

2018 年湖北省孝感市中考真题数学

一、精心选一选，相信自己的判断!(本大题 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，在每小题出的四个选项中只有一项是符合题目要求的，不涂，错涂或涂的代号超过一个，一律得 0 分)

1. $-\frac{1}{4}$ 的倒数是()

A. 4

B. -4

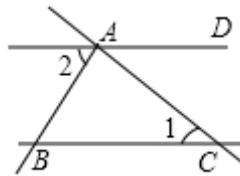
C. $\frac{1}{4}$

D. 16

解析: $-\frac{1}{4}$ 的倒数为: -4.

答案: B

2. 如图，直线 $AD \parallel BC$ ，若 $\angle 1 = 42^\circ$ ， $\angle BAC = 78^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为()



A. 42°

B. 50°

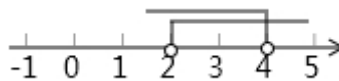
C. 60°

D. 68°

解析: $\because \angle 1 = 42^\circ$ ， $\angle BAC = 78^\circ$ ， $\therefore \angle ABC = 60^\circ$ ，又 $\because AD \parallel BC$ ， $\therefore \angle 2 = \angle ABC = 60^\circ$.

答案: C

3. 下列某不等式组的解集在数轴上表示如图所示，则该不等式组是()



A. $\begin{cases} x - 1 < 3 \\ x + 1 < 3 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x - 1 < 3 \\ x + 1 > 3 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - 1 > 3 \\ x + 1 > 3 \end{cases}$

$$D. \begin{cases} x-1 > 3 \\ x+1 < 3 \end{cases}$$

解析：A、此不等式组的解集为 $x < 2$ ，不符合题意；

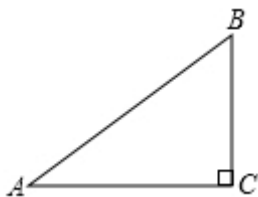
B、此不等式组的解集为 $2 < x < 4$ ，符合题意；

C、此不等式组的解集为 $x > 4$ ，不符合题意；

D、此不等式组的无解，不符合题意.

答案：B

4. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AB=10$ ， $AC=8$ ，则 $\sin A$ 等于()



A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{3}$

解析：在 $Rt\triangle ABC$ 中，

$$\because AB=10、AC=8, \therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6, \therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

答案：A

5. 下列说法正确的是()

A. 了解“孝感市初中生每天课外阅读书籍时间的情况”最适合的调查方式是全面调查

B. 甲乙两人跳绳各 10 次，其成绩的平均数相等， $S_{甲}^2 > S_{乙}^2$ ，则甲的成绩比乙稳定

C. 三张分别画有菱形，等边三角形，圆的卡片，从中随机抽取一张，恰好抽到中心对称图形卡片的概率是 $\frac{1}{3}$

D. “任意画一个三角形，其内角和是 360° ”这一事件是不可能事件

解析：A、了解“孝感市初中生每天课外阅读书籍时间的情况”最适合的调查方式是抽样调查，此选项错误；

B、甲乙两人跳绳各 10 次，其成绩的平均数相等， $S_{甲}^2 > S_{乙}^2$ ，则乙的成绩比甲稳定，此选项错误；

C、三张分别画有菱形，等边三角形，圆的卡片，从中随机抽取一张，恰好抽到中心对称图形卡片的概率是 $\frac{2}{3}$ ，此选项错误；

D、“任意画一个三角形，其内角和是 360° ”这一事件是不可能事件，此选项正确.

答案：D

6. 下列计算正确的是()

A. $a^{-2} \div a^5 = \frac{1}{a^7}$

B. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

C. $2 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

D. $(a^3)^2 = a^5$

解析：A、 $a^{-2} \div a^5 = \frac{1}{a^7}$ ，正确；

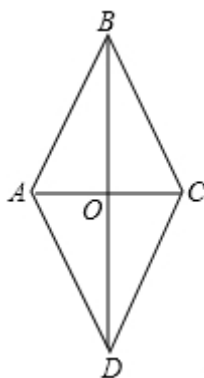
B、 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，故此选项错误；

C、 $2 + \sqrt{2}$ ，无法计算，故此选项错误；

D、 $(a^3)^2 = a^6$ ，故此选项错误。

答案：A

7. 如图，菱形 ABCD 的对角线 AC, BD 相交于点 O, AC=10, BD=24, 则菱形 ABCD 的周长为()



A. 52

B. 48

C. 40

D. 20

解析：菱形 ABCD 中，BD=24, AC=10, $\therefore OB=12, OA=5$,

在 Rt $\triangle ABO$ 中， $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 13$, \therefore 菱形 ABCD 的周长 = $4AB = 52$.

