2006年普通高等学校招生全国统一考试试卷
文科数学试题及答案（安徽卷）

参考公式：

如果时间A、B互斥，那么 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果时间A、B相互独立，那么 $P(A\bullet B)=P(A)\bullet P(B)$

如果事件A在一次试验中发生的概率是P，那么n次独立重复试验中恰好发生k次的概率 $P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$

球的表面积公式 $S=4\pi R^2$，其中R表示球的半径

球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$，其中R表示球的半径

第Ⅰ卷（选择题　共60分）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，集合 $S=\{1,3,5\}$，$T=\{3,6\}$，则 $C_U(S\cup T)$ 等于（　　）

A．$\varnothing$　　B．$\{2,4,7,8\}$　　C．$\{1,3,5,6\}$　　D．$\{2,4,6,8\}$

解：$S\cup T=\{1,3,5,6\}$，则 $C_U(S\cup T)=\{2,4,7,8\}$，故选B

（2）不等式 $\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$ 的解集是（　　）

A．$(-\infty,2)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(0,2)$　　D．$(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

解：由 $\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$ 得：$\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{2-x}{2x}<0$，即 $x(2-x)<0$，故选D。

（3）函数 $y=e^{x+1}(x\in R)$ 的反函数是（　　）

A．$y=1+\ln x(x>0)$　B．$y=1-\ln x(x>0)$

C．$y=-1-\ln x(x>0)$　　D．$y=-1+\ln x(x>0)$

解：由 $y=e^{x+1}$ 得：$x+1=\ln y$，即x=-1+lny，所以 $y=-1+\ln x(x>0)$ 为所求，故选D。

（4）“$x>3$”是 $x^2>4$“的（　　）

A．必要不充分条件　　B．充分不必要条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

解：条件集是结论集的子集，所以选B。

（5）若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点与椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点重合，则 p 的值为（　　）

A．-2　　B．2　　C．-4　　D．4

解：椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ 的右焦点为(2,0)，所以抛物线 $y^2=2px$ 的焦点为(2,0)，则 $p=4$，故选D。

（6）表面积为 $2\sqrt{3}$ 的正八面体的各个顶点都在同一个球面上，则此球的体积为

A．$\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$　　B．$\frac{1}{3}\pi$　　C．$\frac{2}{3}\pi$　　D．$\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$

解：此正八面体是每个面的边长均为 a 的正三角形，所以由 $8\times\frac{\sqrt{3}a^2}{4}=2\sqrt{3}$ 知，$a=1$，

则此球的直径为$\sqrt{2}$，故选 A。

（7）直线$x+y=1$与圆$x^2+y^2-2ay=0(a>0)$没有公共点，则a的取值范围是

A．$(0,\sqrt{2}-1)$　B．$(\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1)$　C．$(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1)$　D．$(0,\sqrt{2}+1)$

解：由圆$x^2+y^2-2ay=0(a>0)$的圆心$(0,a)$到直线$x+y=1$大于a，且$a>0$，选 A。

（8）对于函数$f\left(x\right)=\dfrac{\sin x+1}{\sin x}(0<x<\pi)$，下列结论正确的是（　　）

A．有最大值而无最小值　B．有最小值而无最大值

C．有最大值且有最小值　D．既无最大值又无最小值

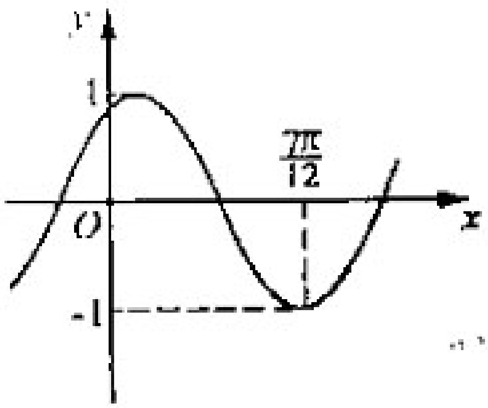
解：令$t=\sin x,t\in(0,1]$，则函数$f\left(x\right)=\dfrac{\sin x+1}{\sin x}(0<x<\pi)$的值域为函数$y=1+\dfrac{1}{t},t\in(0,1]$的值域，而$y=1+\dfrac{1}{t},t\in(0,1]$是一个减函减，故选 B。

