2005年普通高等学校招生全国统一考试（辽宁卷）

数　　学

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择）题两部分，满分150分.考试用时120分钟.

第Ⅰ卷（选择题，共60分）

参考公式：

如果事件A、B互斥，那么

$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件A、B相互独立，那么

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件A在一次试验中发生的概率是P，那么n次独立重复试验中恰好发生k次的概率 $P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

其中R表示球的半径

球的体积公式

$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中R表示球的半径

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．复数$z=\frac{-1+i}{1+i}-1$.在复平面内，z所对应的点在　　（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在是函数$f(x)$在点$x=x_0$处连续的　　（　　）

A．充分而不必要的条件　　B．必要而不充分的条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要的条件

3．设袋中有80个红球，20个白球，若从袋中任取10个球，则其中恰有6个红球的概率为　　（　　）

A．$\frac{C_{80}^4\cdot C_{10}^6}{C_{100}^{10}}$　　B．$\frac{C_{80}^6\cdot C_{10}^4}{C_{100}^{10}}$　　C．$\frac{C_{80}^4\cdot C_{20}^6}{C_{100}^{10}}$　　D．$\frac{C_{80}^6\cdot C_{20}^4}{C_{100}^{10}}$

4．已知m、n是两条不重合的直线，α、β、γ是三个两两不重合的平面，给出下列四个命题：①若$m\perp\alpha,m\perp\beta,$则$\alpha//\beta$；　②若$\alpha\perp\gamma,\beta\perp\alpha,$则$\alpha//\beta$；

③若$m\subset\alpha,n\subset\beta,m//n,$则$\alpha//\beta$；

④若 m、n 是异面直线，$m\subset\alpha, m//\beta, n\subset\beta, n//\alpha,$ 则 $\alpha//\beta$

其中真命题是 （　　）

A．①和②　　B．①和③　　C．③和④　　D．①和④

5．函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}$ 的反函数是 （　　）

A．$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　　B．$y=-\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　　C．$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$　　D．$y=-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

6．若 $\log_{2a}\dfrac{1+a^2}{1+a}<0$，则 a 的取值范围是 （　　）

A．$(\frac{1}{2},+\infty)$　　B．$(1,+\infty)$　　C．$(\frac{1}{2},1)$　　D．$(0,\frac{1}{2})$

7．在 R 上定义运算 $\otimes: x\otimes y=x(1-y)$. 若不等式 $(x-a)\otimes(x+a)<1$ 对任意实数 x 成立，则 （　　）

A．$-1<a<1$　　B．$0<a<2$　　C．$-\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$　　D．$-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}$

8．若钝角三角形三内角的度数成等差数列，且最大边长与最小边长的比值为 m，则 m 的范围是 （　　）

A．（1，2）　　B．（2，+∞）　　C．[3，+∞)　　D．（3，+∞）

9．若直线 $2x-y+c=0$ 按向量 $\vec{a}=(1,-1)$ 平移后与圆 $x^2+y^2=5$ 相切，则 c 的值为（　　）

A．8 或－2　　B．6 或－4　　C．4 或－6　　D．2 或－8

10．已知 $y=f(x)$ 是定义在 R 上的单调函数，实数 $x_1\neq x_2$，$\lambda\neq-1, a=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$,

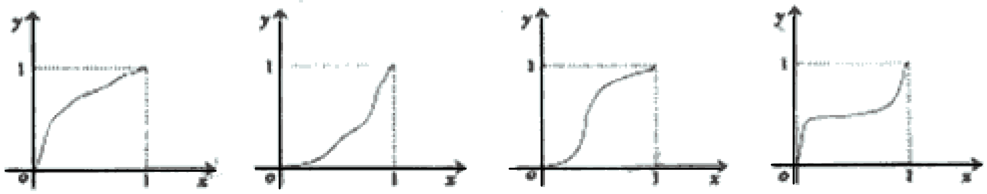
$\beta=\dfrac{x_2+\lambda x_1}{1+\lambda}$，若 $|f(x_1)-f(x_2)|<|f(\alpha)-f(\beta)|$，则 （　　）

