2018年宁夏银川一中高考一模数学文

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合A={-1，1，3}，B={1，a^2-2a}，B⊂A，则实数a的不同取值个数为(　)

A.2

B.3

C.4

D.5

解析：∵B⊂A，∴a^2-2a=-1或a^2-2a=3.

①由a^2-2a=-1得a^2-2a+1=0，解得a=1.

当a=1时，B={1，-1}，满足B⊂A.

②由a^2-2a=3得a^2-2a-3=0，解得a=-1或3，

当a=-1时，B={1，3}，满足B⊂A，

当a=3时，B={1，3}，满足B⊂A.

综上，若B⊂A，则a=±1或a=3.

答案：B

2.已知z是纯虚数，$\frac{z+2}{1-i}$是实数，那么z等于(　)

A.2i

B.i

C.-i

D.-2i

解析：由题意得z=ai.(a∈R且a≠0).

$\therefore \frac{z+2}{1-i}=\frac{(z+2)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2-a+(a+2)i}{2}$，

则a+2=0，∴a=-2.有z=-2i.

答案：D

3.已知函数$f(x)=\begin{cases}\log_2 x(x>0)\\ 3^x(x\le 0)\end{cases}$，则$f\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]$的值是(　)

A.9

B.$\frac{1}{9}$

C.$-\frac{1}{9}$

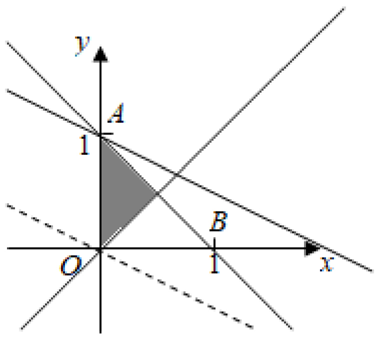
D.-9

解析：因为$\frac{1}{4}$＞0，所以$f\left[f\left(\frac{1}{4}\right)\right]=f\left(\log_2\frac{1}{4}\right)=f\left(\log_2 2^{-2}\right)=f(-2)=3^{-2}=\frac{1}{9}$.

答案：B

4.已知 x、y 满足约束条件$\begin{cases} x+y-1\le 0 \\ x-y\le 0 \\ x\ge 0 \end{cases}$ 则 z=x+2y 的最大值为(　)

A.-2
B.-1
C.1
D.2
解析：作出不等式组对应的平面区域，利用 z 的几何意义，即可得到结论.
作出不等式组对应的平面区域如图：



由 z=x+2y 得 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$，

平移直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$ 由图象可知当直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$ 经过点 A 时，直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z$ 的截距最大，

此时 z 最大，

由$\begin{cases} x=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$，即$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$，

即 A(0，1)，此时 z=0+2=2.
答案：D

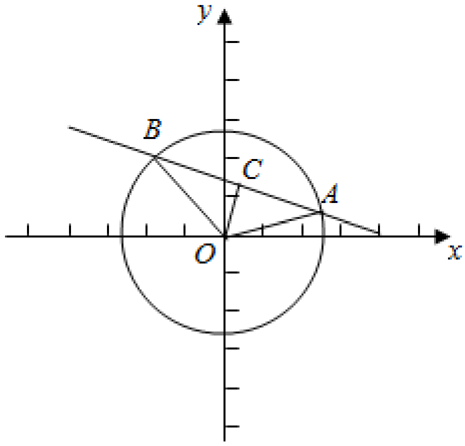
5.已知直线 ax+by+c=0 与圆 O:$x^2+y^2=1$ 相交于 A,B 两点,且|AB|=$\sqrt{3}$,则$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的值是(　)

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{3}{4}$

D.0
解析：取 AB 的中点 C，连接 OC，



$|AB|=\sqrt{3}$，则 $AC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$OA=1$，

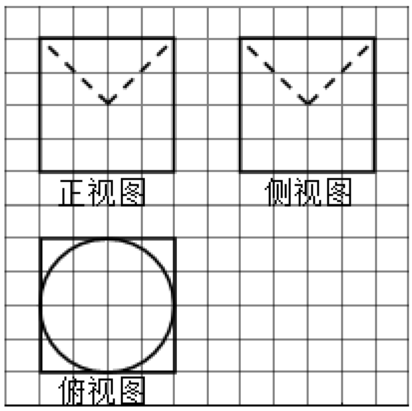
$$\therefore \sin\left(\frac{1}{2}\angle AOB\right)=\sin\angle AOC=\frac{AC}{OA}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore \angle AOB=120°$，

则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1\times1\times\cos120°=-\dfrac{1}{2}$.

