

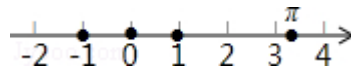
2013 年甘肃省天水市中考真题数学

一、选择题(本大题共 10 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

1. (4 分) 下列四个数中, 小于 0 的数是()

- A. -1
- B. 0
- C. 1
- D. π

解析: 如图所示:



$\because -1$ 在 0 的左边, $\therefore -1 < 0$.

答案: A.

2. (4 分) 下列计算正确的是()

- A. $a^3 + a^2 = 2a^5$
- B. $(-2a^3)^2 = 4a^6$
- C. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$
- D. $a^6 \div a^2 = a^3$

解析: A、 a^3 和 a^2 不是同类项不能合并, 故本选项错误;

B、 $(-2a^3)^2 = 4a^6$, 正确;

C、应为 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, 故本选项错误;

D、应为 $a^6 \div a^2 = a^4$, 故本选项错误.

答案: B.

3. (4 分) 下列图形中, 中心对称图形有()



- A. 1 个
- B. 2 个
- C. 3 个
- D. 4 个

解析: 第一个图形是中心对称图形;

第二个图形是中心对称图形;

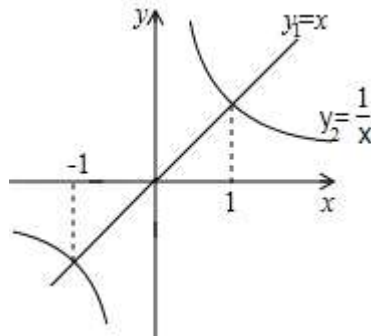
第三个图形是中心对称图形;

第四个图形不是中心对称图形.

故共 3 个中心对称图形.

答案: C.

4. (4分) 函数 $y_1=x$ 和 $y_2=\frac{1}{x}$ 的图象如图所示, 则 $y_1>y_2$ 的 x 取值范围是()

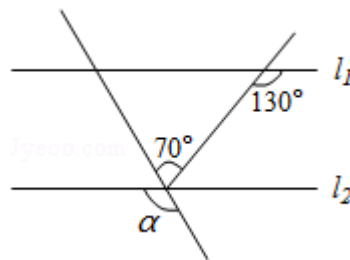


- A. $x < -1$ 或 $x > 1$
- B. $x < -1$ 或 $0 < x < 1$
- C. $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$
- D. $-1 < x < 0$ 或 $0 < x < 1$

解析: 由图象得: $y_1>y_2$ 的 x 取值范围是 $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$.

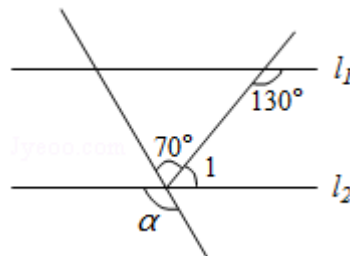
答案: C

5. (4分) 如图, 直线 $l_1 \parallel l_2$, 则 $\angle \alpha$ 为()



- A. 150°
- B. 140°
- C. 130°
- D. 120°

解析: $\because l_1 \parallel l_2$, $\therefore 130^\circ$ 所对应的同旁内角为 $\angle 1 = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$,
又 $\because \angle \alpha$ 与 $(70^\circ + \angle 1)$ 的角是对顶角, $\therefore \angle \alpha = 70^\circ + 50^\circ = 120^\circ$.



答案: D.

6. (4分) 一个三角形的两边长分别为 3 和 6, 第三边的边长是方程 $(x-2)(x-4)=0$ 的根, 则这个三角形的周长是()

- A. 11

B. 11 或 13

C. 13

D. 以上选项都不正确

解析：方程 $(x-2)(x-4)=0$ ，可得 $x-2=0$ 或 $x-4=0$ ，解得： $x=2$ 或 $x=4$ ，

当 $x=2$ 时，2，3，6 不能构成三角形，舍去；则 $x=4$ ，此时周长为 $3+4+6=13$ 。

答案：C

7. (4分) 一组数据：3，2，1，2，2 的众数，中位数，方差分别是()

A. 2，1，0.4

B. 2，2，0.4

C. 3，1，2

D. 2，1，0.2

解析：从小到大排列此数据为：1，2，2，2，3；数据 2 出现了三次最多为众数，2 处在第 3

位为中位数. 平均数为 $(3+2+1+2+2) \div 5=2$ ，方差为 $\frac{1}{5}[(3-2)^2+3 \times (2-2)^2+(1-2)^2]=0.4$ ，即中

位数是 2，众数是 2，方差为 0.4.

答案：B.

8. (4分) 从一块正方形的木板上锯掉 2m 宽的长方形木条，剩下的面积是 48m^2 ，则原来这块木板的面积是()

A. 100m^2

B. 64m^2

C. 121m^2

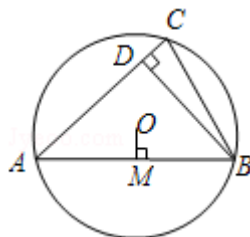
D. 144m^2

解析：设原来正方形木板的边长为 $x\text{m}$ 。由题意，可知 $x(x-2)=48$ ，

解得 $x_1=8$ ， $x_2=-6$ (不合题意，舍去)。所以 $8 \times 8=64$ 。

答案：B.