A．$\lambda<0$　　B．$\lambda=0$　　C．$0<\lambda<1$　　D．$\lambda\geq1$

11．已知双曲线的中心在原点，离心率为 $\sqrt{3}$.若它的一条准线与抛物线 $y^2=4x$ 的准线重合，则该双曲线与抛物线 $y^2=4x$ 的交点到原点的距离是 （　　）

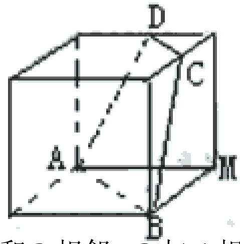
A．$2\sqrt{3}+\sqrt{6}$　　B．$\sqrt{21}$　　C．$18+12\sqrt{2}$　　D．21

12．一给定函数 $y=f(x)$ 的图象在下列图中，并且对任意 $a_1\in(0,1)$，由关系式 $a_{n+1}=f(a_n)$ 得到的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}>a_n(n\in N^*)$，则该函数的图象是 （　　）



A　　　　　　　B　　　　　　　C　　　　　　　D

第Ⅱ卷（非选择题　共90分）



二、填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分.

13．$(x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}})^n$的展开式中常数项是____________.

14．如图，正方体的棱长为1，C、D分别是两条棱的中点，A、B、M是顶点，那么点M到截面ABCD的距离是_________.

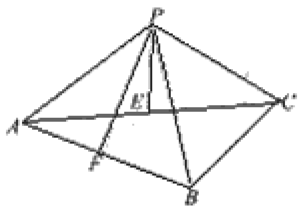
15．用1、2、3、4、5、6、7、8组成没有重复数字的八位数，要求1和2相邻，3与4相邻，5与6相邻，而7与8不相邻，这样的八位数共有__________个.（用数字作答）

16．ω是正实数，设$S_\omega=\{\theta\mid f(x)=\cos[\omega(x+\theta)]$是奇函数$\}$，若对每个实数$a$，$S_\omega\cap(a,a+1)$的元素不超过2个，且有$a$使$S_\omega\cap(a,a+1)$含2个元素，则$\omega$的取值范围是_______.

三、解答题：本大题共6小题，共74分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分12分）

已知三棱锥P—ABC中，E、F分别是AC、AB的中点，△ABC，△PEF都是正三角形，PF⊥AB.



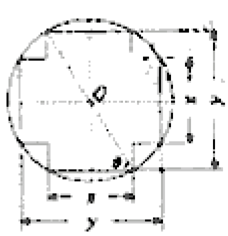
（Ⅰ）证明PC⊥平面PAB；

（Ⅱ）求二面角P—AB—C的平面角的余弦值；

（Ⅲ）若点P、A、B、C在一个表面积为12π的球面上，求△ABC的边长.

18.（本小题满分12分）

如图，在直径为1的圆O中，作一关于圆心对称、邻边互相垂直的十字形，其中$y>x>0$.



（Ⅰ）将十字形的面积表示为θ的函数；

（Ⅱ）θ为何值时，十字形的面积最大？最大面积是多少？

19．（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{x+3}{x+1}(x\neq -1)$. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=f(a_n)$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=|a_n-\sqrt{3}|, S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n(n\in N^*)$.

（Ⅰ）用数学归纳法证明 $b_n\leq\dfrac{(\sqrt{3}-1)^n}{2^{n-1}}$；

（Ⅱ）证明 $S_n<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

20.（本小题满分 12 分）

某工厂生产甲、乙两种产品，每种产品都是经过第一和第二工序加工而成，两道工序的加工结果相互独立，每道工序的加工结果均有 A、B 两个等级.对每种产品，两道工序的加工结果都为 A 级时，产品为一等品，其余均为二等品.