答案：A

8. 已知 $x + y = 4\sqrt{3}$, $x - y = \sqrt{3}$, 则式子 $\left(x - y + \frac{4xy}{x - y}\right) \left(x + y - \frac{4xy}{x + y}\right)$ 的值是()

A. 48

B. 123

C. 16

D. 12

解析: $\left(x - y + \frac{4xy}{x - y}\right)\left(x + y - \frac{4xy}{x + y}\right)$

$$= \frac{(x - y)^2 + 4xy}{x - y} \cdot \frac{(x + y)^2 - 4xy}{x + y}$$

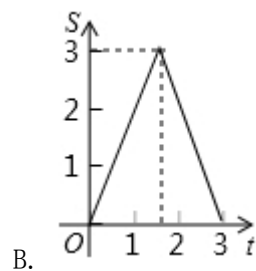
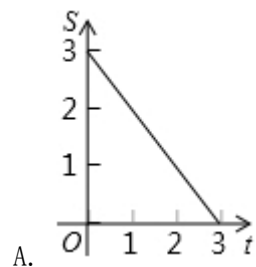
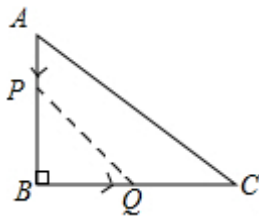
$$= \frac{(x + y)^2}{x - y} \cdot \frac{(x - y)^2}{x + y}$$

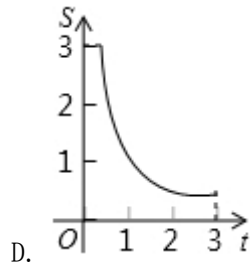
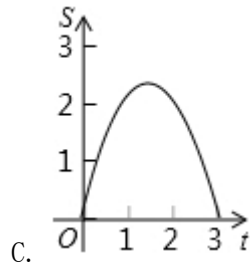
$$= (x + y)(x - y),$$

当 $x + y = 4\sqrt{3}$, $x - y = \sqrt{3}$ 时, 原式 $= 4\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 12$.

答案: D

9. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 3\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, 动点 P 从点 A 开始沿 AB 向点 B 以 1cm/s 的速度移动, 动点 Q 从点 B 开始沿 BC 向点 C 以 2cm/s 的速度移动, 若 P, Q 两点分别从 A, B 两点同时出发, P 点到达 B 点运动停止, 则 $\triangle PBQ$ 的面积 S 随出发时间 t 的函数关系图象大致是 ()





解析：由题意可得：PB=3-t，BQ=2t，

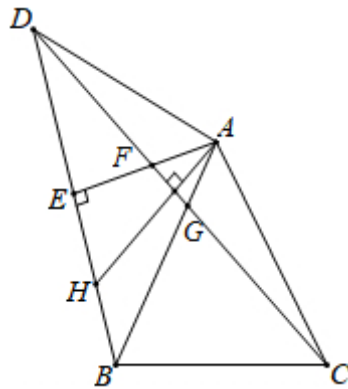
$$\text{则}\triangle PBQ\text{的面积 } S = \frac{1}{2} PB \cdot BQ = \frac{1}{2} (3-t) \times 2t = -t^2 + 3t,$$

故 $\triangle PBQ$ 的面积S随出发时间t的函数关系图象大致是二次函数图象，开口向下.

答案：C

10. 如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形， $\triangle ABD$ 是等腰直角三角形， $\angle BAD=90^\circ$ ， $AE \perp BD$ 于点 E，连 CD 分别交 AE，AB 于点 F，G，过点 A 作 $AH \perp CD$ 交 BD 于点 H. 则下列结论：① $\angle ADC=15^\circ$ ；

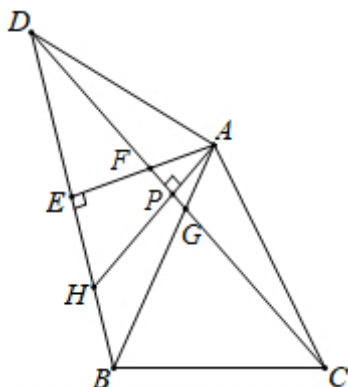
② $AF=AG$ ；③ $AH=DF$ ；④ $\triangle AFG \sim \triangle CBG$ ；⑤ $AF=(\sqrt{3}-1)EF$. 其中正确结论的个数为()



- A. 5
- B. 4
- C. 3
- D. 2

解析：∵ $\triangle ABC$ 为等边三角形， $\triangle ABD$ 为等腰直角三角形，
 $\therefore \angle BAC=60^\circ$ 、 $\angle BAD=90^\circ$ 、 $AC=AB=AD$ ， $\angle ADB=\angle ABD=45^\circ$ ，
 $\therefore \triangle CAD$ 是等腰三角形，且顶角 $\angle CAD=150^\circ$ ，
 $\therefore \angle ADC=15^\circ$ ，故①正确；
 $\because AE \perp BD$ ，即 $\angle AED=90^\circ$ ，
 $\therefore \angle DAE=45^\circ$ ，

$\therefore \angle AFG = \angle ADC + \angle DAE = 60^\circ$, $\angle FAG = 45^\circ$, $\therefore \angle AGF = 75^\circ$,
 由 $\angle AFG \neq \angle AGF$ 知 $AF \neq AG$, 故②错误;
 记 AH 与 CD 的交点为 P ,



由 $AH \perp CD$ 且 $\angle AFG = 60^\circ$ 知 $\angle FAP = 30^\circ$, 则 $\angle BAH = \angle ADC = 15^\circ$,

$$\text{在 } \triangle ADF \text{ 和 } \triangle BAH \text{ 中, } \therefore \begin{cases} \angle ADF = \angle BAH, \\ DA = AB, \\ \angle DAF = \angle ABH = 45^\circ, \end{cases} \therefore \triangle ADF \cong \triangle BAH \text{ (ASA),}$$

