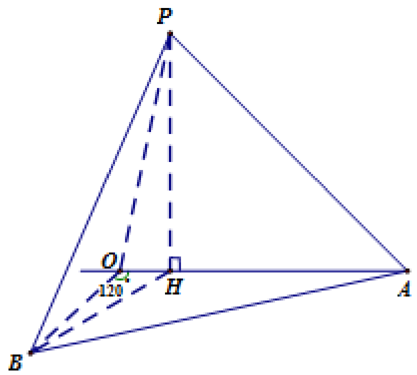
(2)∠OBH=180°-120°-2×27°=6°，BH=18.86，由正弦定理可知：

$\dfrac{OH}{\sin\angle OBH}=\dfrac{BH}{\sin\angle BOH}$，OH=$\dfrac{18.86\times\sin 6°}{\sin 120°}$=2.28，则倾斜角∠OPH=arctan$\dfrac{OH}{PH}$=arctan$\dfrac{2.28}{18.86}$=6.89°.

答案：(1)设塔高 PH=x，由题意知，∠HAP=45°，∠HBP=45°，

∴△PAH，△PBH 均为等腰直角三角形，

∴AH=BH=x



在△AHB 中，AH=BH=x，∠HAB=27°，AB=33.6，

∴x=$\dfrac{\frac{AB}{2}}{\cos\angle HAB}=\dfrac{16.8}{\cos 27°}$=18.86

(2)在△BOH 中，∠BOH=120°，

∴∠OBH=180°-120°-2×27°=6°，BH=18.9，

由$\dfrac{OH}{\sin\angle OBH}=\dfrac{BH}{\sin\angle BOH}$，

得 OH=$\dfrac{18.86\times\sin 6°}{\sin 120°}$=2.28，

∴∠OPH=arctan$\dfrac{OH}{PH}$=arctan$\dfrac{2.28}{18.86}$≈6.9°，

∴塔高 18.9 米，塔的倾斜度为 6.9°.

20.已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$=1 经过点(2，3)，两条渐近线的夹角为 60°，直线 l 交双曲线于 A、B 两点.

(1)求双曲线 C 的方程；

(2)若 l 过原点，P 为双曲线上异于 A，B 的一点，且直线 PA、PB 的斜率 k_{PA}，k_{PB} 均存在，求证：$k_{PA}\cdot k_{PB}$为定值；

(3)若 l 过双曲线的右焦点 F_1，是否存在 x 轴上的点 M(m，0)，使得直线 l 绕点 F_1 无论怎样转动，都有 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$=0 成立？若存在，求出 M 的坐标；若不存在，请说明理由.

解析：(1)利用双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$=1经过点(2，3)，两条渐近线的夹角为60°，建立方程，即可求双曲线C的方程；

(2)设M(x_0，y_0)，由双曲线的对称性，可得N的坐标，设P(x，y)，结合题意，又由M、P在双曲线上，可得$y_0^2=3x_0^2-3$，$y^2=3x^2-3$，将其坐标代入$k_{PM}\cdot k_{PN}$中，计算可得答案.

(3)先假设存在定点M，使MA⊥MB恒成立，设出M点坐标，根据数量级为0，求得结论.

答案：(1)解：由题意得$\begin{cases}\frac{4}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1\\ \frac{b}{a}=\sqrt{3}\end{cases}$解得a=1，b=$\sqrt{3}$

∴双曲线C的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}$=1；

(2)证明：设A(x_0，y_0)，由双曲线的对称性，可得B($-x_0$，$-y_0$).