（9）将函数$y=\sin\omega x(\omega>0)$的图象按向量$\vec{a}=\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$平移，平移后的图象如图所示，则平移后的图象所对应函数的解析式是（　　）

A．$y=\sin(x+\dfrac{\pi}{6})$　B．$y=\sin(x-\dfrac{\pi}{6})$

C．$y=\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$

D．$y=\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$



第（6）题图

解：将函数$y=\sin\omega x(\omega>0)$的图象按向量$\vec{a}=\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$平移，平移后的图象所对应的解析式为$y=\sin\omega(x+\dfrac{\pi}{6})$，由图象知，$\omega(\dfrac{7\pi}{12}+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{3\pi}{2}$，所以$\omega=2$，因此选 C。

（10）如果实数 x、y 满足条件$\begin{cases}x-y+1\geq0\\ y+1\geq0\\ x+y+1\leq0\end{cases}$，那么$2x-y$的最大值为（　　）

A．2　　B．1　　C．-2　　D．-3

解：当直线$2x-y=t$过点(0，-1)时，t最大，故选 B。

（11）如果$\Delta A_1B_1C_1$的三个内角的余弦值分别等于$\Delta A_2B_2C_2$的三个内角的正弦值，则（　　）

A．$\Delta A_1B_1C_1$和$\Delta A_2B_2C_2$都是锐角三角形　B．$\Delta A_1B_1C_1$和$\Delta A_2B_2C_2$都是钝角三角形

C．$\Delta A_1B_1C_1$是钝角三角形，$\Delta A_2B_2C_2$是锐角三角形

D．$\Delta A_1B_1C_1$是锐角三角形，$\Delta A_2B_2C_2$是钝角三角形

解：$\Delta A_1B_1C_1$的三个内角的余弦值均大于 0，则$\Delta A_1B_1C_1$是锐角三角形，若$\Delta A_2B_2C_2$是

锐角三角形，由 $\begin{cases}\sin A_2=\cos A_1=\sin(\frac{\pi}{2}-A_1)\\ \sin B_2=\cos B_1=\sin(\frac{\pi}{2}-B_1)\\ \sin C_2=\cos C_1=\sin(\frac{\pi}{2}-C_1)\end{cases}$，得 $\begin{cases}A_2=\frac{\pi}{2}-A_1\\ B_2=\frac{\pi}{2}-B_1\\ C_2=\frac{\pi}{2}-C_1\end{cases}$，那么，$A_2+B_2+C_2=\frac{\pi}{2}$，

所以 $\Delta A_2B_2C_2$ 是钝角三角形。故选 D。

（12）在正方体上任选 3 个顶点连成三角形，则所得的三角形是直角非等腰三角形的概率为（　　）

A. $\frac{1}{7}$　　B. $\frac{2}{7}$　　C. $\frac{3}{7}$　　D. $\frac{4}{7}$

解：在正方体上任选 3 个顶点连成三角形可得 C_8^3 个三角形，要得直角非等腰三角形，则每个顶点上可得三个(即正方体的一边与过此点的一条面对角线)，共有 24 个，得 $\frac{24}{C_8^3}$，所以选 C。

2006 年普通高等学校招生全国统一考试
文科数学（安徽卷）

第 II 卷（非选择题　共 90 分）

注意事项：

请用 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答，在试题卷上书写作答无效。

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填写在答题卡的相应位置。

（13）设常数 $a>0$，$\left(ax^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$ 展开式中 x^3 的系数为 $\frac{3}{2}$，则 $a=$_____。

解：$T_{r+1}=C_4^r a^{4-r}x^{8-2r}x^{-\frac{1}{2}r}$，由 $x^{8-2r}x^{-\frac{1}{2}r}=x^3$, 得 $r=2$, 由 $C_4^r a^{4-r}=\frac{3}{2}$ 知a=$\frac{1}{2}$。

（14）在 ▱$ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$，M 为 BC 的中点，则 $\overrightarrow{MN}=$_______。（用 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 表示）

解：由 $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NC}$ 得 $4\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AC}=3(\vec{a}+\vec{b})$，$\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$，所以