答案：A

6.如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗线画出的是某几何体的三视图，则该几何体的表面积为(　)



A. 96

B. $80+4\sqrt{2}\pi$

C. $96+4(\sqrt{2}-1)\pi$

D. $96+4(2\sqrt{2}-1)\pi$

解析：由三视图可知几何体为边长为 4 的正方体挖去一个圆锥得到的，圆锥的底面半径为 2，高为 2，

$\therefore$圆锥的母线长为 $2\sqrt{2}$，

∴几何体的平面部分面积为 $6\times4^2-\pi\times2^2=96-4\pi$，

圆锥的侧面积为 $\pi\times2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}\pi$，

∴几何体的表面积为 $96-4\pi+4\sqrt{2}\pi$.

答案：C

7. 已知角φ 的终边经过点 P(-4，3)，函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$的图象的相邻两条对称轴之间的距离等于$\frac{\pi}{2}$，则 $f(\frac{\pi}{4})$的值为(　)

A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $-\frac{3}{5}$

D. $-\frac{4}{5}$

解析：由条件利用任意角的三角函数的定义求得 cosφ 和 sinφ 的值，再根据周期性求得ω的值，再利用诱导公式求得 $f(\frac{\pi}{4})$的值.

由于角φ 的终边经过点 P(-4，3)，可得 $\cos\varphi=-\frac{4}{5}$，$\sin\varphi=\frac{3}{5}$.

再根据函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$的图象的相邻两条对称轴之间的距离等于$\frac{\pi}{2}$，

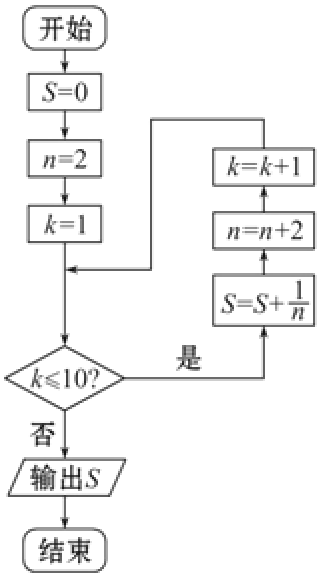
可得周期为$\frac{2\pi}{2}=2\times\frac{\pi}{2}$，求得ω=2，

∴$f(x)=\sin(2x+\varphi)$，

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\cos\varphi=-\frac{4}{5}.$$

答案：D

8. 已知程序框图如图所示，则该程序框图的功能是(　)



A. 求数列$\{\frac{1}{n}\}$的前 10 项和(n∈N*)

B. 求数列$\{\frac{1}{2n}\}$的前 10 项和(n∈N*)

C. 求数列$\{\frac{1}{n}\}$的前 11 项和(n∈N*)

D. 求数列$\{\frac{1}{2n}\}$的前 11 项和(n∈N*)

解析：经过分析本题为考查程序框图当型循环结构，按照循环体的特点先判断出数列，然后根据判断框的语句判断出计算的项数.

根据题意，

$s=s+\frac{1}{n}$，n=n+2

∴数列为$\{\frac{1}{2n}\}$

又∵K≤10

∴计算的是求数列$\{\frac{1}{2n}\}$的前 10 项和(n∈N*).

答案：B

9. 某单位安排甲、乙、丙三人在某月 1 日至 12 日值班，每人 4 天.

甲说：我在 1 日和 3 日都有值班；

乙说：我在 8 日和 9 日都有值班；

丙说：我们三人各自值班的日期之和相等. 据此可判断丙必定值班的日期是(　)

A. 2 日和 5 日

B. 5 日和 6 日

C. 6 日和 11 日

D. 2 日和 11 日

解析：由题意，1 至 12 的和为 78，

因为三人各自值班的日期之和相等，
所以三人各自值班的日期之和为 26，
根据甲说：我在 1 日和 3 日都有值班；乙说：我在 8 日和 9 日都有值班，可得甲在 1、3、10、12 日值班，乙在 8、9、2、7 或 8、9、4、5，
据此可判断丙必定值班的日期是 6 日和 11 日.
答案：C

10. 设函数 $f(x)=\ln(1+|x|)-\frac{1}{1+x^2}$，则使得 $f(x)>f(2x-1)$ 成立的 x 的取值范围是(　)

A. $(-\infty，\frac{1}{3})\cup(1，+\infty)$

B. $(\frac{1}{3}，1)$

C. $(-\frac{1}{3}，\frac{1}{3})$

D. $(-\infty，-\frac{1}{3}，)\cup(\frac{1}{3}，+\infty)$

解析：根据函数的奇偶性和单调性之间的关系，将不等式进行转化即可得到结论.