（Ⅰ）已知甲、乙两种产品每一道工序的加工结果为 A 级的概率如表一所示，分别求生产出的甲、乙产品为一等品的概率 $P_{甲}$、$P_{乙}$；

（Ⅱ）已知一件产品的利润如表二所示，用 ξ、η 分别表示一件甲、乙产品的利润，在（I）的条件下，求 ξ、η 的分布列及 Eξ、Eη；

（Ⅲ）已知生产一件产品需用的工人数和资金额如表三所示.该工厂有工人 40 名，可用资.金 60 万元.设 x、y 分别表示生产甲、乙产品的数量，在（II）的条件下，x、y 为何值时，$z = xE\xi + yE\eta$ 最大？最大值是多少？（解答时须给出图示）

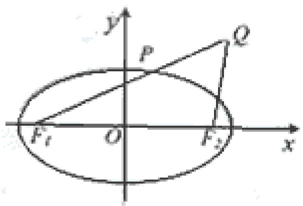
工序 / 概率 / 产品	第一工序	第二工序
甲	0.8	0.85
乙	0.75	0.8

等级 / 利润 / 产品	一等	二等
甲	5（万元）	2.5（万元）
乙	2.5（万元）	1.5（万元）

项目 / 用量 / 产品	工人（名）	资金（万元）
甲	8	8
乙	2	10

21．（本小题满分 14 分）

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1（－c，0）、F_2（c，0），Q 是椭圆外的动点，满足 $|\overrightarrow{F_1Q}|=2a.$ 点 P 是线段 F_1Q 与该椭圆的交点，点 T 在线段 F_2Q 上，并且满足 $\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{TF_2}=0,|\overrightarrow{TF_2}|\neq 0.$



（Ⅰ）设 x 为点 P 的横坐标，证明 $|\overrightarrow{F_1P}|=a+\frac{c}{a}x$；

（Ⅱ）求点 T 的轨迹 C 的方程；

（Ⅲ）试问：在点 T 的轨迹 C 上，是否存在点 M，使△F_1MF_2 的面积 S=b^2.若存在，求∠F_1MF_2 的正切值；若不存在，请说明理由.

22．（本小题满分 12 分）

函数 $y=f(x)$ 在区间（0，+∞）内可导，导函数 $f'(x)$ 是减函数，且 $f'(x)>0$．设 $x_0\in(0,+\infty), y=kx+m$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点（$x_0, f(x_0)$）得的切线方程，并设函数 $g(x)=kx+m.$

（Ⅰ）用 x_0、$f(x_0)$、$f'(x_0)$ 表示 m；

（Ⅱ）证明：当 $x_0\in(0,+\infty)$ 时, $g(x)\geq f(x)$；

（Ⅲ）若关于 x 的不等式 $x^2+1\geq ax+b\geq \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，其中 a、b 为实数，求 b 的取值范围及 a 与 b 所满足的关系.

2005年普通高等学校招生全国统一考试（辽宁卷）

数学参考答案与评分标准

说明：

一、本解答指出了每题要考查的主要知识和能力，并给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。

二、对解答题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

四、只给整数分数，选择题和填空题不给中间分。

一、选择题：本题考查基本知识和基本运算，每小题5分，满分60分.

1.B　2.B　3.D　4.D　5.C　6.C　7.C　8.B　9.A　10.A　11.B　12.A

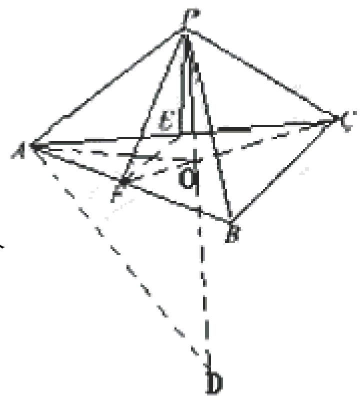
二、填空题：本题考查基本知识和基本运算。每小题4分，满分16分。

13．－160　　14．$\frac{2}{3}$　　15．576　　16．$(\pi,2\pi]$

三、解答题

17．本小题主要考查空间中的线面关系，三棱锥、球的有关概念及解三角形等基础知识，考查空间想象能力及运用方程解未知量的基本方法，满分12分.

（Ⅰ）证明：　连结CF.