$\overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b})=-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$。

（15）函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足条件 $f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$，若 $f(1)=-5$, 则 $f(f(5))=$__________。

解：由 $f(x+2)=\frac{1}{f(x)}$ 得 $f(x+4)=\frac{1}{f(x+2)}=f(x)$，所以 $f(5)=f(1)=-5$，则 $f(f(5))=f(-5)=f(-1)=\frac{1}{f(-1+2)}=-\frac{1}{5}$。

（16）平行四边形的一个顶点 A 在平面 α 内，其余顶点在 α 的同侧，已知其中有两个顶点到 α 的距离分别为 1 和 2，那么剩下的一个顶点到平面 α 的距离可能是：

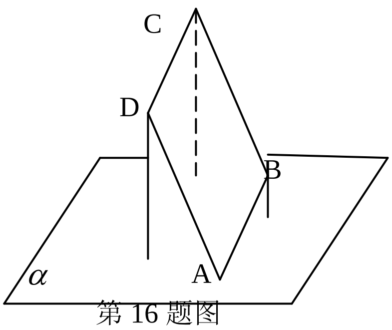
①1；　　②2；　　③3；　　④4；

以上结论正确的为______________。（写出所有正确结论的编号）

解：如图，B、D 到平面α的距离为 1、2，则 D、B 的中点到平面α的距离为$\dfrac{3}{2}$，所以 C 到平面α的距离为 3；

B、C 到平面α的距离为 1、2，D 到平面α的距离为x，则$x+1=2或x+2=1$，即$x=1$，所以 D 到平面α的距离为 1；

C、D 到平面α的距离为 1、2，同理可得 B 到平面α的距离为 1；所以选①③。



第 16 题图

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

（17）（本大题满分 12 分）已知$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$

（Ⅰ）求$\dfrac{\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha+\cos 2\alpha}$的值；

（Ⅱ）求$\tan(\alpha-\dfrac{5\pi}{4})$的值。

解：（Ⅰ）由$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$，得$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，所以$\dfrac{\sin^2\alpha+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha+\cos 2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{3\cos^2\alpha-1}=20$。

（Ⅱ）$\because\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{4}{3}$，$\therefore\tan(\alpha-\dfrac{5\pi}{4})=\dfrac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\dfrac{1}{7}$。

（18）（本大题满分 12 分）在添加剂的搭配使用中，为了找到最佳的搭配方案，需要对各种不同的搭配方式作比较。在试制某种牙膏新品种时，需要选用两种不同的添加剂。现有芳香度分别为 0，1，2，3，4，5 的六种添加剂可供选用。根据试验设计原理，通常首先要随机选取两种不同的添加剂进行搭配试验。

（Ⅰ）求所选用的两种不同的添加剂的芳香度之和等于 4 的概率；

（Ⅱ）求所选用的两种不同的添加剂的芳香度之和不小于 3 的概率；

解：设“所选用的两种不同的添加剂的芳香度之和等于 4”的事件为 A，“所选用的两种不同的添加剂的芳香度之和不小于 3”的事件为 B

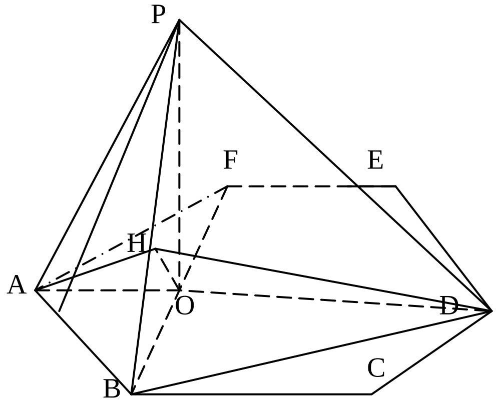
（Ⅰ）芳香度之和等于 4 的取法有 2 种：$(0,4)$、$(1,3)$，故$P(A)=\dfrac{2}{15}$。

（Ⅱ）芳香度之和等于 1 的取法有 1 种：$(0,1)$；芳香度之和等于 2 的取法有 1 种：$(0,2)$，故$P(B)=1-(\dfrac{1}{C_6^2}+\dfrac{1}{C_6^2})=\dfrac{13}{15}$。