$\therefore DF = AH$, 故③正确;

$\therefore \angle AFG = \angle CBG = 60^\circ$, $\angle AGF = \angle CGB$,

$\therefore \triangle AFG \sim \triangle CBG$, 故④正确;

在 $\text{Rt} \triangle APF$ 中, 设 $PF = x$, 则 $AF = 2x$, $AP = \sqrt{AF^2 - PF^2} = \sqrt{3}x$,

设 $EF = a$, $\therefore \triangle ADF \cong \triangle BAH$, $\therefore BH = AF = 2x$,

$\triangle ABE$ 中, $\therefore \angle AEB = 90^\circ$, $\angle ABE = 45^\circ$,

$\therefore BE = AE = AF + EF = a + 2x$,

$\therefore EH = BE - BH = a + 2x - 2x = a$,

$\therefore \angle APF = \angle AEH = 90^\circ$, $\angle FAP = \angle HAE$,

$\therefore \triangle PAF \sim \triangle EAH$,

$$\therefore \frac{PF}{EH} = \frac{AP}{AE} , \text{ 即 } \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}x}{a + 2x} ,$$

整理, 得: $2x^2 = (\sqrt{3} - 1)ax$, 由 $x \neq 0$ 得 $2x = (\sqrt{3} - 1)a$, 即 $AF = (\sqrt{3} - 1)EF$, 故⑤正确.

答案: B

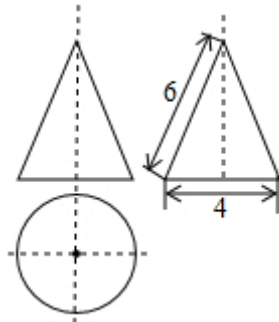
二、细心填一填, 试试自己的身手!(本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分).

11. 一年之中地球与太阳之间的距离随时间而变化, 1 个天文单位是地球与太阳的平均距离, 即 149600000 千米, 用科学记数法表示 1 个天文单位是_____千米.

解析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数. $149600000 = 1.496 \times 10^8$.

答案: 1.496×10^8

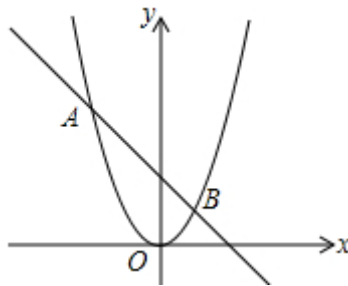
12. 如图是一个几何体的三视图(图中尺寸单位: cm), 根据图中数据计算, 这个几何体的表面积为_____cm².



解析: 由主视图和左视图为三角形判断出是锥体, 由俯视图是圆形可判断出这个几何体应该是圆锥; 根据三视图知: 该圆锥的母线长为 6cm, 底面半径为 2cm, 故表面积= $\pi r l + \pi r^2 = \pi \times 2 \times 6 + \pi \times 2^2 = 16\pi$ (cm²).

答案: 16π

13. 如图, 抛物线 $y=ax^2$ 与直线 $y=bx+c$ 的两个交点坐标分别为 $A(-2, 4)$, $B(1, 1)$, 则方程 $ax^2=bx+c$ 的解是_____.



解析: \because 抛物线 $y=ax^2$ 与直线 $y=bx+c$ 的两个交点坐标分别为 $A(-2, 4)$, $B(1, 1)$,

$$\therefore \text{方程组} \begin{cases} y = ax^2, \\ y = bx + c \end{cases} \text{ 的解为} \begin{cases} x_1 = -2, \\ y_1 = 4, \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 1, \end{cases}$$

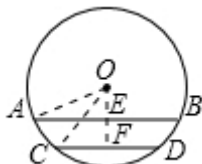
即关于 x 的方程 $ax^2-bx-c=0$ 的解为 $x_1=-2$, $x_2=1$.

所以方程 $ax^2=bx+c$ 的解是 $x_1=-2$, $x_2=1$

答案: $x_1=-2$, $x_2=1$.

14. 已知 $\odot O$ 的半径为 10cm, AB , CD 是 $\odot O$ 的两条弦, $AB \parallel CD$, $AB=16$ cm, $CD=12$ cm, 则弦 AB 和 CD 之间的距离是_____cm.

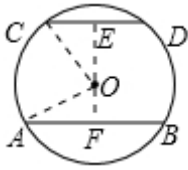
解析: ①当弦 AB 和 CD 在圆心同侧时, 如图,



$\because AB=16$ cm, $CD=12$ cm, $\therefore AE=8$ cm, $CF=6$ cm,

$\because OA=OC=10$ cm, $\therefore OE=6$ cm, $OF=8$ cm, $\therefore EF=OF-OE=2$ cm;

②当弦 AB 和 CD 在圆心异侧时, 如图,

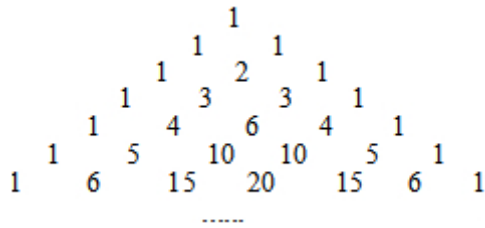


$\because AB=16\text{cm}, CD=12\text{cm}, \therefore AF=8\text{cm}, CE=6\text{cm},$