设P(x，y)，

则$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y^2-{y_0}^2}{x^2-x_0}$，

∵$y_0^2=3x_0^2-3$，$y^2=3x^2-3$，

∴kPA•kPB=$\frac{y^2-{y_0}^2}{x^2-x_0}$=3

(3)解：由(1)得点F_1为(2，0)

当直线l的斜率存在时，设直线方程y=k(x-2)，A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)

将方程y=k(x-2)与双曲线方程联立消去y得：$(k^2-3)x^2-4k^2x+4k^2+3=0$，

∴$x_1+x_2=\frac{4k^2}{k^2-3}$，$x_1x_2=\frac{4k^2+3}{k^2-3}$

假设双曲线C上存在定点M，使MA⊥MB恒成立，设为M(m，n)

则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$

$=(x_1-m)(x_2-m)+[k(x_1-2)-n][k(x_2-2)-n]=(k^2+1)x_1x_2-(2k^2+kn+m)(x_1+x_2)+m^2+4k^2+4kn+n^2=$

$\frac{\left(m^2+n^2-4m-5\right)k^2-12nk-3\left(m^2+n^2-1\right)}{k^2-3}$=0，

故得：$(m^2+n^2-4m-5)k^2-12nk-3(m^2+n^2-1)=0$对任意的$k^2>3$恒成立，

∴$\begin{cases}m^2+n^2-4m-5=0\\ 12n=0\\ m^2+n^2-1=0\end{cases}$，解得m=-1，n=0

∴当点M为(-1，0)时，MA⊥MB恒成立；

当直线l的斜率不存在时，由A(2，3)，B(2，-3)知点M(-1，0)使得MA⊥MB也成立.

又因为点(-1，0)是双曲线C的左顶点，
所以双曲线C上存在定点M(-1，0)，使MA⊥MB恒成立.

21.如果一个数列从第2项起,每一项与它前一项的差都大于2,则称这个数列为“H型数列”.

(1)若数列$\{a_n\}$为“H型数列”，且$a_1=\frac{1}{m}-3$，$a_2=\frac{1}{m}$，$a_3=4$，求实数m的取值范围;

(2)是否存在首项为1的等差数列$\{a_n\}$为“H型数列”,且其前n项和S_n满足$S_n<n^2+n(n\in N^*)$?若存在，请求出$\{a_n\}$的通项公式;若不存在，请说明理由.

(3)已知等比数列$\{a_n\}$的每一项均为正整数,且$\{a_n\}$为“H型数列”,$b_n=\frac{2}{3}a_n$,$c_n=\frac{a_n}{(n+1)\cdot 2^{n-5}}$,当数列$\{b_n\}$不是“H型数列”时，试判断数列$\{c_n\}$是否为“H型数列”，并说明理由.

解析：(1)由题意得，$a_2-a_1=3>2$，$a_3-a_2=4-\frac{1}{m}>2$，即$2-\frac{1}{m}=\frac{2m-1}{m}>0$，解得m范围即可得出.

(2)假设存在等差数列$\{a_n\}$为“H型数列”,设公差为d,则$d>2$,由$a_1=1$,可得:$S_n=n+\frac{n(n-1)}{2}d$，由题意可得：$n+\frac{n(n-1)}{2}d<n^2+n$对$n\in N^*$都成立，即$d<\frac{2n}{n-1}$都成立.解出即可判断出结论.

(3)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则$a_n=a_1q^{n-1}$，且每一项均为正整数，且$a_{n+1}-a_n=a_n(q-1)>2>0$，可得$a_{n+1}-a_n=a_n(q-1)>a_n-a_{n-1}$，即在数列$\{a_n-a_{n-1}\}(n\geq 2)$中，“$a_2-a_1$”为最小项.同理在数列$\{b_n-b_{n-1}\}(n\geq 2)$中,“$b_2-b_1$”为最小项.由$\{a_n\}$为“H型数列”,可知只需$a_2-a_1>2$,即$a_1(q-1)>2$，又因为$\{b_n\}$不是“H型数列”，且“$b_2-b_1$”为最小项，可得$b_2-b_1\leq 2$，即$a_1(q-1)\leq 3$，由数列$\{a_n\}$的每一项均为正整数，可得$a_1(q-1)=3$，$a_1=1$，$q=4$或$a_1=3$，$q=2$，通过分类讨论即可判断出结论.

