

2018 年北京市朝阳区高考一模试卷数学文

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知全集为实数集 \mathbb{R} ，集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x < 0\}$ ， $B = \{x \mid \log_2 x > 0\}$ ，则 $(\mathbb{C}_{\mathbb{R}}A) \cap B =$ ()

A. $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

B. $(0, 1]$

C. $[3, +\infty)$

D. \emptyset

解析： $A = \{x \mid x^2 - 3x < 0\} = \{x \mid x(x-3) < 0\} = \{x \mid 0 < x < 3\}$ ，

$B = \{x \mid \log_2 x > 0\} = \{x \mid \log_2 x > \log_2 1\} = \{x \mid x > 1\}$ ；

$\therefore \mathbb{C}_{\mathbb{R}}A = \{x \mid x \leq 0, \text{ 或 } x \geq 3\}$ ；

$\therefore (\mathbb{C}_{\mathbb{R}}A) \cap B = \{x \mid x \geq 3\} = [3, +\infty)$.

答案：C

2. 在复平面内，复数 $z = \frac{i}{1+i}$ 所对应的点位于 ()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

解析： \because 复数 $\frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ ， \therefore 复数对应的点的坐标是 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ，

\therefore 复数 $\frac{i}{1+i}$ 在复平面内对应的点位于第一象限.

答案：A

3. 已知平面向量 $\vec{a} = (x, 1)$ ， $\vec{b} = (2, x-1)$ ，且 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则实数 x 的值是 ()

A. -1

B. 1

C. 2

D. -1 或 2

解析：根据题意，向量 $\vec{a} = (x, 1)$ ， $\vec{b} = (2, x-1)$ ，

若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则有 $x(x-1) = 2$ ，

即 $x^2 - x - 2 = 0$ ，所以 $x = -1$ 或 $x = 2$.

答案：D

4. 已知直线 $m \perp$ 平面 α ，则“直线 $n \perp m$ ”是“ $n \parallel \alpha$ ”的()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

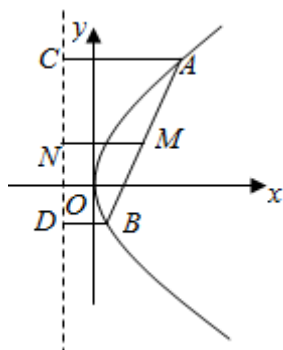
解析：当 $m \perp \alpha$ 时，若 $m \perp n$ ，则 $n \parallel \alpha$ 或 $n \subset$ 平面 α ，则充分性不成立，若 $n \parallel \alpha$ ，则 $m \perp n$ 成立，即必要性成立，则“ $m \perp n$ ”是“ $n \parallel \alpha$ ”的必要不充分条件.

答案：B

5. 已知 F 为抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点，过点 F 的直线 l 交抛物线 C 于 A, B 两点，若 $|AB|=8$ ，则线段 AB 的中点 M 到直线 $x+1=0$ 的距离为()

- A. 2
- B. 4
- C. 8
- D. 16

解析：如图，抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $F(1, 0)$ ，准线为 $x=-1$ ，即 $x+1=0$.



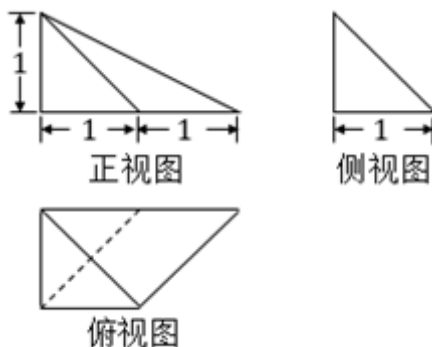
分别过 A, B 作准线的垂线，垂足为 C, D ，则有 $|AB|=|AF|+|BF|=|AC|+|BD|=8$.

过 AB 的中点 M 作准线的垂线，垂足为 N ，

则 MN 为直角梯形 $ABDC$ 中位线，则 $|MN|=\frac{1}{2}(|AC|+|BD|)=4$ ，即 M 到准线 $x=-1$ 的距离为 4.