9. (4分) 如图，已知 $\odot O$ 的半径为 1，锐角 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， $BD \perp AC$ 于点 D， $OM \perp AB$ 于点 M，则 $\sin \angle CBD$ 的值等于()



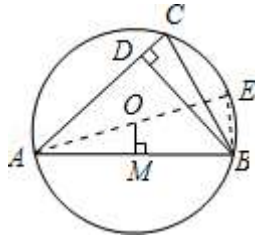
A. OM 的长

B. 2OM 的长

C. CD 的长

D. 2CD 的长

解析：连接 AO 并延长交圆于点 E，连接 BE. 则 $\angle C = \angle E$ ，

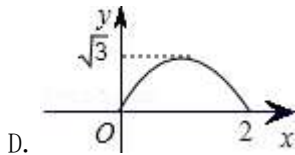
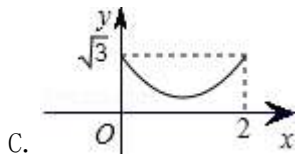
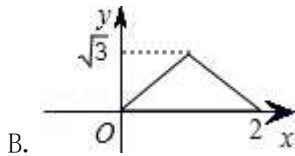
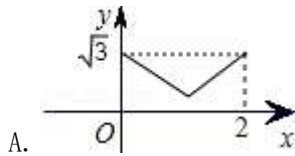
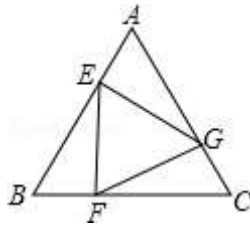


由 AE 为直径，且 $BD \perp AC$ ，得到 $\angle BDC = \angle ABE = 90^\circ$ ，
 所以 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCD$ 都是直角三角形，所以 $\angle CBD = \angle EAB$ 。
 又 $\triangle OAM$ 是直角三角形， $\therefore AO = 1$ ，

$\therefore \sin \angle CBD = \sin \angle EAB = \frac{OM}{OA} = OM$ ，即 $\sin \angle CBD$ 的值等于 OM 的长。

答案：A.

10. (4分) 如图，已知等边三角形 ABC 的边长为 2， E 、 F 、 G 分别是边 AB 、 BC 、 CA 的点，且 $AE = BF = CG$ ，设 $\triangle EFG$ 的面积为 y ， AE 的长为 x ，则 y 与 x 的函数图象大致是 ()



解析： $\because AE = BF = CG$ ，且等边 $\triangle ABC$ 的边长为 2， $\therefore BE = CF = AG = 2 - x$ ；

$\therefore \triangle AEG \cong \triangle BEF \cong \triangle CFG$ 。

在 $\triangle AEG$ 中， $AE = x$ ， $AG = 2 - x$ ，

$$\therefore S_{\triangle AEG} = \frac{1}{2} AE \times AG \times \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4} x(2-x); \therefore y = S_{\triangle ABC} - 3S_{\triangle AEG} = \sqrt{3} - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} x(2-x) = \sqrt{3} \left(\frac{3}{4} x^2 - \frac{3}{2} x + 1 \right).$$

\therefore 其图象为二次函数，且开口向上。

答案：C.

二、填空题(本大题共 8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

11. (4 分) 已知点 $M(3, -2)$, 将它先向左平移 4 个单位, 再向上平移 3 个单位后得到点 N , 则点 N 的坐标是_____.

解析: 原来点的横坐标是 3, 纵坐标是 -2, 向左平移 4 个单位, 再向上平移 3 个单位得到新点的横坐标是 $3-4=-1$, 纵坐标为 $-2+3=1$. 则点 N 的坐标是 $(-1, 1)$.

答案: $(-1, 1)$.

12. (4 分) 从 1 至 9 这 9 个自然数中任取一个数, 使它既是 2 的倍数又是 3 的倍数的概率是_____.

解析: \because 既是 2 的倍数, 又是 3 的倍数只有 6 一个, $\therefore P(\text{既是 2 的倍数, 又是 3 的倍数}) = \frac{1}{9}$.

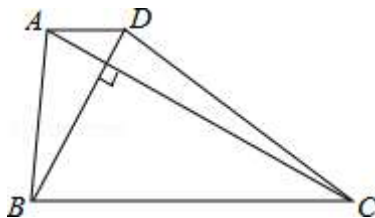
答案: $\frac{1}{9}$.

13. (4 分) 已知分式 $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$ 的值为零, 那么 x 的值是_____.

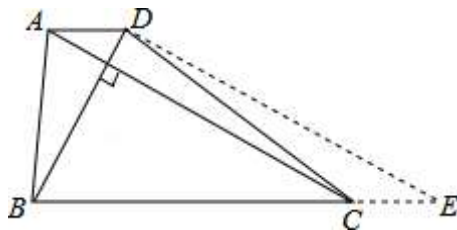
解析: 根据题意, 得 $x^2 - 1 = 0$ 且 $x + 1 \neq 0$, 解得 $x = 1$.

答案: 1.

14. (4 分) 如图所示, 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 对角线 $AC \perp BD$, 且 $AC = 12$, $BD = 5$, 则这个梯形中位线的长等于_____.



解析: 作 $DE \parallel AC$, 交 BC 的延长线于 E ,



则四边形 $ACED$ 为平行四边形, $\therefore AD = CE$.

$\because AC \perp BD$, $\therefore \angle BDE = 90^\circ$, \therefore 梯形的中位线长 $= \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(CE + BC) = \frac{1}{2}BE$,

$\because BE = \sqrt{BD^2 + DE^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, \therefore 梯形的中位线长 $= \frac{1}{2} \times 13 = 6.5$.