∵函数 $f(x)=\ln(1+|x|)-\frac{1}{1+x^2}$ 为偶函数，

且在 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\ln(1+x)-\frac{1}{1+x^2}$，

导数为 $f'(x)\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{(1+x2)^2}>0$，

即有函数 $f(x)$ 在 $[0，+\infty)$ 单调递增，
∴$f(x)>f(2x-1)$ 等价为 $f(|x|)>f(|2x-1|)$，
即 $|x|>|2x-1|$，
平方得 $3x^2-4x+1<0$，

解得：$\frac{1}{3}<x<1$，

所求 x 的取值范围是 $(\frac{1}{3}，1)$.

答案：B

11. 设 F_1，F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$，$b>0$) 的左、右两个焦点，若双曲线右支上存在一点 P，使 $(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2})\cdot\overrightarrow{F_2P}=0$ (0 为坐标原点)，且 $|PF_1|=\sqrt{3}|PF_2|$，则双曲线的离心率为(　)

A. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

B. $\sqrt{2}+1$

C. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

D. $\sqrt{3}$ +1

解析：取 PF_2 的中点 A，则 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2}=2\overrightarrow{OA}$，

∵ $\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF_2}\right)\cdot\overrightarrow{F_2P}=0$，

∴ $2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{F_2P}=0$，

∴ $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{F_2P}$，

∵O 是 F_1F_2 的中点

∴OA∥PF_1，

∴$PF_1\perp PF_2$，

∵$|PF_1|=\sqrt{3}|PF_2|$，

∴$2a=|PF_1|-|PF_2|=(\sqrt{3}-1)|PF_2|$，

∵$|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$，

∴$c=|PF_2|$，

∴ $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$.

答案：D

12.若函数 $f(x)=x^3-3x$ 在 $(a，6-a^2)$ 上有最小值，则实数 a 的取值范围是(　)

A. $(-\sqrt{5}，1)$

B. $[-\sqrt{5}，1)$

C. [-2，1)

D. (-2，1)

解析：根据题意求出函数的导数，因为函数 f(x)在区间 $(a，6-a^2)$ 上有最小值，所以 f′(x)先小于 0 然后再大于 0，所以结合二次函数的性质可得：$a<1<5-a^2$，进而求出正确的答案.

由题意可得：函数 $f(x)=x^3-3x$，

所以 $f'(x)=3x^2-3$.

令 $f'(x)=3x^2-3=0$ 可得，x=±1，

因为函数 f(x)在区间 $(a，6-a^2)$ 上有最小值，其最小值为 f(1)，

所以函数 f(x)在区间 $(a，6-a^2)$ 内先减再增，即 f′(x)先小于 0 然后再大于 0，

所以结合二次函数的性质可得：$a<1<6-a^2$，

且 $f(a)=a^3-3a\geq f(1)=-2$，且 $6-a^2-a>0$，

联立解得：$-2\leq a<1$.

答案：C

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13.曲线 $y=x^2+\frac{1}{x}$ 在点(1，2)处的切线方程为______.

解析：求出函数的导数，求出切线的斜率，利用点斜式求解切线方程即可.

曲线 $y=x^2+\frac{1}{x}$，可得 $y'=2x-\frac{1}{x^2}$，

切线的斜率为：k=2-1=1.

切线方程为：y-2=x-1，即：x-y+1=0.

答案：x-y+1=0

14.已知 P 是△ABC 所在平面内一点，$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PA}=0$，现将一粒黄豆随机撒在△ABC 内，则黄豆落在△PBC 内的概率是______.

解析：根据向量加法的平行四边形法则，结合共线向量充要条件，得点 P 是△ABC 边 BC 上的中线 AO 的中点.再根据几何概型公式，将△PBC 的面积与△ABC 的面积相除可得本题的答案.

以 PB、PC 为邻边作平行四边形 PBDC，则 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PD}$，

∵ $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+2\overrightarrow{PA}=0$，

∴ $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=-2\overrightarrow{PA}$，

得：$\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PA}$，

由此可得，P 是△ABC 边 BC 上的中线 AO 的中点，

点 P 到 BC 的距离等于 A 到 BC 的距离的 $\frac{1}{2}$，

∴$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$.