$\because OA=OC=10\text{cm}, \therefore OF=6\text{cm}, OE=8\text{cm}, \therefore EF=OF+OE=14\text{cm}. \therefore AB$ 与 CD 之间的距离为 14cm 或 $2\text{cm}.$

答案: 2 或 14

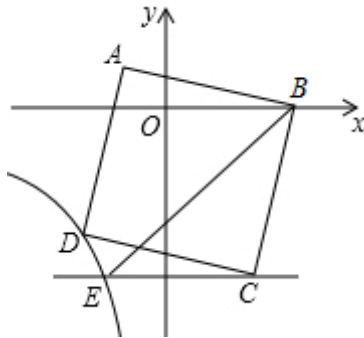
15. 我国古代数学家杨辉发现了如图所示的三角形, 我们称之为“杨辉三角”从图中取一列数: 1, 3, 6, 10, \dots , 记 $a_1=1, a_2=3, a_3=6, a_4=10, \dots$, 那么 $a_4+a_{11}-2a_{10}+10$ 的值是_____.



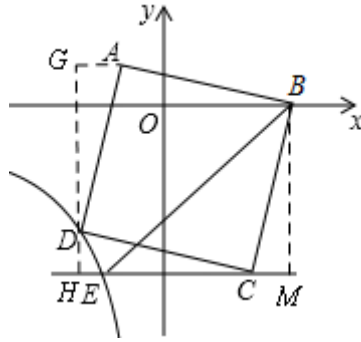
解析: 由 $a_1=1, a_2=3, a_3=6, a_4=10, \dots$, 知 $a_n=1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \therefore a_{10}=\frac{10 \times 11}{2}=55, a_{11}=\frac{11 \times 12}{2}=66,$ 则 $a_4+a_{11}-2a_{10}+10=10+66-2 \times 55+10=-24.$

答案: -24

16. 如图, 在平面直角坐标系中, 正方形 $ABCD$ 的顶点 A 的坐标为 $(-1, 1)$, 点 B 在 x 轴正半轴上, 点 D 在第三象限的双曲线 $y=\frac{6}{x}$ 上, 过点 C 作 $CE \parallel x$ 轴交双曲线于点 E , 连接 BE , 则 $\triangle BCE$ 的面积为_____.



解析: 过 D 作 $GH \perp x$ 轴, 过 A 作 $AG \perp GH$, 过 B 作 $BM \perp HC$ 于 $M,$



设 $D(x, \frac{6}{x})$,

\because 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore AD=CD=BC$, $\angle ADC=\angle DCB=90^\circ$,
易得 $\triangle AGD \cong \triangle DHC \cong \triangle CMB$,

$\therefore AG=DH=-x-1$, $\therefore DG=BM$, $\therefore 1-\frac{6}{x}=-1-x-\frac{6}{x}$, $x=-2$,

$\therefore D(-2, -3)$, $CH=DG=BM=1-\frac{6}{-2}=4$,

$\therefore AG=DH=-1-x=1$, \therefore 点 E 的纵坐标为 -4 ,

当 $y=-4$ 时, $x=-\frac{3}{2}$, $\therefore E(-\frac{3}{2}, -4)$, $\therefore EH=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$,

$\therefore CE=CH-HE=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$, $\therefore S_{\triangle CEB}=\frac{1}{2}CE \cdot BM=\frac{1}{2} \times \frac{7}{2} \times 4=7$.

答案: 7

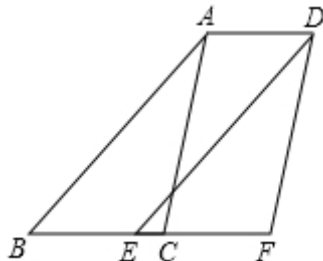
三、用心做一做做, 显显自己的能力!(本大题共 8 小题, 满分 72 分).

17. 计算: $(-3)^2+|-4|+\sqrt{12}-4\cos 30^\circ$.

解析: 直接利用二次根式的性质以及特殊角的三角函数值、绝对值的性质进而化简得出答案.

答案: 原式 $=9+4+2\sqrt{3}-4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}=13+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=13$.

18. 如图, B, E, C, F 在一条直线上, 已知 $AB \parallel DE$, $AC \parallel DF$, $BE=CF$, 连接 AD . 求证: 四边形 $ABED$ 是平行四边形.



解析: 由 $AB \parallel DE$, $AC \parallel DF$ 利用平行线的性质可得出 $\angle B=\angle DEF$, $\angle ACB=\angle F$, 由 $BE=CF$ 可得出 $BC=EF$, 进而可证出 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (ASA), 根据全等三角形的性质可得出 $AB=DE$, 再结合

AB//DE, 即可证出四边形 ABED 是平行四边形.