答案：(1)由题意得，$a_2-a_1=3>2$，$a_3-a_2=4-\frac{1}{m}>2$，即$2-\frac{1}{m}=\frac{2m-1}{m}>0$，解得$m>\frac{1}{2}$或$m<0$.

∴实数m的取值范围时$(-\infty，0)\cup(\frac{1}{2}，+\infty)$.

(2)假设存在等差数列$\{a_n\}$为“H型数列”,设公差为d,则$d>2$,由$a_1=1$,可得:$S_n=n+\frac{n(n-1)}{2}d$，由题意可得：$n+\frac{n(n-1)}{2}d<n^2+n$对$n\in N^*$都成立，即$d<\frac{2n}{n-1}$都成立.∵$\frac{2n}{n-1}=2+\frac{2}{n-1}>2$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n-1}=2$，∴$d\leq 2$，与$d>2$矛盾，因此不存在等差数列$\{a_n\}$为“H型数列”.

(3)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则$a_n=a_1q^{n-1}$，且每一项均为正整数，且$a_{n+1}-a_n=a_n(q-1)>2>0$,

∴$a_1>0$，$q>1$.∵$a_{n+1}-a_n=a_n(q-1)>a_n-a_{n-1}$，即在数列$\{a_n-a_{n-1}\}(n\geq 2)$中，“$a_2-a_1$”为最小项.

同理在数列$\{b_n-b_{n-1}\}(n\geqslant 2)$中，“$b_2-b_1$”为最小项.由$\{a_n\}$为“H 型数列”，可知只需 $a_2-a_1>2$，即 $a_1(q-1)>2$，又因为$\{b_n\}$不是“H 型数列”，且“b_2-b_1”为最小项，∴$b_2-b_1\leqslant 2$，即 $a_1(q-1)\leqslant 3$，由数列$\{a_n\}$的每一项均为正整数，可得 $a_1(q-1)=3$，∴$a_1=1$，$q=4$ 或 $a_1=3$，$q=2$，

①当 $a_1=1$，$q=4$ 时，$a_n=4^{n-1}$，则 $c_n=\dfrac{4^{n-1}}{(n+1)\cdot 2^{n-5}}=\dfrac{2^{n+3}}{n+1}$，令 $d_n=c_{n+1}-c_n(n\in N^*)$，则 $d_n=\dfrac{2^{n+4}}{n+2}-\dfrac{2^{n+3}}{n+1}$

$=2^{n+3}\cdot\dfrac{n}{(n+1)(n+2)}$，令 $e_n=d_{n+1}-d_n(n\in N^*)$，则 $e_n=2^{n+4}\cdot\dfrac{n+1}{(n+2)(n+3)}-2^{n+3}\cdot\dfrac{n}{(n+1)(n+2)}$

$=\dfrac{2^{n+3}}{n+2}\cdot\dfrac{n^2+n+2}{(n+1)(n+3)}>0$，

∴$\{d_n\}$为递增数列，

即 $d_n>d_{n-1}>d_{n-2}>\cdots>d_1$，

即 $c_{n+1}-c_n>c_n-c_{n-1}>c_{n-1}-c_{n-2}>\cdots>c_2-c_1$，

∵$c_2-c_1=\dfrac{32}{3}-8=\dfrac{8}{3}>2$，所以，对任意的 $n\in N^*$都有 $c_{n+1}-c_n>2$，

即数列$\{c_n\}$为“H 型数列”.②当 $a_1=3$，$q=2$ 时，$a_n=3\cdot 2^{n-1}$，

则 $c_n=\dfrac{3\cdot 2^{n-1}}{(n+1)\cdot 2^{n-5}}=\dfrac{48}{n+1}$，显然，$\{c_n\}$为递减数列，$c_2-c_1<0\leqslant 2$，

故数列$\{c_n\}$不是“H 型数列”；

综上：当 $a_n=4^{n-1}$时，数列$\{c_n\}$为“H 型数列”，

当 $a_n=3\cdot 2^{n-1}$时，数列$\{c_n\}$不是“H 型数列”.