将一粒黄豆随机撒在△ABC 内，黄豆落在△PBC 内的概率为 $P=\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

15.对于数列{a_n}，定义数列{a_n+1-a_n}为数列{a_n}的“差数列”，若 $a_1=1$，{a_n}的“差数列”的通项公式为 $a_{n+1}-a_n=2n$，则数列{a_n}的前 n 项和 S_n=______.

解析：∵$a_{n+1}-a_n=2n$，

∴$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+(a_{n-2}-a_{n-3})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2+1$

$=\frac{1-2^{n}}{1-2}$

$=2^{n}-1$，

∴数列$\{a_n\}$的前 n 项和：

$S_n=(2+2^2+\cdots+2^n)-n$

$=\frac{2\left(1-2^{n}\right)}{1-2}-n$

$=2^{n+1}-n-2$.

答案：$2^{n+1}-n-2$

16.已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 F，过点 F 倾斜角为 60° 的直线 l 与抛物线 C 在第一、四象限分别交于 A、B 两点，则$\frac{|AF|}{|BF|}$的值等于______.

解析：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1^2=2px_1$，$y_2^2=2px_2$，

$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin 2\theta}=\frac{8}{3}p$，即有 $x_1+x_2=\frac{5}{3}p$，

由直线 l 倾斜角为 60°，

则直线 l 的方程为：$y-0=\sqrt{3}\left(x-\frac{p}{2}\right)$，

即 $y=\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{2}p$，联立抛物线方程，

消去 y 并整理，得

$12x^2-20px+3p^2=0$，

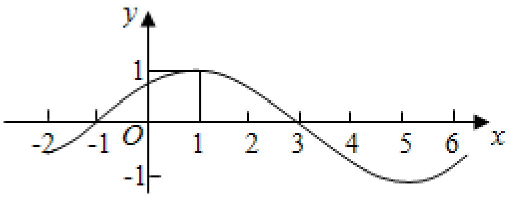
则 $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$，可得 $x_1=\frac{3}{2}p$，$x_2=\frac{1}{6}p$，

则 $\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{\frac{3}{2}p+\frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p+\frac{1}{6}p}=3$.

答案：3

三、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分.第 17~21 题为必考题，每小题 12 分，共 60 分；第 22、23 题为选考题，有 10 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17.已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in R$，(其中 $A>0$，$\omega>0$，$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$)，其部分图象如图所示.



(1)求函数 f(x)的解析式.

解析：(1)根据图象，可得函数的最小正周期 T=8，结合周期公式得ω$=\frac{\pi}{4}$.再根据 f(1)=1 是函数的最大值，列式可解出φ 的值，得到函数 f(x)的解析式.

答案：(1)由图可知，最小正周期 T=(3-1)×4=8，所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{4}$.

又∵当 x=1 时，f(x)有最大值为 1，

∴f(1)=sin($\frac{\pi}{4}$+φ)=1，得$\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，

∴取 k=0，得φ$=\frac{\pi}{4}$.

所以函数的解析式为$f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}x+\frac{\pi}{4}\right)$.

(2)已知横坐标分别为-1、1、5 的三点 M、N、P 都在函数 f(x)的图象上，求 sin∠MNP 的值.
解析：(2)由(1)的解析式，得出 M、N、P 三点的坐标，结合两点的距离公式得到 MN、PN、PM 的长，用余弦定理算出 cos∠MNP 的值，最后用同角三角函数平方关系，可得 sin∠MNP 的值.

答案：(2)∵f(-1)=0，f(1)=1 且$f(5)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\times 5+\frac{\pi}{4}\right)=-1$.

∴三点坐标分别为 M(-1，0)，N(1，1)，P(5，-1)，

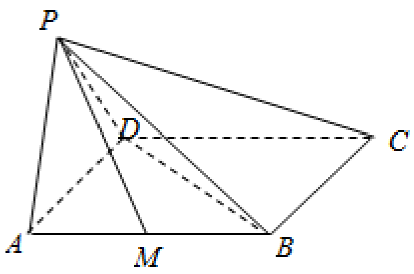
由两点的距离公式，得|MN|=$\sqrt{5}$，|PN|=2$\sqrt{5}$，|MP|=$\sqrt{37}$，

∴根据余弦定理，得$\cos\angle MNP=\frac{5+20-37}{2\times\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}}=-\frac{3}{5}$.