答案：B

6. 某四棱锥的三视图如图所示，则该四棱锥的体积等于()



- A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{3}$

解析：扼点法：在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中扼点，

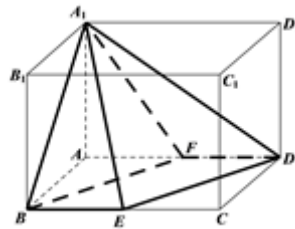
1) 由正视图可知： C_1D_1 上没有点；

2) 由侧视图可知： B_1C_1 上没有点；

3) 由俯视图可知： CC_1 上没有点；

4) 由正(俯)视图可知： D, E 处有点，由虚线可知 B, F 处有点， A 点排除。

由上述可还原出四棱锥 A_1-BEDF ，如图所示， $S_{\text{四边形}BEDF}=1 \times 1=1$ ， $V_{A_1-BEDF} = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}$ 。



答案：D

7. 函数 $f(x) = \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x^2 + 1} - \frac{1}{2x}$ 的零点个数为()

A. 0

B. 1

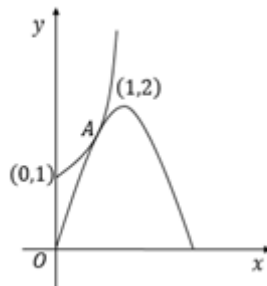
C. 2

D. 4

解析： $f(x) = \frac{2x \sin \frac{\pi}{2} x - x^2 - 1}{2x(x^2 + 1)}$ ，定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，

令 $f(x)=0$ 可得 $2x \sin \frac{\pi}{2} x = x^2 + 1$ ，设 $f_1(x) = 2x \sin \frac{\pi}{2} x$ ， $f_2(x) = x^2 + 1$ ，

画出 $f_1(x)$ ， $f_2(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的大致图象如下：



显然 $f_1(1)=f_2(1)=2$ ，即 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 交于点 $A(1, 2)$ ，

又 $\because f'_1(x)=\pi x \cdot \cos \frac{\pi}{2}x + 2\sin \frac{\pi}{2}x$ ， $f'_2(x)=2x$ ，

$\therefore f'_1(1)=f'_2(1)=2$ ，即点 A 为公切点， \therefore 点 A 为 $(0, +\infty)$ 内唯一交点，

又 $\because f_1(x)$ ， $f_2(x)$ 均为偶函数， \therefore 点 $B(-1, 2)$ 也为公切点，

$\therefore f_1(x)$ ， $f_2(x)$ 有两个公共点，即 $f(x)$ 有两个零点。

答案：C

8. 某学校举办科技节活动，有甲、乙、丙、丁四个团队参加“智能机器人”项目比赛，该项目只设置一个一等奖。在评奖揭晓前，小张、小王、小李、小赵四位同学对这四个参赛团队获奖结果预测如下：

小张说：“甲或乙团队获得一等奖”；

小王说：“丁团队获得一等奖”；

小李说：“乙、丙两个团队均未获得一等奖”；

小赵说：“甲团队获得一等奖”。

若这四位同学中只有两位预测结果是对的，则获得一等奖的团队是()

A. 甲

B. 乙

C. 丙

D. 丁

解析：(1)若甲获得一等奖，则小张、小李、小赵的预测都正确，与题意不符；

(2)若乙获得一等奖，则只有小张的预测正确，与题意不符；

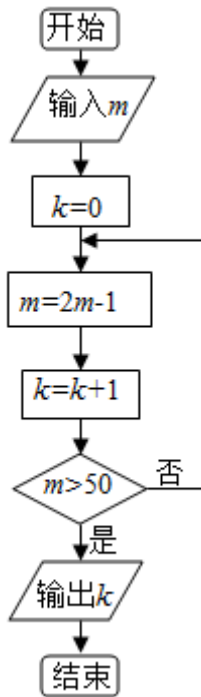
(3)若丙获得一等奖，则四人的预测都错误，与题意不符；

(4)若丁获得一等奖，则小王、小李的预测正确，小张、小赵的预测错误，符合题意。

答案：D

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分

9. 执行如图所示的程序框图，若输入 $m=5$ ，则输出 k 的值为_____。



解析：模拟程序的运行，可得：

	m	k
初始	5	0
第一次	9	1
第二次	17	2
第三次	33	3
第四次	65	4

第四次时， $65 > 50$ ，满足判断框内的条件，退出循环，输出 k 的值为 4.