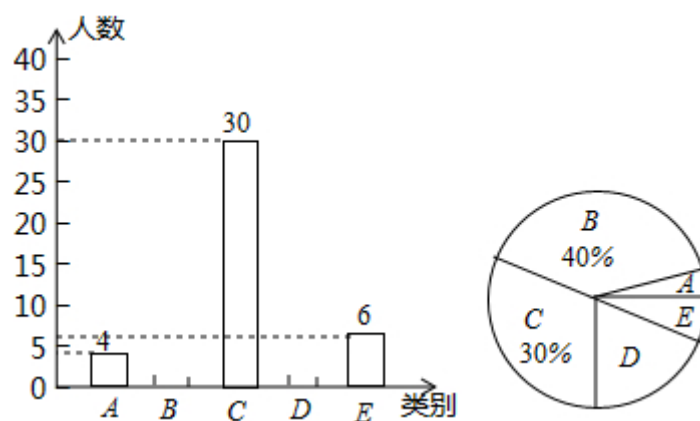
答案: $\because AB//DE, AC//DF, \therefore \angle B = \angle DEF, \angle ACB = \angle F.$

$\because BE=CF, \therefore BE+CE=CF+CE, \therefore BC=EF.$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,
$$\begin{cases} \angle B = \angle DEF, \\ BC = EF, \\ \angle ACB = \angle F, \end{cases} \therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF (ASA), \therefore AB=DE.$$

又 $\because AB//DE, \therefore$ 四边形 ABED 是平行四边形.

19. 在孝感市关工委组织的“五好小公民”主题教育活动中, 我市蓝天学校组织全校学生参加了“红旗队飘, 引我成长”知识竞赛, 赛后机抽取了部分参赛学生的成绩, 按从高分到低分将成绩分成 A, B, C, D, E 五类, 绘制成下面两个不完整的统计图:



根据上面提供的信息解答下列问题:

(1) D 类所对应的圆心角是_____度, 样本中成绩的中位数落在_____类中, 并补全条形统计图;

(2) 若 A 类含有 2 名男生和 2 名女生, 随机选择 2 名学生担任校园广播“孝心伴我行”节目主持人, 请用列表法或画树状图法求恰好抽到 1 名男生和 1 名女生的概率.

解析: (1) 首先用 C 类别的学生人数除以 C 类别的人数占的百分率, 求出共有多少名学生; 然后根据 B 类别百分比求得人数, 由各类别人数和等于总人数求得 D 的人数, 最后用 360° 乘以样本中 D 类别人数所占比例可得其圆心角度数, 根据中位数定义求得答案.

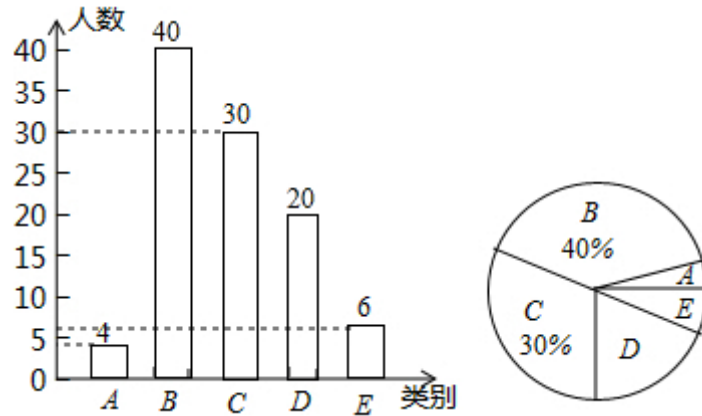
(3) 若 A 等级的 4 名学生中有 2 名男生 2 名女生, 现从中任意选取 2 名担任校园广播“孝心伴我行”节目主持人, 应用列表法的方法, 求出恰好选到 1 名男生和 1 名女生的概率是多少即可.

解析: (1) \because 被调查的总人数为 $30 \div 30\% = 100$ 人, 则 B 类别人数为 $100 \times 40\% = 40$ 人,

所以 D 类别人数为 $100 - (4 + 40 + 30 + 6) = 20$ 人, 则 D 类所对应的圆心角是 $360^\circ \times \frac{20}{100} = 72^\circ$,

中位数是第 50、51 个数据的平均数, 而第 50、51 个数据均落在 C 类,

所以中位数落在 C 类, 补全条形图如下:



(2) 列表为:

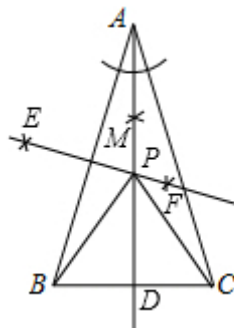
	男1	男2	女1	女2
男1	--	男2男1	女1男1	女2男1
男2	男1男2	--	女1男2	女2男2
女1	男1女1	男2女1	--	女2女1
女2	男1女2	男2女2	女1女2	--

由上表可知，从 4 名学生中任意选取 2 名学生共有 12 种等可能结果，其中恰好选到 1 名男生和 1 名女生的结果有 8 种， \therefore 恰好选到 1 名男生和 1 名女生的概率为 $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ 。

20. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，小聪同学利用直尺和圆规完成了如下操作：

- ①作 $\angle BAC$ 的平分线 AM 交 BC 于点 D ；
- ②作边 AB 的垂直平分线 EF ， EF 与 AM 相交于点 P ；
- ③连接 PB ， PC 。

请你观察图形解答下列问题：



(1) 线段 PA ， PB ， PC 之间的数量关系是 _____；

(2) 若 $\angle ABC=70^\circ$ ，求 $\angle BPC$ 的度数。

解析：(1) 根据线段的垂直平分线的性质可得： $PA=PB=PC$ ；

(2) 根据等腰三角形的性质得： $\angle ABC=\angle ACB=70^\circ$ ，由三角形的内角和得： $\angle BAC=180^\circ - 2$