$\because PE=EF=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AC,\therefore AP\perp PC.$

$\because CF\perp AB, PF\perp AB, \therefore AB\perp 平面PCF.$

$\because PC\subset 平面PCF,\therefore PC\perp AB.\therefore PC\perp 平面PAB.$……4分

（Ⅱ）解法一：$\because AB\perp PF, AB\perp CF,$

$\therefore \angle PFC$为所求二面角的平面角. 设AB=a，则AB=a，则$PF=EF=\frac{a}{2},CF=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$$\therefore \cos\angle PFC=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$……………………8分

解法二：设P在平面ABC内的射影为O. $\because \Delta PAF\cong\Delta PAE,\therefore \Delta PAB\cong\Delta PAC.$

得PA=PB=PC. 于是O是△ABC的中心. $\therefore \angle PFO$为所求二面角的平面角.

设 AB=a，则 $PF=\frac{a}{2},OF=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a.\quad\therefore\cos\angle PFO=\frac{OF}{PF}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$…………8 分

（Ⅲ）解法一：设 PA=x，球半径为 R. $\because PC\perp$平面$PAB,PA\perp PB,$

$\therefore\sqrt{3}x=2R.\because 4\pi R^2=12\pi$，$\therefore R=\sqrt{3}.$得$x=2.\therefore\Delta ABC$ 的边长为 $2\sqrt{2}$.………12 分

解法二：延长 PO 交球面于 D，那么 PD 是球的直径.

连结 OA、AD，可知△PAD 为直角三角形. 设 AB=x，球半径为 R.

$\because 4\pi R^2=12\pi,\therefore PD=2\sqrt{3}.\because PO=OF\tan\angle PFO=\frac{\sqrt{6}}{6}x,OA=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x,$

$\therefore(\frac{\sqrt{3}}{3}x)^2=\frac{\sqrt{6}}{6}x(2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}x).$于是$x=2\sqrt{2}.\therefore\Delta ABC$的边长为$2\sqrt{2}$.……12 分

18．本小题主要考查根据图形建立函数关系、三角函数公式、用反三角函数表示角以及解和三角函数有关的极值问题等基础知识，考查综合运用三角函数知识的能力. 满分 12 分.

（Ⅰ）解：设 S 为十字形的面积，则 $S=2xy-x^2$

$=2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}).$………………4 分

（Ⅱ）解法一：$S=2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta=\sin 2\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2\theta-\varphi)-\frac{1}{2},$

其中 $\varphi=\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}.$………8 分　　当$\sin(2\theta-\varphi)=1$,即$2\theta-\varphi=\frac{\pi}{2}$时,$S$ 最大.……10 分

所以，当 $\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$时,$S$ 最大. S 的最大值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$…………12 分

解法二： 因为 $S=2\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$, 所以 $S'=2\cos^2\theta-2\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta$

$=2\cos 2\theta+\sin 2\theta.$……………………8 分

令 S′ =0，即 $2\cos 2\theta+\sin 2\theta=0,$

可解得 $\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arctan(-2)$　………………10 分

所以，当 $\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arctan(-2)$ 时，S 最大，S 的最大值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.　…………12 分

19．本小题主要考查数列、等比数列、不等式等基本知识，考查运用数学归纳法解决有关问题的能力，满分 12 分。

（Ⅰ）证明：当 $x\geq 0$时,$f(x)=1+\frac{2}{x+1}\geq 1.$　因为 a_1=1，

所以 $a_n\geq 1(n\in N^*).$ ………………2 分

下面用数学归纳法证明不等式$b_n \le \frac{(\sqrt{3}-1)^n}{2^{n-1}}$.

（1）当 n=1 时，$b_1=\sqrt{3}-1$，不等式成立，

（2）假设当 n=k 时，不等式成立，即$b_k \le \frac{(\sqrt{3}-1)^k}{2^{k-1}}$.

那么 $b_{k-1}=|a_{k+1}-\sqrt{3}|=\frac{(\sqrt{3}-1)|a_k-\sqrt{3}|}{1+a_k}$ ………………6 分

$$\le \frac{\sqrt{3}-1}{2}b_k \le \frac{(\sqrt{3}-1)^{k+1}}{2^k}.$$

所以，当 n=k+1 时，不等也成立。

根据（1）和（2），可知不等式对任意 n∈N*都成立。 …………8 分

（Ⅱ）证明：由（Ⅰ）知， $b_n \le \frac{(\sqrt{3}-1)^n}{2^{n-1}}$.