答案：4

10. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的焦距为_____；渐近线方程为_____.

解析：由题知， $a^2=4$ ， $b^2=1$ ，故 $c^2=a^2+b^2=5$ ， \therefore 双曲线的焦距为： $2c=2\sqrt{5}$ ，

渐近线方程为： $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{1}{2}x$.

答案： $2\sqrt{5}$ ； $y = \pm \frac{1}{2}x$

11. 已知圆 $C: x^2+y^2-2x-4y+1=0$ 内有一点 $P(2, 1)$, 经过点 P 的直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, 当弦 AB 恰被点 P 平时, 直线 l 的方程为_____.

解析: 根据直线与圆的位置关系. 圆 $C: (x-1)^2+(y-2)^2=4$,

弦 AB 被 P 平分, 故 $PC \perp AB$,

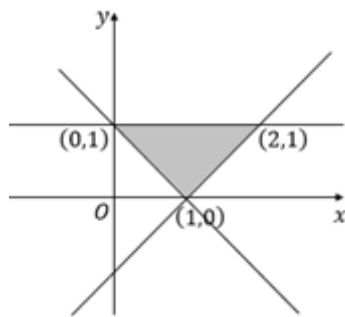
由 $P(2, 1), C(1, 2)$, 得 $k_{pc} \cdot k_l = -1$, 即: $k_l = 1$, 所以直线方程为 $y = x - 1$.

答案: $y = x - 1$

12. 已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x + y - 1 \geq 0, \\ x - y - 1 \leq 0, \\ y \leq 1, \end{cases}$ 若 $z = mx + y (m > 0)$ 取得最小值的最优解有无数多个, 则

m 的值为_____.

解析: 作出不等式组对应的平面区域如图: (阴影部分).



由 $z = mx + y (m > 0)$ 得 $y = -mx + z$,

$\because m > 0, \therefore$ 目标函数的斜率 $k = -m < 0$.

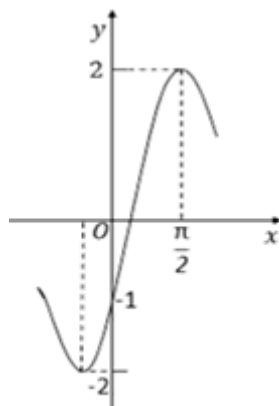
平移直线 $y = -mx + z$,

由图象可知当直线 $y = -mx + z$ 和直线 $x + y + 1 = 0$ 平行时, 此时目标函数取得最小值时最优解有无数多个, $\therefore m = 1$.

答案: 1

13. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示, 则 $\varphi =$ _____;

$\omega =$ _____.



解析：由图可知， $A=2$ ，根据 $f(x)$ 的图象经过点 $(0, -1)$ ，可得 $2\sin\varphi = -1$ ， $\sin\varphi = -\frac{1}{2}$ ， \therefore

$$\varphi = -\frac{\pi}{6}.$$

根据五点法作图可得 $\omega \times \frac{\pi}{2} + (-\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{2}$ ， $\therefore \omega = \frac{4}{3}$.

答案： $-\frac{\pi}{6}; \frac{4}{3}$

14. 许多建筑物的地板是用正多边形的砖板铺成的(可以是多种正多边形). 如果要求用这些正多边形的砖板铺满地面, 在地面某一点(不在边界上)有 k 块砖板拼在一起, 则 k 的所有可能取值为_____.

解析：由题意知只需这 k 块砖板的角度之和为 360° 即可.

显然 $k \geq 3$ ，因为任意正多边形内角小于 180° ；

且 $k \leq 6$ ，因为角度最小的正多边形为正三角形， $\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$.