$\times 70^\circ = 40^\circ$ ，由角平分线定义得： $\angle BAD = \angle CAD = 20^\circ$ ，最后利用三角形外角的性质可得结论。

答案：(1)如图， $PA = PB = PC$ ，理由是：

$\because AB = AC$ ， AM 平分 $\angle BAC$ ， $\therefore AD$ 是 BC 的垂直平分线， $\therefore PB = PC$ ，

$\because EP$ 是 AB 的垂直平分线， $\therefore PA = PB$ ， $\therefore PA = PB = PC$ ；

(2) $\because AB = AC$ ， $\therefore \angle ABC = \angle ACB = 70^\circ$ ， $\therefore \angle BAC = 180^\circ - 2 \times 70^\circ = 40^\circ$ ，

$\because AM$ 平分 $\angle BAC$ ， $\therefore \angle BAD = \angle CAD = 20^\circ$ ，

$\because PA = PB = PC$ ， $\therefore \angle ABP = \angle BAP = \angle ACP = 20^\circ$ ，

$\therefore \angle BPC = \angle ABP + \angle BAC + \angle ACP = 20^\circ + 40^\circ + 20^\circ = 80^\circ$ 。

21. 已知关于 x 的一元二次方程 $(x-3)(x-2) = p(p+1)$ 。

(1) 试证明：无论 p 取何值此方程总有两个实数根；

(2) 若原方程的两根 x_1, x_2 ，满足 $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 3p^2 + 1$ ，求 p 的值。

解析：(1) 将原方程变形为一般式，根据方程的系数结合根的判别式，即可得出 $\Delta = (2p+1)^2 \geq 0$ ，由此即可证出：无论 p 取何值此方程总有两个实数根；

(2) 根据根与系数的关系可得出 $x_1 + x_2 = 5$ 、 $x_1x_2 = 6 - p^2 - p$ ，结合 $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 3p^2 + 1$ ，即可求出 p 值。

答案：(1) 原方程可变形为 $x^2 - 5x + 6 - p^2 - p = 0$ 。

$\because \Delta = (-5)^2 - 4(6 - p^2 - p) = 25 - 24 + 4p^2 + 4p = 4p^2 + 4p + 1 = (2p+1)^2 \geq 0$ ， \therefore 无论 p 取何值此方程总有两个实数根；

(2) \because 原方程的两根为 x_1, x_2 ， $\therefore x_1 + x_2 = 5$ ， $x_1x_2 = 6 - p^2 - p$ 。

又 $\because x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 3p^2 + 1$ ， $\therefore (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 3p^2 + 1$ ，

$\therefore 5^2 - 3(6 - p^2 - p) = 3p^2 + 1$ ， $\therefore 25 - 18 + 3p^2 + 3p = 3p^2 + 1$ ， $\therefore 3p = -6$ ， $\therefore p = -2$ 。

22. “绿水青山就是金山银山”，随着生活水平的提高，人们对饮水品质的需求越来越高，孝感市槐荫公司根据市场需求代理 A、B 两种型号的净水器，每台 A 型净水器比每台 B 型净水器进价多 200 元，用 5 万元购进 A 型净水器与用 4.5 万元购进 B 型净水器的数量相等。

(1) 求每台 A 型、B 型净水器的进价各是多少元？

(2) 槐荫公司计划购进 A、B 两种型号的净水器共 50 台进行试销，其中 A 型净水器为 x 台，购买资金不超过 9.8 万元。试销时 A 型净水器每台售价 2500 元，B 型净水器每台售价 2180 元，槐荫公司决定从销售 A 型净水器的利润中按每台捐献 a ($70 < a < 80$) 元作为公司帮扶贫困乡村饮水改造资金，设槐荫公司售完 50 台净水器并捐献扶贫资金后获得的利润为 W ，求 W 的最大值。

解析：(1) 设 A 型净水器每台的进价为 m 元，则 B 型净水器每台的进价为 $(m-200)$ 元，根据数量=总价 \div 单价结合用 5 万元购进 A 型净水器与用 4.5 万元购进 B 型净水器的数量相等，即可得出关于 m 的分式方程，解之经检验后即可得出结论；

(2) 根据购买资金=A 型净水器的进价 \times 购进数量+B 型净水器的进价 \times 购进数量结合购买资金不超过 9.8 万元，即可得出关于 x 的一元一次不等式，解之即可得出 x 的取值范围，由总利润=每台 A 型净水器的利润 \times 购进数量+每台 B 型净水器的利润 \times 购进数量- $a \times$ 购进 A 型净水器的数量，即可得出 W 关于 x 的函数关系式，再利用一次函数的性质即可解决最值问题。