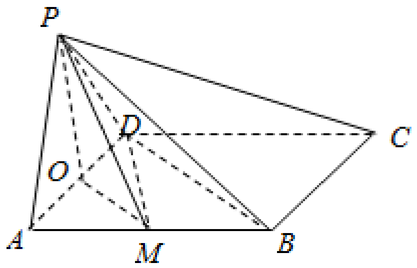
∵∠MNP∈(0，π)

∴sin∠MNP 是正数，得$\sin\angle MNP=\sqrt{1-\cos^2\angle MNP}=\frac{4}{5}$.

18.如图，四棱锥 P-ABCD 中，底面 ABCD 为平行四边形，∠DAB=60°，AB=2AD，M 为 AB 的中点，△PAD 为等边三角形，且平面 PAD⊥平面 ABCD.



(1)证明：PM⊥BC.
解析：(1)取 AD 中点 O，连接 PO，OM，DM，证明 BC⊥平面 POM，可得 PM⊥BC.
答案：(1)证明：取 AD 中点 O，连接 PO，OM，DM，



由已知得 PO⊥平面 ABCD，
∴PO⊥BC，
∵∠DAB=60°，AB=2AD，
∴△ADM 是正三角形，
∴OM⊥AD，OM∥BD，OM=$\frac{1}{2}$BD，
∴OM⊥BC
∵PO∩OM=O，
∴BC⊥平面 POM，
∵PM⊂平面 POM，
∴PM⊥BC.

(2)若 PD=1，求点 D 到平面 PAB 的距离.
解析：(2)若 PD=1，利用 $V_{P-ABD}=V_{D-PAB}$，可求点 D 到平面 PAB 的距离.
答案：(2)∵PD=1，∠DAB=60°，AB=2AD=2PD=2，
∴△ABD 是直角三角形，BD⊥AD，
∴BD=$\sqrt{3}$，

∵PO=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴$V_{P-ABO}=\frac{1}{3}S_{\vee ABD}gPO=\frac{1}{4}$，
设点 D 到平面 P 取 AB 的距离为 h，
由 BD⊥AD，BD⊥PO，
∴BD⊥平面 ABD，

∴BD⊥PD，
∴△PBD 是直角三角形，
∴PB=2，
在△PBD 中，PA=1，AB=PB=2，
∴△PBD 是等腰三角形，

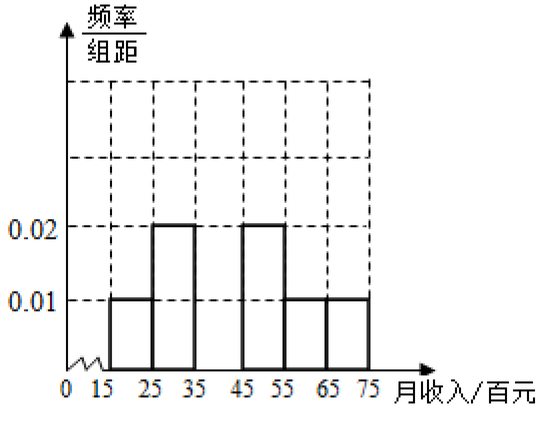
∴$S_{\triangle PAB}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

∴由 $V_{P-ABD}=V_{D-PAB}$，可得 $\dfrac{1}{3}g\dfrac{\sqrt{15}}{4}h=\dfrac{1}{4}$，

∴$h=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

∴点 D 到平面 PAB 的距离为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

19. 为了解某市民众对某项公共政策的态度，在该市随机抽取了 50 名市民进行调查，做出了他们的月收入(单位：百元，范围：[15，75])的频率分布直方图，同时得到他们月收入情况以及对该项政策赞成的人数统计表：

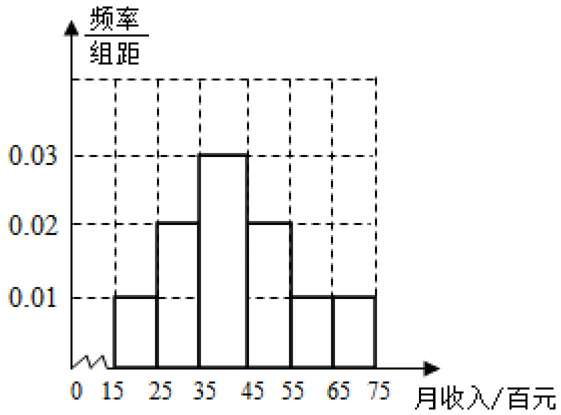


月收入	赞成人数
[15，25)	4
[25，35)	8
[35，45)	12
[45，55)	5
[55，65)	2
[65，75)	2

(1)求月收入在[35，45)内的频率，并补全这个频率分布直方图，并在图中标出相应纵坐标.