当 $k=3$ 时，3 个正六边形满足题意；

当 $k=4$ 时，4 个正方形满足题意；

当 $k=5$ 时，3 个正三角形与 2 个正方形满足题意；

当 $k=6$ 时，6 个正三角形满足题意.

综上，所以 k 可能为 3, 4, 5, 6.

答案：3, 4, 5, 6

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_n = 2a_n - 1 (n \in \mathbb{N}^*)$.

(I) 求 a_1, a_2, a_3 的值；

(II) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 2, b_{n+1} = a_n + b_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

解析：(I) 直接利用递推关系式求出数列的项.

(II) 利用递推关系式求出数列的通项公式，进一步求出数列的和.

答案：(I) 由题知 $S_1 = a_1 = 2a_1 - 1$ ，得 $a_1 = 1$ ， $S_2 = 2a_2 - 1 = a_1 + a_2$ ，

得 $a_2 = a_1 + 1 = 2$ ， $S_3 = 2a_3 - 1 = a_1 + a_2 + a_3$ ，得 $a_3 = a_1 + a_2 + 1 = 4$ ，

(II) 当 $n \geq 2$ 时， $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 1$ ， $S_n = 2a_n - 1$ ，

所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 1 - (2a_{n-1} - 1)$ ，得 $a_n = 2a_n - 2a_{n-1}$ ，即 $a_n = 2a_{n-1}$ ，

$\{a_n\}$ 是以 $a_1 = 1$ 为首项，2 为公比的等比数列，则 $a_n = 2^{n-1}$.

当 $n \geq 2$ 时， $b_n = b_1 + (b_2 - b_1) + \dots + (b_n - b_{n-1}) = 2 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = 2 + \frac{a_1(1 - 2^{n-1})}{1 - 2} = 2^{n-1} + 1$ ，

经验证： $b_1 = 2 = 2^{1-1} + 1$ ，综上： $b_n = 2^{n-1} + 1$.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $b = 2a \cos A$.

(I) 若 $ac = 5$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积；

(II)若 B 为锐角, 求 $\sin C$ 的值.

解析: (I)根据题意, 由正弦定理分析可得 $\sin B=2\sin A\cos A$, 计算可得 $\sin B$ 的值, 由三角形面积公式计算可得答案;

(II)根据题意, $\sin C=\sin(\pi -A-B)=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$, 代入数据计算可得答案.

答案: (I)根据题意, 若 $b=2a\cos A$, 由正弦定理得 $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$, 则 $\sin B=2\sin A\cos A$, $\cos A=b2a >0$,

$$\text{因为 } \sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 所以 } \cos A=\frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 所以 } \sin B=2\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{4}{5},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{4}{5}=2.$$

(II)由(I)知 $\sin B=\frac{4}{5}$, 因为 B 为锐角, 所以 $\cos B=\frac{3}{5}$.

$$\text{所以 } \sin C=\sin(\pi -A-B)=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{11\sqrt{5}}{25}.$$

17. 某地区高考实行新方案, 规定: 语文、数学和英语是考生的必考科目, 考生还须从物理、化学、生物、历史、地理和政治六个科目中选取三个科目作为选考科目. 若一名学生从六个科目中选出了三个科目作为选考科目, 则称该学生的选考方案确定; 否则, 称该学生选考方案待确定. 例如, 学生甲选择“物理、化学和生物”三个选考科目, 则学生甲的选考方案确定, “物理、化学和生物”为其选考方案.

某学校为了了解高一年级 420 名学生选考科目的意向, 随机选取 30 名学生进行了一次调查, 统计选考科目人数如表:

性别	选考方案确定情况	物理	化学	生物	历史	地理	政治
男生	选考方案确定的有 6 人	6	6	3	1	2	0
	选考方案待确定的有 8 人	5	4	0	1	2	1
女生	选考方案确定的有 10 人	8	9	6	3	3	1
	选考方案待确定的有 6 人	5	4	0	0	1	1

(I)试估计该学校高一年级确定选考生物的学生有多少人?