答案：(1) 设 A 型净水器每台的进价为 m 元，则 B 型净水器每台的进价为 $(m-200)$ 元，

根据题意得： $\frac{50000}{m} = \frac{45000}{m-200}$ ，解得： $m=2000$ ，

经检验， $m=2000$ 是分式方程的解， $\therefore m-200=1800$ 。

答：A 型净水器每台的进价为 2000 元，B 型净水器每台的进价为 1800 元。

(2) 根据题意得： $2000x+180(50-x)\leq 98000$ ，解得： $x\leq 40$ 。

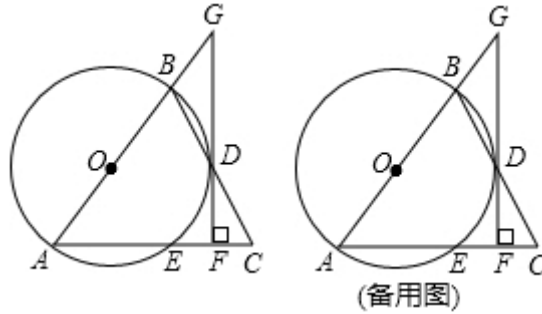
$W=(2500-2000)x+(2180-1800)(50-x)-ax=(120-a)x+19000$ ，

\because 当 $70 < a < 80$ 时， $120-a > 0$ ， $\therefore W$ 随 x 增大而增大，

\therefore 当 $x=40$ 时， W 取最大值，最大值为 $(120-a)\times 40+19000=23800-40a$ ，

$\therefore W$ 的最大值是 $(23800-40a)$ 元。

23. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ，以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于点 D ，交 AC 于点 E ，过点 D 作 $DF\perp AC$ 于点 F ，交 AB 的延长线于点 G 。



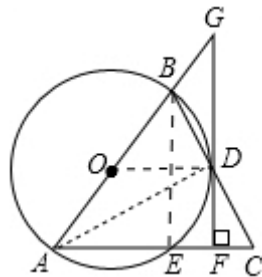
(1) 求证：DF 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 已知 $BD=2\sqrt{5}$ ， $CF=2$ ，求 AE 和 BG 的长。

解析：(1) 连接 OD ， AD ，由圆周角定理可得 $AD\perp BC$ ，结合等腰三角形的性质知 $BD=CD$ ，再根据 $OA=OB$ 知 $OD\parallel AC$ ，从而由 $DG\perp AC$ 可得 $OD\perp FG$ ，即可得证；

(2) 连接 BE ， $BE\parallel GF$ ，推出 $\triangle AEB\sim\triangle AFG$ ，可得 $AB\cdot AG=AE\cdot AF$ ，由此构建方程即可解决问题；

答案：(1) 连接 OD ， AD ，



$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径， $\therefore \angle ADB=90^\circ$ ，即 $AD\perp BC$ ， $\because AB=AC$ ， $\therefore BD=CD$ ，
又 $\because OA=OB$ ， $\therefore OD\parallel AC$ ， $\because DG\perp AC$ ， $\therefore OD\perp FG$ ， \therefore 直线 FG 与 $\odot O$ 相切；

(2) 连接 BE 。 $\because BD=2\sqrt{5}$ ， $\therefore CD=BD=2\sqrt{5}$ ，

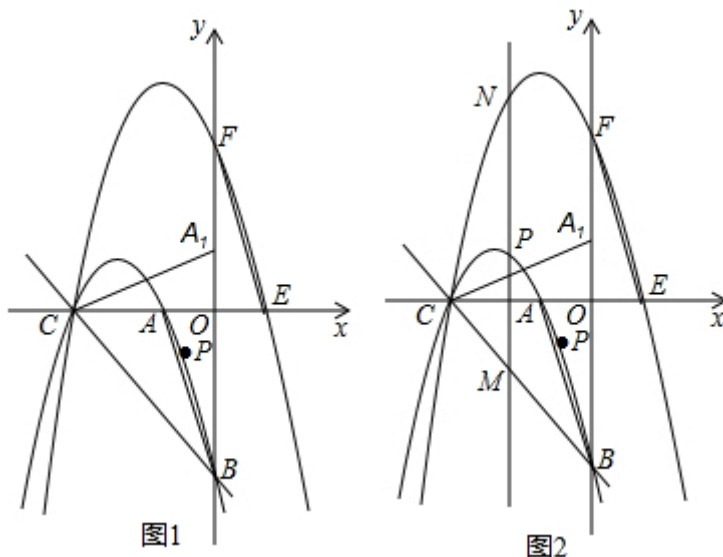
$\because CF=2$ ， $\therefore DF=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$ ， $\therefore BE=2DF=8$ ，

$\because \cos\angle C=\cos\angle ABC$ ， $\therefore \frac{CF}{CD}=\frac{BD}{AB}$ ， $\therefore \frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{AB}$ ， $\therefore AB=10$ ， $\therefore AE=\sqrt{10^2-8^2}=6$ ，

$\because BE\perp AC$ ， $DF\perp AC$ ， $\therefore BE\parallel GF$ ，

$\therefore \triangle AEB\sim\triangle AFG$ ， $\therefore \frac{AB}{AG}=\frac{AE}{AF}$ ， $\therefore \frac{10}{10+BG}=\frac{6}{2+6}$ ， $\therefore BG=\frac{10}{3}$ 。

24. 如图 1, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 A 和点 B 的坐标分别为 $A(-2, 0)$, $B(0, -6)$, 将 $Rt\triangle AOB$ 绕点 O 按顺时针方向分别旋转 90° , 180° 得到 $Rt\triangle A_1OC$, $Rt\triangle EOF$. 抛物线 C_1 经过点 C, A, B; 抛物线 C_2 经过点 C, E, F.