解析：(1)根据频率的定义，以及频率直方图的画法，补全即可.

答案：(1)$1-0.01\times10\times3-0.02\times10\times2=0.3$



(2)根据频率分布直方图估计这 50 人的平均月收入.

解析：(2)根据平均数的定义，求出平均数，并用样本估计总体即可.

答案：(2)$20\times0.1+30\times0.2+40\times0.3+50\times0.2+60\times0.1+70\times0.1=43$(百元)

即这 50 人的平均月收入估计为 4300 元.

(3)若从月收入(单位：百元)在[65，75]的被调查者中随机选取 2 人，求 2 人都不赞成的概率.

解析：(3)根据古典概型概率公式，分别列举出所有的基本事件，再找到满足条件的基本事件，计算即可.

答案：(3)[65，75]的人数为 5 人，其中 2 人赞成，3 人不赞成.

记赞成的人为 a，b，不赞成的人为 x，y，z

任取 2 人的情况分别是：ab，ax，ay，az，bx，by，bz，xy，xz，yz 共 10 种情况.

其中 2 人都不赞成的是：xy，yz，xz 共 3 种情况.

∴2 人都不赞成的概率是 $P=\frac{3}{10}$.

20.已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞b＞0)的离心率 e=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，连接椭圆的四个顶点得到的菱形的面积为 4.

(1)求椭圆的方程.

解析：(1)由离心率求得 a 和 c 的关系，进而根据 c2=a2-b2 求得 a 和 b 的关系，进而根据$\frac{1}{2}$×2a×2b=4 求得 a 和 b，则椭圆的方程可得.

答案：(1)由$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$，得 $3a^2=4c^2$.

再由 $c^2=a^2-b^2$，解得 a=2b.

由题意可知$\frac{1}{2}$×2a×2b=4，即 ab=2.

解方程组$\begin{cases} a=2b \\ ab=2 \end{cases}$，得$\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$.

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设直线 l 与椭圆相交于不同的两点 A，B，已知点 A 的坐标为(-a，0)，点 Q(0，y_0)在线段 AB 的垂直平分线上，且$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$，求 y_0的值.

解析：(2)由(1)可求得 A 点的坐标，设出点 B 的坐标和直线 l 的斜率，表示出直线 l 的方程与椭圆方程联立，消去 y，由韦达定理求得点 B 的横坐标的表达式，进而利用直线方程求得其纵坐标表达式，表示出|AB|进而求得 k，则直线的斜率可得.设线段 AB 的中点为 M，当 k=0 时点 B 的坐标是(2，0)，线段 AB 的垂直平分线为 y 轴，进而根据$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$求得 y_0；当 k≠0 时，可表示出线段 AB 的垂直平分线方程，令 x=0 得到 y_0的表达式根据$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$求得 y_0；综合答案可得.

答案：(2)由(Ⅰ)可知点 A 的坐标是(-2，0).

设点 B 的坐标为(x_1，y_1)，直线 l 的斜率为 k.

则直线 l 的方程为 y=k(x+2).

于是 A、B 两点的坐标满足方程组$\begin{cases} y=k(x+2) \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$，

消去 y 并整理，得$(1+4k^2)x^2+16k^2x+(16k^2-4)=0$，

由$-2x_1=\frac{16k^2-4}{1+4k^2}$，得$x_1=\frac{2-8k^2}{1+4k^2}$，从而$y_1=\frac{4k}{1+4k^2}$，

所以$\left|AB\right|=\left(-2-\dfrac{2-8k^2}{1+4k^2}\right)^2+\left(\dfrac{4k}{1+4k^2}\right)^2=\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$，

设线段 AB 的中点为 M，

则 M 的坐标为($-\dfrac{8k^2}{1+4k^2}$，$\dfrac{2k}{1+4k^2}$).

以下分两种情况：

①当 k=0 时，点 B 的坐标是(2，0)，

线段 AB 的垂直平分线为 y 轴，

于是$\overrightarrow{QA}$=(−2，$-y_0$)，$\overrightarrow{QB}$=(2，$-y_0$).