(II)写出选考方案确定的男生中选择“物理、化学和地理”的人数.(直接写出结果)

(III)从选考方案确定的男生中任选 2 名, 试求出这 2 名学生选考科目完全相同的概率.

解析: (I)设该学校选考方案确定的学生中选考生物的学生为 x , 在选考方案确定的学生的人中, 求出选择生物的概率约为 $\frac{3}{10}$, 由此能求出选择生物的人数.

(II)由题意能求出选考方案确定的男生中选择“物理、化学和地理”的人数 2 人.

(III)设选择物理、生物、化学的学生分别为 A_1, A_2, A_3 , 选择物理、化学、历史的学生为 B_1 ,

选择物理、化学、地理的学生分别为 C_1, C_2 ，由此利用列举法能求出任取 2 名男生，这 2 名学生选考科目完全相同的概率。

答案：(I) 设该学校选考方案确定的学生中选考生物的学生为 x ，因为在选考方案确定的学生的人中，

选生物的频率为 $\frac{3+6}{8+6+10+6} = \frac{3}{10}$ ，所以选择生物的概率约为 $\frac{3}{10}$ ，

所以选择生物的人数约为 $x=420 \times \frac{3}{10} = 126$ 人。

(II) 2 人。

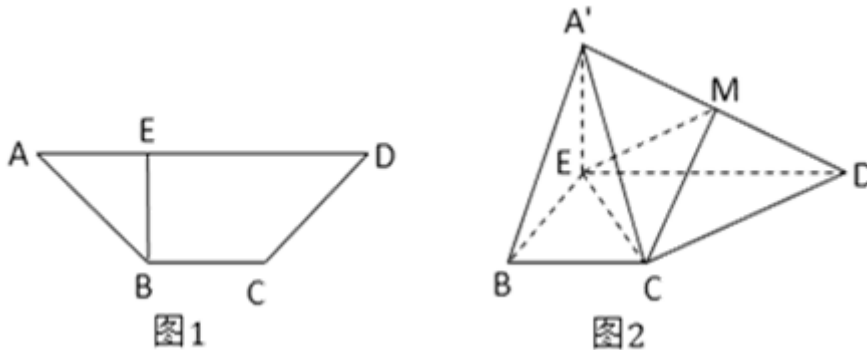
(III) 设选择物理、生物、化学的学生分别为 A_1, A_2, A_3 ，

选择物理、化学、历史的学生为 B_1 ，

选择物理、化学、地理的学生分别为 C_1, C_2 ，

所以任取 2 名男生的基本事件有： $(A_1, A_2), (A_2, A_3), (A_3, B_1), (B_1, C_1), (C_1, C_2), (A_1, A_3), (A_2, B_1), (A_3, C_2), (B_1, C_2), (A_1, B_1), (A_2, C_1), (A_3, C_1), (A_1, C_1), (A_2, C_2), (A_1, C_2)$ ，所以两名男生所学科目相同的基本事件共有四个，分别为 $(A_1, A_2), (A_2, A_3), (C_1, C_2), (A_1, A_3)$ ， \therefore 这 2 名学生选考科目完全相同的概率为 $p = \frac{4}{15}$ 。

18. 如图 1，在梯形 $ABCD$ 中， $BC \parallel AD$ ， $BC=1$ ， $AD=3$ ， $BE \perp AD$ 于 E ， $BE=AE=1$ 。将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折起至 $\triangle A'BE$ ，使得平面 $A'BE \perp$ 平面 $BCDE$ (如图 2)， M 为线段 $A'D$ 上一点。



(I) 求证： $A'E \perp CD$ ；

(II) 若 M 为线段 $A'D$ 中点，求多面体 $A'BCME$ 与多面体 $MCDE$ 的体积之比；

(III) 是否存在一点 M ，使得 $A'B \parallel$ 平面 MCE ？若存在，求 $A'M$ 的长。若不存在，请说明理由。

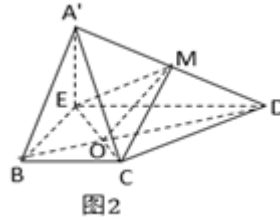
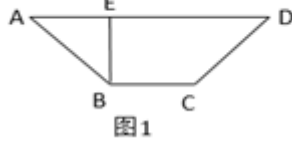
解析：(I) 推导出 $A'E \perp BE$ ，从而 $A'E \perp$ 平面 $BCDE$ ，由此能证明 $A'E \perp CD$ 。