答案: 6.5.

15. (4分) 有两块面积相同的小麦试验田, 分别收获小麦 9000kg 和 15000kg. 已知第一块试验田每公顷的产量比第二块少 3000kg, 若设第一块试验田每公顷的产量为 x kg, 根据题意, 可得方程_____.

解析: 第一块试验田的面积为: $\frac{9000}{x}$, 第二块试验田的面积为: $\frac{15000}{x+3000}$. 方程应该为:

$$\frac{9000}{x} = \frac{15000}{x+3000}$$

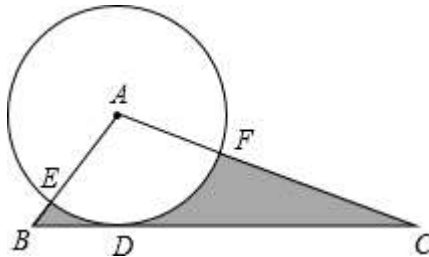
16. (4分) 已知 $\odot O_1$ 的半径为 3, $\odot O_2$ 的半径为 r , $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 只能画出两条不同的公共切线, 且 $O_1O_2=5$, 则 $\odot O_2$ 的半径为 r 的取值范围是_____.

解析: $\because \odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 只能画出两条不同的公共切线, \therefore 两圆的位置关系为相交,

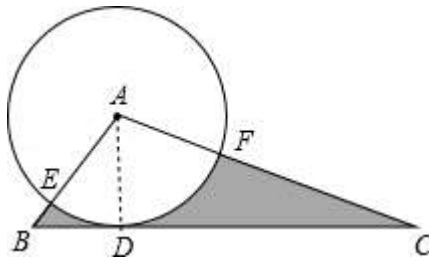
$\because \odot O_1$ 的半径为 3, $\odot O_2$ 的半径为 r , $O_1O_2=5$, $\therefore r-3 < 5 < r+3$ 解得: $2 < r < 8$.

答案: $2 < r < 8$.

17. (4分) 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=4$, 以点 A 为圆心, 2 为半径的 $\odot A$ 与 BC 相切于点 D , 交 AB 于点 E , 交 AC 于点 F , 且 $\angle EAF=80^\circ$, 则图中阴影部分的面积是_____.



解析: 连结 AD , 如图,



$\because \odot A$ 与 BC 相切于点 D , $\therefore AD \perp BC$, $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot BC$,

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\triangle ABC} - S_{\text{扇形AEF}} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{80 \cdot \pi \cdot 2^2}{360} = 4 - \frac{8}{9} \pi.$$

答案: $4 - \frac{8}{9} \pi$.

18. (4分) 观察下列运算过程: $S=1+3+3^2+3^3+\dots+3^{2012}+3^{2013}$ ①,

$$\text{①} \times 3 \text{ 得 } 3S=3+3^2+3^3+\dots+3^{2013}+3^{2014} \text{ ②,}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 得 } 2S=3^{2014}-1, S=\frac{3^{2014}-1}{2}.$$

运用上面计算方法计算: $1+5+5^2+5^3+\dots+5^{2013} =$ _____.

解析：设 $S=1+5+5^2+5^3+\dots+5^{2013}$ ①，

则 $5S=5+5^2+5^3+5^4+\dots+5^{2014}$ ②，

②-①得： $4S=5^{2014}-1$ ，所以 $S=\frac{5^{2014}-1}{4}$ 。

答案： $\frac{5^{2014}-1}{4}$ 。

三、解答题(共 78 分)

19. (10 分) I. 解不等式组 $\begin{cases} 4x-3 > x \\ x+4 < 2x-1 \end{cases}$ ，并把解集在数轴上表示出来。

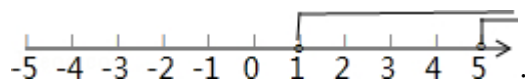
II. 计算： $(\pi-3)^0 + \sqrt{18} - 2\sin 45^\circ - (\frac{1}{8})^{-1}$ 。

解析：I、求出每个不等式的解集，找出不等式组的解集即可；

II、求出每一部分的值，代入后求出即可。

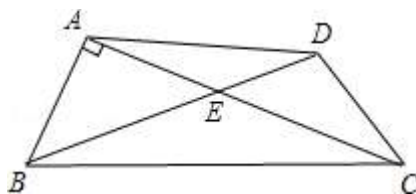
答案：I、 $\begin{cases} 4x-3 > x \text{ ①} \\ x+4 < 2x-1 \text{ ②} \end{cases}$ ，

\because 解不等式①得： $x > 1$ ，解不等式②得： $x > 5$ ， \therefore 不等式组的解集为 $x > 5$ ，
在数轴上表示不等式组的解集为：



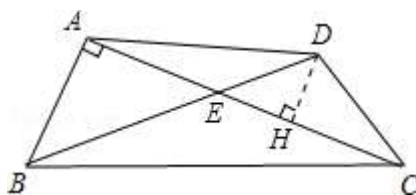
II、原式 $= 1 + 3\sqrt{2} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 8 = 1 + 3\sqrt{2} - \sqrt{2} - 8 = -7 + 2\sqrt{2}$ 。

20. (9 分) 如图，在四边形 ABCD 中，对角线 AC，BD 交于点 E， $\angle BAC=90^\circ$ ， $\angle CED=45^\circ$ ， $\angle DCE=30^\circ$ ， $DE=\sqrt{2}$ ， $BE=2\sqrt{2}$ 。求 CD 的长和四边形 ABCD 的面积。