由$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$，得 $y_0=\pm2\sqrt{2}$.

②当 k≠0 时，线段 AB 的垂直平分线方程为$y-\dfrac{2k}{1+4k^2}=-\dfrac{1}{k}\left(x+\dfrac{8k^2}{1+4k^2}\right)$.

令 x=0，解得 $y_0=-\dfrac{6k}{1+4k^2}$.

由$\overrightarrow{QA}$=(−2，$-y_0$)，$\overrightarrow{QB}$=(x_1，y_1-y_0)，

得$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=-2x_1-y_0\left(y_1-y_0\right)=\dfrac{-2\left(2-8k^2\right)}{1+4k^2}+\dfrac{6k}{1+4k^2}\left(\dfrac{4k}{1+4k^2}+\dfrac{6k}{1+4k^2}\right)$

$=\dfrac{4\left(16k^4+15k^2-1\right)}{\left(1+4k^2\right)^2}=4$，

整理得 $7k^2=2$，故 $k=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{7}$，

所以 $y_0=\pm\dfrac{2\sqrt{14}}{5}$.

综上，$y_0=\pm2\sqrt{2}$ 或 $y_0=\pm\dfrac{2\sqrt{14}}{5}$.

21.已知函数 $f(x)=ax^3-x^2+bx$(a，b∈R，$f'(x)$为其导函数，且 x=3 时 f(x)有极小值-9.

(1)求 f(x)的单调递减区间.

解析：(1)先求出函数的导数，得到方程组，求出 a，b，从而求出函数表达式，进而求出函数的单调区间.

答案：(1)由 $f'(x)=3ax^2-2x+b$，因为函数在 x=3 时有极小值-9，

所以$\begin{cases}27a-6+b=0\\27a-9+3b=-9\end{cases}$，从而得$\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\b=-3\end{cases}$，

所求的 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x$，所以 $f'(x)=x^2-2x-3$，
由 $f'(x)<0$ 解得 $-1<x<3$，
所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1，3)$.

(2)若不等式 $f'(x)>k(x\ln x-1)-6x-4$(k 为正整数)对任意正实数 x 恒成立，求 k 的最大值.(解答过程可参考使用以下数据：$\ln 7\approx 1.95$，$\ln 8\approx 2.08$)

解析：(2)将问题转化为 $x+\dfrac{k+1}{x}+4-k\ln x>0$，记 $g(x)=x+\dfrac{k+1}{x}+4-k\ln x$，通过求导得到函数的单调性，从而有 $g(x)\geqslant g(k+1)=k+6-k\ln(k+1)$，问题转化为 $k+6-k\ln(k+1)>0$，记 $h(x)=1+\dfrac{6}{x}-\ln(x+1)$，通过求导得到函数 $h(x)$ 的单调性，从而得到 k 的最大值.

答案：(2)因为 $f'(x)=x^2-2x-3$，所以 $f'(x)>k(x\ln x-1)-6x-4$ 等价于

$x^2+4x+1>k(x\ln x-1)$，即 $x+\dfrac{k+1}{x}+4-k\ln x>0$，

记 $g(x)=x+\dfrac{k+1}{x}+4-k\ln x$，

则 $g'(x)=\dfrac{(x+1)(x-k-1)}{x^2}$，

由 $g'(x)=0$，得 $x=k+1$，
所以 $g(x)$ 在 $(0，k+1)$ 上单调递减，在 $(k+1，+\infty)$ 上单调递增，
所以 $g(x)\geqslant g(k+1)=k+6-k\ln(k+1)$，
$g(x)>0$ 对任意正实数 x 恒成立，

等价于 $k+6-k\ln(k+1)>0$，即 $1+\dfrac{6}{k}-\ln(k+1)>0$，

记 $h(x)=1+\dfrac{6}{x}-\ln(x+1)$，

则 $h'(x)=-\dfrac{6}{x^2}-\dfrac{1}{x+1}<0$，所以 $h(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调递减，

又 $h(6)=2-\ln 7>0$，$h(7)=\dfrac{13}{7}-\ln 8<0$，

所以 k 的最大值为 6.

请考生在第 22-23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.
选修 4-4：坐标系与参数方程

22.在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=2+2\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$($\alpha$ 为参数)，曲线 C_2 的参

数方程为$\begin{cases} x = 2\cos\beta \\ y = 2 + 2\sin\beta \end{cases}$（β 为参数），以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求曲线 C_1 和曲线 C_2 的极坐标方程.