(II) M 到底面 $BCDE$ 的距离为 $\frac{1}{2}A'E$ ，推导出 $V_{M-DCE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}A'E \cdot S_{\triangle DCE} = \frac{1}{6}$ ， $V_{A'-BCE} = \frac{1}{3} \cdot A'E \cdot S_{\triangle BCE} = \frac{1}{6}$ ，

$S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2}$ ， $S_{\triangle A'EM} = \frac{1}{2}$ ，平面 $A'DE \perp$ 平面 $BCDE$ ， C 到平面 $A'DE$ 的距离为 $BE=1$ 。从而 $V_{C-A'EM} = \frac{1}{3} \cdot BE \cdot S_{\triangle A'EM} = \frac{1}{6}$ ， $V_{\text{多面体 } A'BCME} = V_{\text{多面体 } CA'EM} + V_{\text{多面体 } A'BCE} = \frac{1}{3}$ 。由此能求出多面体 $A'BCME$ 与多面体 $MCDE$ 的体积之比。

(III) 连结 BD 交 CE 于 O ，连结 OM ，推导出 $A'B \parallel OM$ ，由此能求出存在一点 M ，使得 $A'B \parallel$ 平面 MCE ，并能求出 $A'M$ 的长。

答案：(I) 在梯形 $ABCD$ 中， $\because BE \perp AE$ ， $\therefore A'E \perp BE$ ，



\because 平面 $A'BE \perp$ 平面 $BCDE$, $BE =$ 平面 $A'BE \cap$ 平面 $BCDE$, $A'E \subset$ 平面 $A'BE$, $\therefore A'E \perp$ 平面 $BCDE$, $\because CD \subset$ 平面 $BCDE$, $\therefore A'E \perp CD$.

(II) $\because M$ 为 $A'D$ 中点, $\therefore M$ 到底面 $BCDE$ 的距离为 $\frac{1}{2} A'E$,

在梯形 $ABCD$ 中, $S_{\triangle DCE} = \frac{1}{2} DE \cdot BE = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$,

$$V_{M-DCE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} A'E \cdot S_{\triangle DCE} = \frac{1}{6}, \quad V_{A'-BCE} = \frac{1}{3} \cdot A'E \cdot S_{\triangle BCE} = \frac{1}{6}.$$

$\because A'E \perp DE$, \therefore 在 $Rt\triangle A'DE$ 中, $S_{\triangle A'EM} = \frac{1}{2}$,

$\because A'E \perp$ 平面 $BCDE$, $A'E \subset$ 平面 $A'DE$, \therefore 平面 $A'DE \perp$ 平面 $BCDE$,

$\because BE \perp ED$, 平面 $A'DE \cap$ 平面 $BCDE = ED$,

$\because BC \parallel AD$, $\therefore C$ 到平面 $A'DE$ 的距离为 $BE = 1$.

$$\therefore V_{C-A'EM} = \frac{1}{3} \cdot BE \cdot S_{\triangle A'EM} = \frac{1}{6}, \quad V_{\text{多面体 } A'BCME} = V_{\text{多面体 } CA'EM} + V_{\text{多面体 } A'BCE} = \frac{1}{3}.$$

$\therefore V_{\text{多面体 } A'BCME} : V_{\text{多面体 } MCDE} = 2 : 1$.