解析：利用等腰直角三角形的性质得出 $EH=DH=1$ ，进而得出再利用直角三角形中 30° 所对边等于斜边的一半得出 CD 的长，求出 AC，AB 的长即可得出四边形 ABCD 的面积。

答案：过点 D 作 $DH \perp AC$ ，



$\because \angle CED=45^\circ$ ， $DH \perp EC$ ， $DE=\sqrt{2}$ ， $\therefore EH=DH$ ，

$\because EH^2 + DH^2 = ED^2, \therefore EH^2 = 1, \therefore EH = DH = 1,$

又 $\because \angle DCE = 30^\circ, \therefore DC = 2, HC = \sqrt{3},$

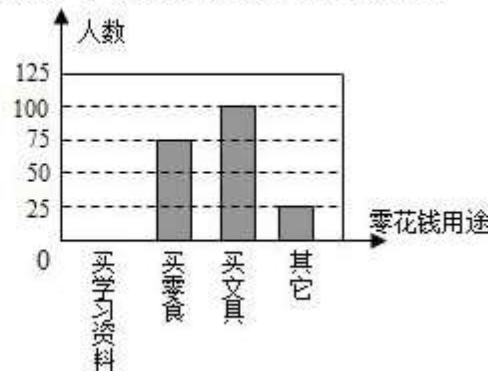
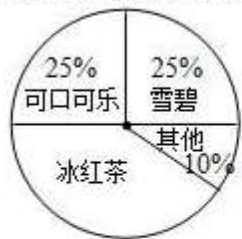
$\because \angle AEB = 45^\circ, \angle BAC = 90^\circ, BE = 2\sqrt{2}, \therefore AB = AE = 2, \therefore AC = 2 + 1 + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3},$

$\therefore S_{\text{四边形} ABCD} = \frac{1}{2} \times 2 \times (3 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2} \times 1 \times (3 + \sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3} + 9}{2}.$

21. (9分) 某班同学分三组进行数学活动，对七年级 400 名同学最喜欢喝的饮料情况，八年级 300 名同学零花钱的最主要用途情况，九年级 300 名同学完成家庭作业时间情况进行了全面调查，并分别用扇形图、频数分布直方图、表格来描述整理得到的数据。

七年级同学最喜欢喝的饮料种类情况统计图

八年级同学零花钱最主要用途情况统计图



时间	1 小时左右	1.5 小时左右	2 小时左右	2.5 小时左右
人数	50	80	120	50

根据以上信息，请回答下列问题：

- (1) 七年级 400 名同学中最喜欢喝“冰红茶”的人数是多少；
- (2) 补全八年级 300 名同学中零花钱的最主要用途情况频数分布直方图；
- (3) 九年级 300 名同学中完成家庭作业的平均时间大约是多少小时？(结果保留一位小数)

解析：(1) 先求出喝红茶的百分比，再乘总数。

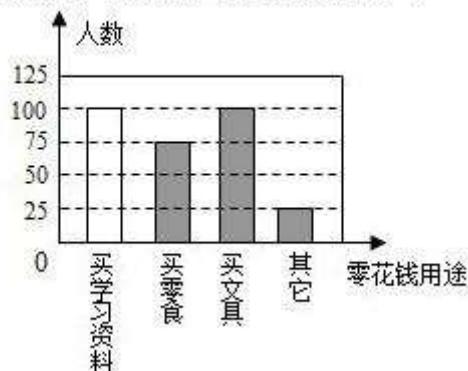
(2) 先让总数减其它三种人数，再根据数值画直方图。

(3) 用加权平均公式求即可。

答案：(1) 冰红茶的百分比为 $1 - 25\% - 25\% - 10\% = 40\%$ ，冰红茶的人数为 $400 \times 40\% = 160$ (人)，即七年级同学最喜欢喝“冰红茶”的人数是 160 人；

(2) 补全频数分布直方图如图所示。

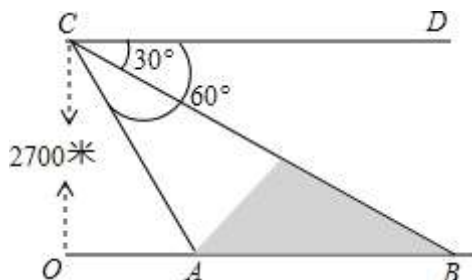
八年级同学零花钱最主要用途情况统计图



$$(3) \frac{1 \times 50 + 1.5 \times 80 + 2 \times 120 + 2.5 \times 50}{50 + 80 + 120 + 50} \approx 1.8 \text{ (小时)}.$$

答：九年级 300 名同学完成家庭作业的平均时间约为 1.8 小时。

22. (8 分) 如图所示，在天水至宝鸡(天宝)高速公路建设中需要确定某条隧道 AB 的长度，已知在离地面 2700 米高度 C 处的飞机上，测量人员测得正前方 AB 两点处的俯角分别是 60° 和 30° ，求隧道 AB 的长。(结果保留根号)



解析：易得 $\angle CAO = 60^\circ$ ， $\angle CBO = 30^\circ$ ，利用相应的正切值可得 AO, BO 的长，相减即可得到 AB 的长。