所以 $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n \le (\sqrt{3}-1)+\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}+\cdots+\frac{(\sqrt{3}-1)^n}{2^{n-1}}$

$=(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{1-(\frac{\sqrt{3}-1}{2})^n}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$…………10 分 $<(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}.$

故对任意$n\in N^*,S_n<\frac{2}{3}\sqrt{3}.$………………（12 分）

20．（本小题主要考查相互独立事件的概率、随机变量的分布列及期望、线性规划模型的建立与求解等基础知识，考查通过建立简单的数学模型以解决实际问题的能力，满分 12 分.

（Ⅰ）解：$P_{甲}=0.8\times0.85=0.68,$ $P_{乙}0.75\times0.8=0.6.$…………2 分

（Ⅱ）解：随机变量ξ、η的分别列是

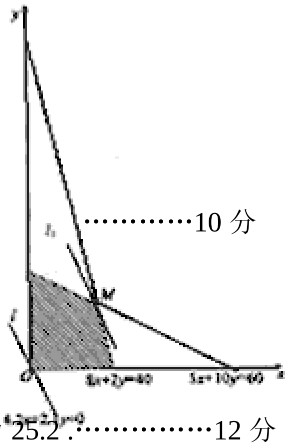
ξ	5	2.5
P	0.68	0.32

η	2.5	1.5
P	0.6	0.4

$E\xi=5\times0.68+2.5\times0.32=4.2,$ $E\eta=2.5\times0.6+1.5\times0.4=2.1.$…………6 分

（Ⅲ）解：由题设知$\begin{cases}5x+10y\le 60,\\ 8x+2y\le 40,\\ x\ge 0,\\ y\ge 0.\end{cases}$ 目标函数为 $z=xE\xi+yE\eta=4.2x+2.1y.$ ……8 分

作出可行域（如图）：



作直线l：$4.2x+2.1y=0,$

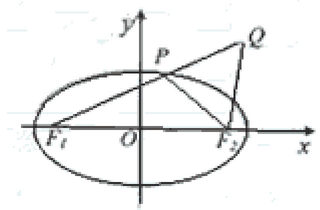
将 l 向右上方平移至 l_1 位置时，直线经过可行域上的点 M 点与原点距离最大，此时 $z=4.2x+2.1y$ …………10 分

取最大值. 解方程组$\begin{cases}5x+10y=60,\\ 8x+2y=40.\end{cases}$

得 $x=4,y=4.$ 即 $x=4,y=4$ 时，z 取最大值，z 的最大值为 25.2 .……………12 分

21．本小题主要考查平面向量的概率，椭圆的定义、标准方程和有关性质，轨迹的求法和应用，以及综合运用数学知识解决问题的能力.满分 14 分.

（Ⅰ）证法一：设点 P 的坐标为 $(x,y).$



由 P(x,y) 在椭圆上，得

$$|\overrightarrow{F_1P}|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}$$

$$=\sqrt{(a+\frac{c}{a}x)^2}.$$

由 $x\ge a,$知$a+\frac{c}{a}x\ge -c+a>0$，所以 $|\overrightarrow{F_1P}|=a+\frac{c}{a}x.$ ………………………3 分

证法二：设点 P 的坐标为 $(x,y).$ 记$|\overrightarrow{F_1P}|=r_1,|\overrightarrow{F_2P}|=r_2,$

则$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$

由$r_1+r_2=2a,r_1^2-r_2^2=4cx,$得$|\overrightarrow{F_1P}|=r_1=a+\frac{c}{a}x.$

证法三：设点 P 的坐标为 $(x,y).$ 椭圆的左准线方程为$a+\frac{c}{a}x=0.$

由椭圆第二定义得$\dfrac{|\overrightarrow{F_1P}|}{|x+\frac{a^2}{c}|}=\frac{c}{a}$，即$|\overrightarrow{F_1P}|=\frac{c}{a}|x+\frac{a^2}{c}|=|a+\frac{c}{a}x|.$

由 $x\ge -a,$知$a+\frac{c}{a}x\ge -c+a>0$，所以$|\overrightarrow{F_1P}|=a+\frac{c}{a}x.$ ………………………3 分

（Ⅱ）解法一：设点 T 的坐标为 $(x,y).$

当$|\overrightarrow{PT}|=0$时，点（a，0）和点（－a，0）在轨迹上.