(III) 连结 BD 交 CE 于 O , 连结 OM ,

在四边形 $BCDE$ 中, $\because BC \parallel DE$, $\therefore \triangle BOC \sim \triangle DOE$, $\therefore \frac{OD}{BD} = \frac{2}{3}$,

$\because A'B \parallel$ 平面 CME , 平面 $A'BD \cap$ 平面 $CME = OM$, $\therefore A'B \parallel OM$,

在 $\triangle A'BD$ 中, $OM \parallel A'B$, $\therefore \frac{A'M}{A'D} = \frac{BO}{BD} = \frac{1}{3}$,

$\because A'E = 1, DE = 2, A'E \perp ED$, \therefore 在 $Rt\triangle A'ED$ 中, $A'D = \sqrt{5}$, $\therefore A'M = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且过点 $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 过椭圆 C 的左焦点的直线 l_1 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 直线 l_2 过坐标原点且直线 l_1 与 l_2 的斜率互为相反数, 直线 l_2 与椭圆交于 E, F 两点且均不与点 A, B 重合, 设直线 AE 的斜率为 k_1 , 直线 BF 的斜率为 k_2 , 证明: $k_1 + k_2$ 为定值.

解析：(I) 根据题意，由椭圆的几何性质可得

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{b^2} = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \quad \text{解可得 } a, b, c \text{ 的值, 代}$$

入椭圆的方程即可得答案;

(II) 根据题意，设 $l_1: y=k(x+1)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 联立直线 l_1 与椭圆的方程，可得 $(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$, 设 $l_2: y=-kx$, $E(x_3, y_3)$, $F(-x_3, -y_3)$, 联立直线 l_2 与椭圆的方程，可得 $(1+2k^2)x^2-2=0$, 结合 2 个方程，由根与系数的关系用 k 表示 k_1+k_2 , 即可得答案.

答案：(I) 由题可得

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{b^2} = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} a = 2, \\ b = 1, \\ c = 1. \end{cases} \text{ 所以椭圆 C 的方程为 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

(II) 由题知直线 l_1 斜率存在,

设 $l_1: y=k(x+1)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

联立 $\begin{cases} y = k(x+1), \\ x^2 + 2y^2 = 2, \end{cases}$ 消去 y 得 $(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$,

由题易知 $\Delta > 0$ 恒成立,

由韦达定理得 $x_1 + x_2 = -\frac{4k^2}{1+2k^2}$, $x_1x_2 = \frac{2k^2-2}{1+2k^2}$,

因为 l_2 与 l_1 斜率相反且过原点,

设 $l_2: y=-kx$, $E(x_3, y_3)$, $F(-x_3, -y_3)$,

联立 $\begin{cases} y = -kx, \\ x^2 + 2y^2 = 2, \end{cases}$ 消去 y 得 $(1+2k^2)x^2-2=0$,

由题易知 $\Delta > 0$ 恒成立, 由韦达定理得 $-x_3^2 = \frac{-2}{1+2k^2}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } k_1 + k_2 &= \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} + \frac{y_2 + y_3}{x_2 + x_3} = \frac{k(x_1+1) + kx_3}{x_1 - x_3} + \frac{k(x_2+1) - kx_3}{x_2 + x_3} \\ &= \frac{k \cdot (x_1 + x_3 + 1)(x_2 + x_3) + (x_2 - x_3 + 1)(x_1 - x_3)}{(x_1 - x_3)(x_2 + x_3)} \end{aligned}$$

$$= k \cdot \frac{2x_1x_2 + 2x_3^2 + x_1 + x_2}{(x_1 - x_3)(x_2 + x_3)} = \frac{k \cdot \frac{2(2k^2 - 2)}{1 + 2k^2} + \frac{2 \times 2}{1 + 2k^2} + \frac{-4k^2}{1 + 2k^2}}{(x_1 - x_3)(x_2 + x_3)} = 0,$$

所以 $k_1 + k_2$ 为定值 0.

20. 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x} - ax$ ($a \in \mathbb{R}$).

(I) 若 $a=0$, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 若 $a < -1$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(III) 若 $1 < a < 2$, 求证: $f(x) < -1$.