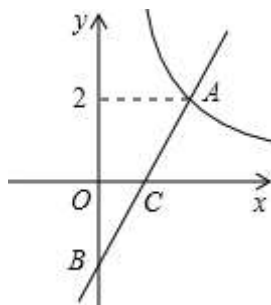
答案：由题意得 $\angle CAO = 60^\circ$ ， $\angle CBO = 30^\circ$ ，

$$\therefore OA = 2700 \times \tan 30^\circ = 2700 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 900\sqrt{3} \text{ m}, \quad OB = 2700 \times \tan 60^\circ = 2700\sqrt{3} \text{ m},$$

$$\therefore AB = 2700\sqrt{3} - 900\sqrt{3} = 1800\sqrt{3} \text{ (m)}.$$

答：隧道 AB 的长为 $1800\sqrt{3} \text{ m}$ 。

23. (8 分) 如图在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ 的图象与一次函数 $y = kx - k$ 的图象的交点为 $A(m, 2)$ 。



(1) 求一次函数的解析式；

(2) 设一次函数 $y = kx - k$ 的图象与 y 轴交于点 B，若点 P 是 x 轴上一点，且满足 $\triangle PAB$ 的面积是 4，直接写出 P 点的坐标。

解析：(1) 将 A 点坐标代入 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ ，求出 m 的值为 2，再将 (2, 2) 代入 $y = kx - k$ ，求出 k

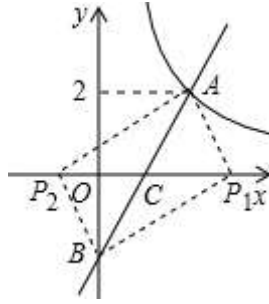
的值，即可得到一次函数的解析式；

(2) 将三角形以 x 轴为分界线，分为两个三角形计算，再把它们相加。

答案：(1) 将 $A(m, 2)$ 代入 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ 得， $m = 2$ ，则 A 点坐标为 $A(2, 2)$ ，

将 $A(2, 2)$ 代入 $y = kx - k$ 得， $2k - k = 2$ ，解得 $k = 2$ ，则一次函数解析式为 $y = 2x - 2$ ；

(2) \therefore 一次函数 $y = 2x - 2$ 与 x 轴的交点为 $C(1, 0)$ ，与 y 轴的交点为 $(0, -2)$ ，



$$S_{\triangle ABP} = S_{\triangle ACP} + S_{\triangle BCP}, \therefore \frac{1}{2} \times 2CP + \frac{1}{2} \times 2CP = 4, \text{ 解得 } CP = 2,$$

则 P 点坐标为 (3, 0), (-1, 0).

24. (10 分) 某工程机械厂根据市场需求, 计划生产 A、B 两种型号的大型挖掘机共 100 台, 该厂所筹生产资金不少于 22400 万元, 但不超过 22500 万元, 且所筹资金全部用于生产此两种型号挖掘机, 所生产的此两种型号挖掘机可全部售出, 此两型挖掘机的生产成本和售价如下表:

型号	A	B
成本(万元/台)	200	240
售价(万元/台)	250	300

- (1) 该厂对这两型挖掘机有哪几种生产方案?
- (2) 该厂如何生产能获得最大利润?
- (3) 根据市场调查, 每台 B 型挖掘机的售价不会改变, 每台 A 型挖掘机的售价将会提高 m 万元 ($m > 0$), 该厂应该如何生产获得最大利润? (注: 利润=售价-成本)

解析: (1) 在题目中, 每种型号的成本及总成本的上限和下限都已知, 所以设生产 A 型挖掘机 x 台, 则 B 型挖掘机 $(100-x)$ 台的情况下, 可列不等式 $22400 \leq 200x + 240(100-x) \leq 22500$, 解不等式, 取其整数解即可求解;

(2) 在知道生产方案以及每种利润情况下可列函数解析式 $W = 50x + 60(100-x) = 6000 - 10x$, 利用函数的自变量取值范围和其单调性即可求得函数的最值;

(3) 结合 (2) 得 $W = (50+m)x + 60(100-x) = 6000 + (m-10)x$, 在此, 必须把 $(m-10)$ 正负性考虑清楚, 即 $m > 10$, $m = 10$, $m < 10$ 三种情况, 最终才能得出结论. 即怎样安排, 完全取决于 m 的大小.

答案: (1) 设生产 A 型挖掘机 x 台, 则 B 型挖掘机 $(100-x)$ 台, 由题意得 $22400 \leq 200x + 240(100-x) \leq 22500$, 解得 $37.5 \leq x \leq 40$.

$\therefore x$ 取非负整数, $\therefore x$ 为 38, 39, 40. \therefore 有三种生产方案

- ① A 型 38 台, B 型 62 台;
- ② A 型 39 台, B 型 61 台;
- ③ A 型 40 台, B 型 60 台.

答: 有三种生产方案, 分别是 A 型 38 台, B 型 62 台; A 型 39 台, B 型 61 台; A 型 40 台, B 型 60 台.

(2) 设获得利润 W (万元), 由题意得 $W = 50x + 60(100-x) = 6000 - 10x$, \therefore 当 $x = 38$ 时, $W_{\text{最大}} = 5620$ (万元),

答: 生产 A 型 38 台, B 型 62 台时, 获得最大利润.