解析：(1)曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases} x = 2 + 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$（α 为参数），利用平方关系消去参数可得曲线 C_1 的直角坐标方程，利用互化公式可得曲线 C_1 极坐标方程.曲线 C_2 的参数方程为$\begin{cases} x = 2\cos\beta \\ y = 2 + 2\sin\beta \end{cases}$（β 为参数），消去参数可得：曲线 C_2 的普通方程，利用互化公式可得 C_2 极坐标方程.

答案：(1)曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases} x = 2 + 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$（α 为参数），

利用平方关系消去参数可得：曲线 C_1 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=4$，

展开可得：$x^2+y^2-4x=0$，

利用互化公式可得：$\rho^2-4\rho\cos\theta=0$，

∴C_1 极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$.

曲线 C_2 的参数方程为$\begin{cases} x = 2\cos\beta \\ y = 2 + 2\sin\beta \end{cases}$（β 为参数），

消去参数可得：曲线 C_2 的普通方程为 $x^2+(y-2)^2=4$，

展开利用互化公式可得 C_2 极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$.

(2)已知射线 l_1：$\theta=\alpha$ $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$，将射线 l_1 顺时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 得到射线 l_2：$\theta=\alpha-\frac{\pi}{6}$，且射线 l_1 与曲线 C_1 交于 O，P 两点，射线 l_2 与曲线 C_2 交于 O，Q 两点，求 $|OP|\cdot|OQ|$ 的最大值.

解析：(2)设点 P 极点坐标 $(\rho_1, 4\cos\alpha)$，即 $\rho_1=4\cos\alpha$.点 Q 极坐标为 $(\rho_2, 4\sin(\alpha-\frac{\pi}{6}))$，即 $\rho_2=4\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})$.代入 $|OP|\cdot|OQ|$，利用和差公式、三角函数的单调性与值域即可得出.

答案：(2)设点 P 极点坐标 $(\rho_1, 4\cos\alpha)$，即 $\rho_1=4\cos\alpha$.

点 Q 极坐标为 $(\rho_2, 4\sin(\alpha-\frac{\pi}{6}))$，即 $\rho_2=4\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})$.

则 $|OP|g|OQ| = \rho_1\rho_2 = 4\cos\alpha g 4\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right) = 16\cos\alpha g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha\right)$

$= 8\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-4$.

∵$\alpha\in(0, \frac{\pi}{2})$，

∴$2α-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6})$，

当$2\alpha-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即$α=\frac{\pi}{3}$时，|OP|·|OQ|取最大值 4.

选修 4-5：不等式选讲.

23.设不等式$-2<|x-1|-|x+2|<0$的解集为 M，且 a，b∈M.

(1)证明：$\left|\frac{1}{3}a+\frac{1}{6}b\right|<\frac{1}{4}$.

解析：(1)由绝对值不等式的解法，运用绝对值的意义，可得$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$，则$|a|<\frac{1}{2}$，$|b|<\frac{1}{2}$，再由绝对值不等式的性质，即可得证.

答案：(1)证明：$-2<|x-1|-|x+2|<0$，

可得$|x-1|<|x+2|$，即有$x^2-2x+1<x^2+4x+4$，

解得$x>-\frac{1}{2}$，

则$x+2>0$，可得$-2<|x-1|-(x+2)$，

即有$x<|x-1|$，可得$x-1>x$或$x-1<-x$，

解得$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$，

则$|a|<\frac{1}{2}$，$|b|<\frac{1}{2}$，

$$\left|\frac{1}{3}a+\frac{1}{6}b\right|\le\frac{1}{3}|a|+\frac{1}{6}|b|<\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

(2)比较$|1-4ab|$与$2|a-b|$的大小，并说明理由.

解析：(2)运用作差法，可得：$|1-4ab|^2-4|a-b|^2$，由平方差公式，分解因式，结合 a，b 的范围，即可得到所求大小关系.

答案：(2)$|1-4ab|>2|a-b|$.

理由：$|1-4ab|^2-4|a-b|^2=(1-4ab-2a+2b)(1-4ab+2a-2b)$

$=(1-2a)(1+2b)(1+2a)(1-2b)$

$=(1-4a^2)(1-4b^2)$，

由$|a|<\frac{1}{2}$，$|b|<\frac{1}{2}$，可得

$4a^2<1$，$4b^2<1$，

则$(1-4a^2)(1-4b^2)>0$，

可得$|1-4ab|>2|a-b|$.