当$|\overrightarrow{PT}|\neq 0$且$|\overrightarrow{TF_2}|\neq 0$时，由$|\overrightarrow{PT}|\cdot|\overrightarrow{TF_2}|=0$，得$\overrightarrow{PT}\perp\overrightarrow{TF_2}$.

又$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PF_2}|$，所以T为线段$F_2Q$的中点.

在△QF_1F_2中，$|\overrightarrow{OT}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{F_1Q}|=a$，所以有$x^2+y^2=a^2$.

综上所述，点T的轨迹C的方程是$x^2+y^2=a^2$.…………………………7分

解法二：设点T的坐标为(x,y). 当$|\overrightarrow{PT}|=0$时，点（a，0）和点（－a，0）在轨迹上.

当$|\overrightarrow{PT}|\neq 0$且$|\overrightarrow{TF_2}|\neq 0$时，由$\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{TF_2}=0$，得$\overrightarrow{PT}\perp\overrightarrow{TF_2}$.

又$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PF_2}|$，所以T为线段$F_2Q$的中点.

设点Q的坐标为（x',y'），则$\begin{cases}x=\dfrac{x'+c}{2},\\ y=\dfrac{y'}{2}.\end{cases}$

因此$\begin{cases}x'=2x-c,\\ y'=2y.\end{cases}$ ①

由$|\overrightarrow{F_1Q}|=2a$得$(x'+c)^2+y'^2=4a^2$. ②

将①代入②，可得$x^2+y^2=a^2$.

综上所述，点T的轨迹C的方程是$x^2+y^2=a^2$.……………………7分

（Ⅲ）解法一：C上存在点M（x_0,y_0）使S=b^2的充要条件是

$$\begin{cases}x_0^2+y_0^2=a^2, & ③\\ \frac{1}{2}\cdot 2c|y_0|=b^2. & ④\end{cases}$$

由③得$|y_0|\le a$，由④得$|y_0|\le\frac{b^2}{c}$. 所以，当$a\ge\frac{b^2}{c}$时，存在点M，使S=b^2；

当$a<\frac{b^2}{c}$时，不存在满足条件的点M.………………………11分

当$a\ge\frac{b^2}{c}$时，$\overrightarrow{MF_1}=(-c-x_0,-y_0),\overrightarrow{MF_2}=(c-x_0,-y_0)$，

由$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=x_0^2-c^2+y_0^2=a^2-c^2=b^2$，

$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=|\overrightarrow{MF_1}|\cdot|\overrightarrow{MF_2}|\cos\angle F_1MF_2$，

$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{MF_1}|\cdot|\overrightarrow{MF_2}|\sin\angle F_1MF_2=b^2$，得 $\tan\angle F_1MF_2=2.$

解法二：C 上存在点 M（x_0,y_0）使 S=b^2 的充要条件是

$$\begin{cases} x_0^2+y_0^2=a^2, & ③ \\ \frac{1}{2}\cdot 2c|y_0|=b^2. & ④ \end{cases}$$

由④得$|y_0|\le\frac{b^2}{c}$. 上式代入③得 $x_0^2=a^2-\frac{b^4}{c^2}=(a-\frac{b^2}{c})(a+\frac{b^2}{c})\ge 0.$

于是，当 $a\ge\frac{b^2}{c}$ 时，存在点 M，使 S=b^2；

当 $a<\frac{b^2}{c}$ 时，不存在满足条件的点 M.……………………11 分

当 $a\ge\frac{b^2}{c}$ 时，记 $k_1=k_{F_1M}=\frac{y_0}{x_0+c},k_2=k_{F_2M}=\frac{y_0}{x_0-c}$，

由$|F_1F_2|<2a,$知$\angle F_1MF_2<90°$，所以 $\tan\angle F_1MF_2=|\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}|=2.$…………14 分