(3) 由题意得 $W = (50+m)x + 60(100-x) = 6000 + (m-10)x$

当 $0 < m < 10$, 则 $x = 38$ 时, W 最大, 即生产 A 型 38 台, B 型 62 台;

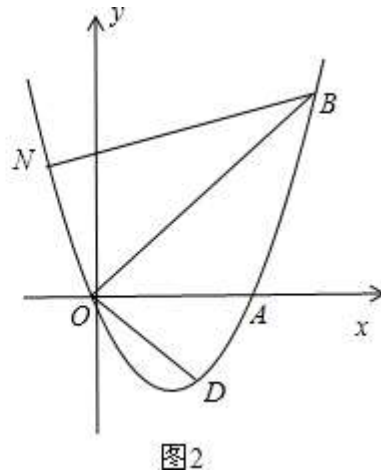
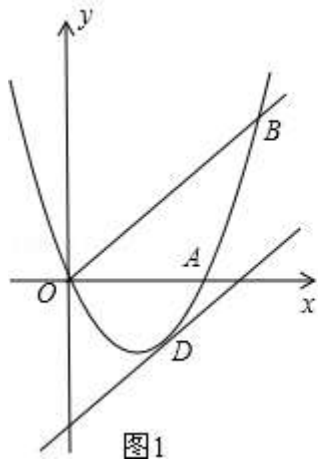
当 $m=10$ 时, $m-10=0$ 则三种生产方案获得利润相等;

当 $m>10$, 则 $x=40$ 时, W 最大, 即生产 A 型 40 台, B 型 60 台.

答: 当 $0<m<10$ 时, 生产 A 型 38 台, B 型 62 台获利最大; 当 $m=10$ 时, 3 种方案获利一样;

当 $m>10$ 时, 生产 A 型 40 台, B 型 60 台获利最大.

25. (12 分) 如图 1, 已知抛物线 $y=ax^2+bx$ ($a \neq 0$) 经过 A(3, 0)、B(4, 4) 两点.



(1) 求抛物线的解析式;

(2) 将直线 OB 向下平移 m 个单位长度后, 得到的直线与抛物线只有一个公共点 D, 求 m 的值及点 D 的坐标;

(3) 如图 2, 若点 N 在抛物线上, 且 $\angle NBO = \angle ABO$, 则在 (2) 的条件下, 求出所有满足 $\triangle POD \sim \triangle NOB$ 的点 P 坐标 (点 P、O、D 分别与点 N、O、B 对应).

解析: (1) 利用待定系数法求出二次函数解析式即可;

(2) 根据已知条件可求出 OB 的解析式为 $y=x$, 则向下平移 m 个单位长度后的解析式为: $y=x-m$. 由于抛物线与直线只有一个公共点, 意味着联立解析式后得到的一元二次方程, 其根的判别式等于 0, 由此可求出 m 的值和 D 点坐标;

(3) 综合利用几何变换和相似关系求解.

方法一: 翻折变换, 将 $\triangle NOB$ 沿 x 轴翻折;

方法二: 旋转变换, 将 $\triangle NOB$ 绕原点顺时针旋转 90° .

特别注意求出 P 点坐标之后, 该点关于直线 $y=-x$ 的对称点也满足题意, 即满足题意的 P 点有两个, 避免漏解.

答案: (1) \because 抛物线 $y=ax^2+bx$ ($a \neq 0$) 经过 A(3, 0)、B(4, 4)

$$\therefore \text{将 A 与 B 两点坐标代入得: } \begin{cases} 9a+3b=0 \\ 16a+4b=4 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \end{cases},$$

\therefore 抛物线的解析式是 $y=x^2-3x$.

(2) 设直线 OB 的解析式为 $y=k_1x$, 由点 B(4, 4), 得: $4=4k_1$, 解得: $k_1=1$

\therefore 直线 OB 的解析式为 $y=x$, \therefore 直线 OB 向下平移 m 个单位长度后的解析式为: $y=x-m$,

\therefore 点 D 在抛物线 $y=x^2-3x$ 上, \therefore 可设 $D(x, x^2-3x)$,

又 \because 点 D 在直线 $y=x-m$ 上, $\therefore x^2-3x=x-m$, 即 $x^2-4x+m=0$,

\therefore 抛物线与直线只有一个公共点, $\therefore \Delta=16-4m=0$, 解得: $m=4$,

此时 $x_1=x_2=2$, $y=x^2-3x=-2$, \therefore D 点的坐标为 (2, -2).

(3) \because 直线 OB 的解析式为 $y=x$, 且 A(3, 0),

\therefore 点 A 关于直线 OB 的对称点 A' 的坐标是 (0, 3),

根据轴对称性质和三线合一性质得出 $\angle A'BO = \angle ABO$,

设直线 $A'B$ 的解析式为 $y = k_2x + 3$, 过点 $(4, 4)$, $\therefore 4k_2 + 3 = 4$, 解得: $k_2 = \frac{1}{4}$,

\therefore 直线 $A'B$ 的解析式是 $y = \frac{1}{4}x + 3$,

$\because \angle NBO = \angle ABO$, $\angle A'BO = \angle ABO$, $\therefore BA'$ 和 BN 重合, 即点 N 在直线 $A'B$ 上,

\therefore 设点 $N(n, \frac{1}{4}n + 3)$, 又点 N 在抛物线 $y = x^2 - 3x$ 上, $\therefore \frac{1}{4}n + 3 = n^2 - 3n$,

解得: $n_1 = -\frac{3}{4}$, $n_2 = 4$ (不合题意, 舍去) $\therefore N$ 点的坐标为 $(-\frac{3}{4}, \frac{45}{16})$.