（19）（本大题满分 12 分）如图，P 是边长为 1 的正六边形 ABCDEF 所在平面外一点，$PA=1$，P 在平面 ABC 内的射影为 BF 的中点 O。

（Ⅰ）证明$PA\perp BF$；

（Ⅱ）求面APB与面DPB所成二面角的大小。



第 19 题图

解：（Ⅰ）在正六边形 ABCDEF 中，$\triangle ABF$为等腰三角形，

∵P 在平面 ABC 内的射影为 O，∴PO⊥平面 ABF，∴AO 为 PA 在平面 ABF 内的射影；∵O 为 BF 中点，∴AO⊥BF，∴PA⊥BF。

（Ⅱ）∵PO⊥平面 ABF，∴平面 PBF⊥平面 ABC；而 O 为 BF 中点，ABCDEF 是正六边形，∴A、O、D 共线，且直线 AD⊥BF，则 AD⊥平面 PBF；又∵正六边形 ABCDEF 的边长为 1，∴ $AO=\frac{1}{2}$，$DO=\frac{3}{2}$，$BO=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

过 O 在平面 POB 内作 OH⊥PB 于 H，连 AH、DH，则 AH⊥PB，DH⊥PB，所以 $\angle AHD$ 为所求二面角平面角。

在 $\triangle AHO$ 中，OH=$\frac{\sqrt{6}}{4}$，$\tan\angle AHO=\frac{AO}{OH}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$。

在 $\triangle DHO$ 中，$\tan\angle DHO=\frac{DO}{OH}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{4}}=\sqrt{6}$；

而 $\tan\angle AHD=\tan(\angle AHO+\angle DHO)=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}+\sqrt{6}}{1-\frac{\sqrt{6}}{3}\times\sqrt{6}}=-\frac{4\sqrt{6}}{3}$

（Ⅱ）以 O 为坐标原点，建立空间直角坐标系，P(0,0，1)，A(0，$-\frac{1}{2}$,0)，B($\frac{\sqrt{3}}{2}$，0,0)，D(0,2，0)，∴ $\overrightarrow{PA}=(0,-\frac{1}{2},-1)$，$\overrightarrow{PB}=(\frac{\sqrt{3}}{2},0,-1)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-1)$

设平面 PAB 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,1)$，则 $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{PB}$，得 $\begin{cases}-\frac{1}{2}y_1-1=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1-1=0\end{cases}$，

$\overrightarrow{n_1}=(\frac{2\sqrt{3}}{3},-2,1)$；

设平面 PDB 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,1)$，则 $\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{PD}$，$\overrightarrow{n_2}\perp\overrightarrow{PB}$，得 $\begin{cases}2y_2-1=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_2-1=0\end{cases}$，

$\overrightarrow{n_2}=(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{1}{2},1)$；

$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=$

（20）（本大题满分 12 分）设函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx(x\in R)$，已知 $g(x)=f(x)-f'(x)$ 是奇函数。

（Ⅰ）求 b、c 的值。

（Ⅱ）求 $g(x)$ 的单调区间与极值。

证明（Ⅰ）∵ $f(x)=x^3+bx^2+cx$，∴ $f'(x)=3x^2+2bx+c$。从而

$g(x)=f(x)-f'(x)=x^3+bx^2+cx-(3x^2+2bx+c)=x^3+(b-3)x^2+(c-2b)x-c$ 是一个奇函数，所以 $g(0)=0$ 得 $c=0$，由奇函数定义得 $b=3$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $g(x)=x^3-6x$，从而 $g'(x)=3x^2-6$，由此可知，

$(-\infty,-\sqrt{2})$ 和 $(\sqrt{2},+\infty)$ 是函数 $g(x)$ 是单调递增区间；

$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 是函数 $g(x)$ 是单调递减区间；

$g(x)$ 在 $x=-\sqrt{2}$ 时，取得极大值，极大值为 $4\sqrt{2}$，$g(x)$ 在 $x=\sqrt{2}$ 时，取得极小值，极小值为 $-4\sqrt{2}$。