22．本小题考查导数概念的几何意义，函数极值、最值的判定以及灵活运用数形结合的思想判断函数之间的大小关系.考查学生的学习能力、抽象思维能力及综合运用数学基本关系解决问题的能力.满分 12 分

（Ⅰ）解：$m=f(x_0)-x_0f'(x_0).$………………………………………2 分

（Ⅱ）证明：令 $h(x)=g(x)-f(x),$则$h'(x)=f'(x_0)-f'(x),h'(x_0)=0.$

因为 $f'(x)$ 递减，所以 $h'(x)$ 递增，因此，当 $x>x_0$时,$h'(x)>0$；

当 $x<x_0$时,$h'(x)<0$.所以 x_0 是 $h(x)$ 唯一的极值点，且是极小值点，可知 $h(x)$ 的最小值为 0，因此 $h(x)\ge 0,$ 即 $g(x)\ge f(x).$…………………………6 分

（Ⅲ）解法一：$0\le b\le 1$，$a>0$ 是不等式成立的必要条件，以下讨论设此条件成立.

$x^2+1\ge ax+b,$即$x^2-ax+(1-b)\ge 0$ 对任意 $x\in[0,+\infty)$ 成立的充要条件是

$a\le 2(1-b)^{\frac{1}{2}}.$

另一方面，由于 $f(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 满足前述题设中关于函数 $y=f(x)$ 的条件，利用（II）的结果可知，$ax+b=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的充要条件是：过点（0，b）与曲线 $y=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 相切的直线的斜率大于 a，该切线的方程为 $y=(2b)^{-\frac{1}{2}}x+b.$

于是 $ax+b\ge\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 的充要条件是 $a\ge(2b)^{\frac{1}{2}}.$…………………………10 分

综上，不等式$x^2+1\ge ax+b\ge\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$对任意$x\in[0,+\infty)$成立的充要条件是

$(2b)^{-\frac{1}{2}}\le a\le 2(1-b)^{\frac{1}{2}}$.　　①

显然，存在 a、b 使①式成立的充要条件是：不等式$(2b)^{-\frac{1}{2}}\le 2(1-b)^{\frac{1}{2}}$.　②

有解、解不等式②得$\frac{2-\sqrt{2}}{4}\le b\le\frac{2+\sqrt{2}}{4}$.　　③

因此，③式即为 b 的取值范围，①式即为实数在 a 与 b 所满足的关系.…………12 分

（III）解法二：$0\le b\le 1, a>0$是不等式成立的必要条件，以下讨论设此条件成立.

$x^2+1\ge ax+b,即x^2-ax+(1-b)\ge 0$对任意$x\in[0,+\infty)$成立的充要条件是

$a\le 2(1-b)^{\frac{1}{2}}$.………………………………………………………………8 分

令$\phi(x)=ax+b-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$，于是$ax+b\ge\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$对任意$x\in[0,+\infty)$成立的充要条件是

$\phi(x)\ge 0.$ 由$\phi'(x)=a-x^{-\frac{1}{3}}=0得x=a^{-3}$.

当$0<x<a^{-3}$时$\phi'(x)<0;$当$x>a^{-3}$时，$\phi'(x)>0$，所以，当$x=a^{-3}$时，$\phi(x)$取最小值.因此$\phi(x)\ge 0$

成立的充要条件是$\phi(a^{-3})\ge 0$，即$a\ge(2b)^{-\frac{1}{2}}$.………………10 分

综上，不等式$x^2+1\ge ax+b\ge\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$对任意$x\in[0,+\infty)$成立的充要条件是

$(2b)^{-\frac{1}{2}}\le a\le 2(1-b)^{\frac{1}{2}}$.　　①

显然，存在 a、b 使①式成立的充要条件是：不等式$(2b)^{-\frac{1}{2}}\le 2(1-b)^{\frac{1}{2}}$　②

有解、解不等式②得$\frac{2-\sqrt{2}}{4}\le b\le\frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

因此，③式即为 b 的取值范围，①式即为实数在 a 与 b 所满足的关系.…………12 分