方法一:

如图 1, 将 $\triangle NOB$ 沿 x 轴翻折, 得到 $\triangle N_1OB_1$,

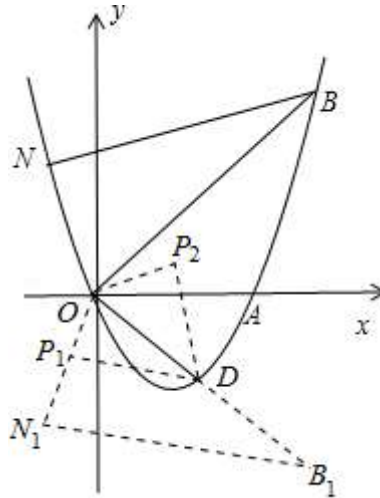


图1

则 $N_1(-\frac{3}{4}, -\frac{45}{16})$, $B_1(4, -4)$, $\therefore O, D, B_1$ 都在直线 $y = -x$ 上.

$\because \triangle P_1OD \sim \triangle NOB$, $\triangle NOB \cong \triangle N_1OB_1$, $\therefore \triangle P_1OD \sim \triangle N_1OB_1$, $\therefore \frac{OP_1}{ON_1} = \frac{OD}{OB_1} = \frac{1}{2}$,

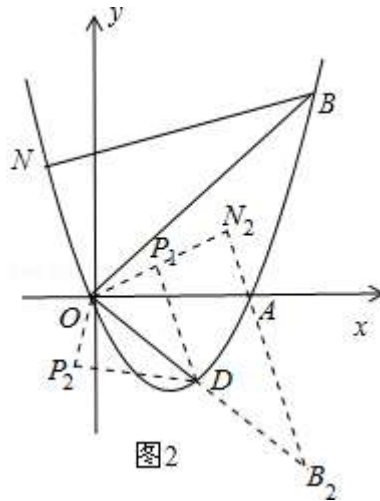
\therefore 点 P_1 的坐标为 $(-\frac{3}{8}, -\frac{45}{32})$.

将 $\triangle OP_1D$ 沿直线 $y = -x$ 翻折, 可得另一个满足条件的点 $P_2(\frac{45}{32}, \frac{3}{8})$,

综上所述, 点 P 的坐标是 $(-\frac{3}{8}, -\frac{45}{32})$ 或 $(\frac{45}{32}, \frac{3}{8})$.

方法二:

如图 2, 将 $\triangle NOB$ 绕原点顺时针旋转 90° , 得到 $\triangle N_2OB_2$,



则 $N_2(\frac{45}{16}, \frac{3}{4})$, $B_2(4, -4)$, $\therefore O, D, B_2$ 都在直线 $y=-x$ 上.

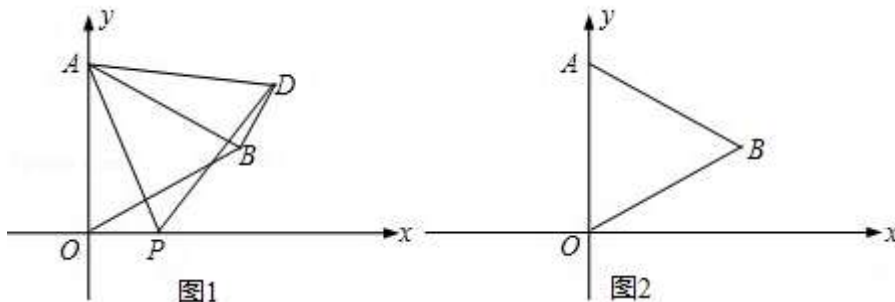
$\because \triangle P_1OD \sim \triangle NOB$, $\triangle NOB \cong \triangle N_2OB_2$, $\therefore \triangle P_1OD \sim \triangle N_2OB_2$, $\therefore \frac{OP_1}{ON_2} = \frac{OD}{OB_2} = \frac{1}{2}$,

\therefore 点 P_1 的坐标为 $(\frac{45}{32}, \frac{3}{8})$.

将 $\triangle OP_1D$ 沿直线 $y=-x$ 翻折, 可得另一个满足条件的点 $P_2(-\frac{3}{8}, -\frac{45}{32})$,

综上所述, 点 P 的坐标是 $(-\frac{3}{8}, -\frac{45}{32})$ 或 $(\frac{45}{32}, \frac{3}{8})$.

26. (12分) 如图 1, 在平面直角坐标系中, 已知 $\triangle AOB$ 是等边三角形, 点 A 的坐标是 $(0, 4)$, 点 B 在第一象限, 点 P 是 x 轴上的一个动点, 连接 AP , 并把 $\triangle AOP$ 绕着点 A 按逆时针方向旋转, 使边 AO 与 AB 重合, 得到 $\triangle ABD$.



(1) 求直线 AB 的解析式;

(2) 当点 P 运动到点 $(\sqrt{3}, 0)$ 时, 求此时 DP 的长及点 D 的坐标;

(3) 是否存在点 P , 使 $\triangle OPD$ 的面积等于 $\frac{\sqrt{3}}{4}$? 若存在, 请求出符合条件的点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

解析: (1) 过点 B 作 $BE \perp y$ 轴于点 E , 作 $BF \perp x$ 轴于点 F . 依题意得 $BF=OE=2$, 利用勾股定理求出 OF , 然后可得点 B 的坐标. 设直线 AB 的解析式是 $y=kx+b$, 把已知坐标代入可求解.