解析: (I) 根据题意, 由 a 的值求出函数的解析式, 计算可得切点的坐标, 结合函数导数的几何意义分析切线的斜率, 由直线的点斜式方程即可得答案;

(II) 根据题意, 由函数的解析式求出函数的导数, 则 $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2} - a = \frac{2 - ax^2 - \ln x}{x^2}$,

令 $g(x) = 2 - ax^2 - \ln x$, 求出 $g(x)$ 的导数, 分析 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 的最小值, 分析可得 $g(x) > 0$, 由函数的单调性与函数导数的关系, 分析可得答案;

(III) 根据题意, 原问题可以转化为 $ax^2 - x + 1 - \ln x > 0$, 设 $h(x) = ax^2 - x + 1 - \ln x$, 分析可得只须证 $h(x) > 0$ 成立, 求出函数 $h(x)$ 的导数, 结合函数的导数与函数单调性的关系, 分析可得 $h(x)$ 的最小值, 证明其最小值大于 0 即可得答案.

答案: (I) 函数 $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x} - ax$ ($a \in \mathbb{R}$),

若 $a=0$, $f(x) = \ln x - 1/x$, 则 $f(1) = -1$, 切点坐标为 $(1, -1)$,

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}, \quad f'(1) = 2, \quad \text{切线斜率 } k=2,$$

所以 $f(x)$ 在点 $(1, -1)$ 处的切线方程为 $2x - y - 3 = 0$.

(II) 根据题意, $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x} - ax$, 则 $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2} - a = \frac{2 - ax^2 - \ln x}{x^2}$, ($x > 0$)

令 $g(x) = 2 - ax^2 - \ln x$, 则 $g'(x) = \frac{-2ax^2 - 1}{x}$.

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = \pm \sqrt{-\frac{1}{2a}}$ (依题意 $-\frac{1}{2a} > 0$)

由 $g'(x) > 0$, 得 $x > \sqrt{-\frac{1}{2a}}$; 由 $g'(x) < 0$, 得 $0 < x < \sqrt{-\frac{1}{2a}}$.

所以, $g(x)$ 在区间 $(0, \sqrt{-\frac{1}{2a}})$ 上单调递减, 在区间 $(\sqrt{-\frac{1}{2a}}, +\infty)$ 上单调递增,

所以, $g(x)_{\min} = g\left(\sqrt{-\frac{1}{2a}}\right) = \frac{5}{2} - \ln\sqrt{-\frac{1}{2a}}$.

因为 $a < -1$, 所以 $0 < -\frac{1}{2a} < 12$, $\ln\sqrt{-\frac{1}{2a}} < 0$. 所以 $g(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

(III) 由 $x > 0$, $f(x) < -1$, 即 $\frac{\ln x - 1}{x} - ax < -1$, 等价于 $ax^2 - x + 1 - \ln x > 0$.

设 $h(x) = ax^2 - x + 1 - \ln x$, 只须证 $h(x) > 0$ 成立.

因为 $h'(x) = 2ax - 1 - \frac{1}{x} = \frac{2ax^2 - x - 1}{x}$, $1 < a < 2$,

由 $h'(x) = 0$, 得 $2ax^2 - x - 1 = 0$ 有异号两根.

令其正根为 x_0 , 则 $2ax_0^2 - x_0 - 1 = 0$.

在 $(0, x_0)$ 上 $h'(x) < 0$, 在 $(x_0, +\infty)$ 上 $h'(x) > 0$, 则 $h(x)$ 的最小值为 $h(x_0)$,

且 $h(x_0) = ax_0^2 - x_0 + 1 - \ln x_0 = \frac{1 + x_0}{2} - x_0 + 1 - \ln x_0 = \frac{3 - x_0}{2} - \ln x_0$,

又 $h'(1) = 2a - 2 > 0$, $h'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(a^2 - \frac{3}{2}\right) = a - 3 < 0$,

所以 $\frac{1}{2} < x_0 < 1$. 则 $\frac{3 - x_0}{2} > 0$, $-\ln x_0 > 0$.

因此 $\frac{3 - x_0}{2} - \ln x_0 > 0$, 即 $h(x_0) > 0$. 所以 $h(x) > 0$. 所以 $f(x) < -1$.