（21）（本大题满分 12 分）在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，前 n 项和 S_n 满足条件 $\dfrac{S_{2n}}{S_n}=\dfrac{4n+2}{n+1},n=1,2,\cdots$，

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）记 $b_n=a_np^{a_n}(p>0)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n。

解：（Ⅰ）设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $\dfrac{S_{2n}}{S_n}=\dfrac{4n+2}{n+1}$ 得：$\dfrac{a_1+a_2}{a_1}=3$，所以 $a_2=2$，

即 $d=a_2-a_1=1$，又 $\dfrac{4n+2}{n+1}=\dfrac{S_{2n}}{S_n}=\dfrac{\frac{a_n+nd+a_1}{2}\times 2n}{\frac{a_n+a_1}{2}\times n}=\dfrac{2(a_n+nd+a_1)}{a_n+a_1}=\dfrac{2(a_n+n+1)}{a_n+1}$，

所以 $a_n=n$。

（Ⅱ）由 $b_n=a_np^{a_n}$，得 $b_n=np^n$。所以 $T_n=p+2p^2+3p^3+\cdots+(n-1)p^{n-1}+np^n$，

当 $p=1$ 时，$T_n=\dfrac{n+1}{2}$；

当 $p\neq 1$ 时，

$pT_n=p^2+2p^3+3p^4+\cdots+(n-1)p^n+np^{n+1}$，

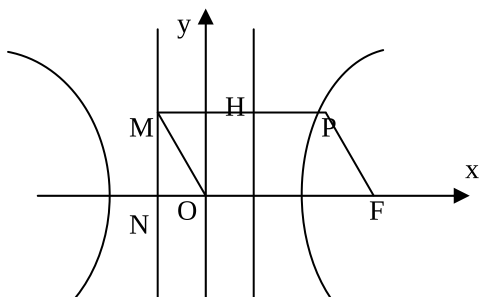
$(1-P)T_n=p+p^2+p^3+\cdots+p^{n-1}+p^n-np^{n+1}=\dfrac{p(1-p^n)}{1-p}-np^{n+1}$

即 $T_n=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2}, & p=1\\ \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}-np^{n+1}, & p\neq 1\end{cases}$。

（22）（本大题满分 14 分）如图，F 为双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点。P 为双曲线 C 右支上一点，且位于 x 轴上方，M 为左准线上一点，O 为坐标原点。已知四边形 $OFPM$ 为平行四边形，$|PF|=\lambda|OF|$。

（Ⅰ）写出双曲线 C 的离心率 e 与 λ 的关系式；

（Ⅱ）当 $\lambda=1$ 时，经过焦点 F 且平行于 OP 的直线交双曲线于 A、B 点，若 $|AB|=12$，求此时的双曲线方程。



第 22 题图

解：∵四边形 $OFPM$ 是▱，∴ $|OF|=|PM|=c$，作双曲线的右准线交 PM 于 H，则 $|PM|=|PH|+2\dfrac{a^2}{c}$，又

$e=\frac{|PF|}{|PH|}=\frac{\lambda|OF|}{c-2\frac{a^2}{c}}=\frac{\lambda c}{c-2\frac{a^2}{c}}=\frac{\lambda c^2}{c^2-2a^2}=\frac{\lambda e^2}{e^2-2}$， $e^2-\lambda e-2=0$。

（Ⅱ）当 $\lambda=1$ 时，$e=2$，$c=2a$，$b^2=3a^2$，双曲线为 $\frac{x^2}{4a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$，设 P$(x_0,y_0)$，则 $x_0=|MP|-|ON|=c-\frac{a^2}{c}=\frac{3a}{2}$，$y_0=|MN|=\sqrt{|OM|^2-|ON|^2}=\frac{\sqrt{15}a}{2}$，所以直线 OP 的斜率为 $\frac{\sqrt{15}}{3}$，则直线 AB 的方程为 $y=\frac{\sqrt{15}}{3}(x-2a)$，代入到双曲线方程得：

$4x^2+20ax-29a^2=0$，

又 $|AB|=12$，由 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$ 得：

$12=\sqrt{1+\frac{5}{3}}\sqrt{25a^2-4\times\frac{29a^2}{4}}=12a$，解得 $a=1$，则 $b^2=3$，所以 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 为所求。