(1) 点 C 的坐标为 _____, 点 E 的坐标为 _____; 抛物线 C_1 的解析式为 _____. 抛物线 C_2 的解析式为 _____;

(2) 如果点 $P(x, y)$ 是直线 BC 上方抛物线 C_1 上的一个动点.

①若 $\angle PCA = \angle ABO$ 时, 求 P 点的坐标;

②如图 2, 过点 P 作 x 轴的垂线交直线 BC 于点 M, 交抛物线 C_2 于点 N, 记 $h = PM + NM + \sqrt{2} BM$, 求 h 与 x 的函数关系式, 当 $-5 \leq x \leq -2$ 时, 求 h 的取值范围.

解析: (1) 根据旋转的性质, 可得 C, E, F 的坐标, 根据待定系数法法求解析式;

(2) ①根据 P 点直线 CA 或其关于 x 轴对称直线与抛物线交点坐标, 求出解析式, 联立方程组求解;

②根据图象上的点满足函数解析式, 可得 P、N、M 纵坐标, 根据平行于 y 轴直线上两点间的距离是较大的较大的纵坐标间较小的纵坐标, 可得二次函数, 根据 x 取值范围讨论 h 范围.

答案: (1) 由旋转可知, $OC=6$, $OE=2$, 则点 C 坐标为 $(-6, 0)$, E 点坐标为 $(2, 0)$,

分别利用待定系数法求 C_1 解析式为: $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 6$, C_2 解析式为: $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$.

(2) ①若点 P 在 x 轴上方, $\angle PCA = \angle ABO$ 时, 则 CA_1 与抛物线 C_1 的交点即为点 P,

设直线 CA_1 的解析式为: $y = k_1x + b_1$,

$$\therefore \begin{cases} 0 = -6k_1 + b_1, \\ 2 = b_1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k_1 = \frac{1}{3}, \\ b_1 = 2, \end{cases} \therefore \text{直线 } CA_1 \text{ 的解析式为: } y = \frac{1}{3}x + 2,$$

$$\text{联立: } \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 6, \\ y = \frac{1}{3}x + 2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x_1 = -\frac{8}{3}, \\ y_1 = \frac{10}{9} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_2 = -6, \\ y_2 = 0, \end{cases} \text{ 根据题意, P 点坐标为 } \left(-\frac{8}{3}, \frac{10}{9}\right);$$

若点 P 在 x 轴下方, $\angle PCA = \angle ABO$ 时, 则 CA_1 关于 x 轴对称的直线 CA_2 与抛物线 C_1 的交点即

为点 P, 设直线 CA₂ 解析式为 $y=k_2x+b_2$,

$$\therefore \begin{cases} 0 = -6k_2 + b_2, \\ -2 = b_2, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k_2 = -\frac{1}{3}, \\ b_2 = -2, \end{cases} \therefore \text{直线 CA}_2 \text{的解析式为: } y = -\frac{1}{3}x - 2,$$

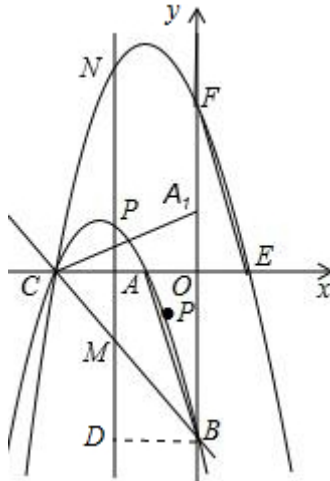
$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 6, \\ y = -\frac{1}{3}x - 2 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x_1 = -\frac{4}{3}, \\ y_1 = -\frac{9}{4} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_2 = -6, \\ y_2 = 0, \end{cases} \text{由题意, 点 P 坐标为} \left(-\frac{4}{3}, -\frac{14}{9}\right),$$

\therefore 符合条件的点 P 为 $\left(-\frac{8}{3}, \frac{10}{9}\right)$ 或 $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{14}{9}\right)$.

② 设直线 BC 的解析式为: $y=kx+b$,

$$\therefore \begin{cases} 0 = -6k + b, \\ -6 = b, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k = -1, \\ b = -6, \end{cases} \therefore \text{设直线 BC 的解析式为: } y = -x - 6.$$

过点 B 做 $BD \perp MN$ 于点 D, 如图,



则 $BM = \sqrt{2} BD$, $\therefore \sqrt{2} BM = 2BD = 2|x| = -2x$.

$$h = PM + NM + \sqrt{2} BM = (y_P - y_M) + (y_N - y_M) + 2|x| = y_P - y_M + y_N - y_M - 2x$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 - 4x - 6 - (-x - 6)\right] + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 6 - (-x - 6)\right] + (-2x)$$

$$= -x^2 - 6x + 12,$$

$$\therefore h = -(x+3)^2 + 21,$$

当 $x = -3$ 时, h 的最大值为 21,

$\because -5 \leq x \leq -2$, \therefore 当 $x = -5$ 时, $h = -(-5+3)^2 + 21 = 17$,

当 $x = -2$ 时, $h = -(-2+3)^2 + 21 = 20$, $\therefore h$ 的取值范围是: $17 \leq h \leq 21$.