(2) 由 $\triangle ABD$ 由 $\triangle AOP$ 旋转得到, 证明 $\triangle ABD \cong \triangle AOP$. $AP=AD$, $\angle DAB=\angle PAO$, $\angle DAP=\angle BAO=60^\circ$, $\triangle ADP$ 是等边三角形. 利用勾股定理求出 DP . 在 $Rt\triangle BDG$ 中, $\angle BGD=90^\circ$, $\angle DBG=60^\circ$. 利用三角函数求出 $BG=BD \cdot \cos 60^\circ$, $DG=BD \cdot \sin 60^\circ$. 然后求出 OH , DH , 然后求出点 D 的坐标.

(3) 本题分三种情况进行讨论, 设点 P 的坐标为 $(t, 0)$:

①当 P 在 x 轴正半轴上时, 即 $t > 0$ 时, 关键是求出 D 点的纵坐标, 方法同(2), 在直角三角形 DBG 中, 可根据 BD 即 OP 的长和 $\angle DBG$ 的正弦函数求出 DG 的表达式, 即可求出 DH 的长, 根据已知的 $\triangle OPD$ 的面积可列出一个关于 t 的方程, 即可求出 t 的值.

②当 P 在 x 轴负半轴, 但 D 在 x 轴上方时. 即 $-\frac{4\sqrt{3}}{3} < t \leq 0$ 时, 方法同①类似, 也是在直角三角形 DBG 用 BD 的长表示出 DG , 进而求出 GF 的长, 然后同①.

③当 P 在 x 轴负半轴, D 在 x 轴下方时, 即 $t \leq -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 时, 方法同②.

综合上面三种情况即可求出符合条件的 t 的值.

答案: (1) 如图 1, 过点 B 作 $BE \perp y$ 轴于点 E , 作 $BF \perp x$ 轴于点 F .

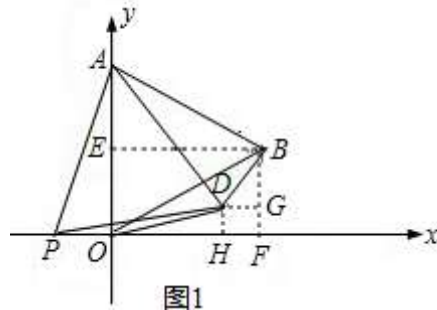


图1

由已知得: $BF=OE=2$, $OF=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$, \therefore 点 B 的坐标是 $(2\sqrt{3}, 2)$

设直线 AB 的解析式是 $y=kx+b$ ($k \neq 0$), 则有 $\begin{cases} 4=b \\ 2=2\sqrt{3}k+b \end{cases}$. 解得 $\begin{cases} k=-\frac{\sqrt{3}}{3} \\ b=4 \end{cases}$.

\therefore 直线 AB 的解析式是 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+4$;

(2) 如图 2, $\because \triangle ABD$ 由 $\triangle AOP$ 旋转得到,

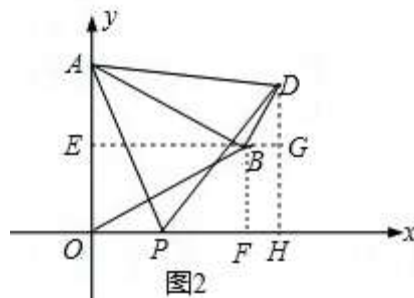


图2

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AOP$, $\therefore AP=AD$, $\angle DAB=\angle PAO$, $\therefore \angle DAP=\angle BAO=60^\circ$,

$\therefore \triangle ADP$ 是等边三角形, $\therefore DP=AP=\sqrt{4^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{19}$.

如图 2, 过点 D 作 $DH \perp x$ 轴于点 H , 延长 EB 交 DH 于点 G , 则 $BG \perp DH$.

方法(一)

在 $Rt\triangle BDG$ 中, $\angle BGD=90^\circ$, $\angle DBG=60^\circ$.

$$\therefore BG=BD \cdot \cos 60^\circ = \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, DG=BD \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore OH=EG=\frac{5}{2}\sqrt{3}, DH=\frac{7}{2} \therefore \text{点 D 的坐标为 } (\frac{5}{2}\sqrt{3}, \frac{7}{2})$$

方法(二)

易得 $\angle AEB = \angle BGD = 90^\circ$, $\angle ABE = \angle BDG$, $\therefore \triangle ABE \sim \triangle BDG$,

$$\therefore \frac{BG}{AE} = \frac{DG}{BE} = \frac{BD}{AB}; \text{ 而 } AE=2, BD=OP=\sqrt{3}, BE=2\sqrt{3}, AB=4,$$

$$\text{则有 } \frac{BG}{2} = \frac{DG}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 解得 } BG=\frac{\sqrt{3}}{2}, DG=\frac{3}{2}; \therefore OH=\frac{5}{2}\sqrt{3}, DH=\frac{7}{2}; \therefore \text{点 D 的坐标为 } (\frac{5}{2}\sqrt{3}, \frac{7}{2}).$$

(3) 假设存在点 P, 在它的运动过程中, 使 $\triangle OPD$ 的面积等于 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

设点 P 为 (t, 0), 下面分三种情况讨论:

$$\textcircled{1} \text{ 当 } t > 0 \text{ 时, 如图, } BD=OP=t, DG=\frac{\sqrt{3}}{2}t, \therefore DH=2+\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

$$\therefore \triangle OPD \text{ 的面积等于 } \frac{\sqrt{3}}{4}, \therefore \frac{1}{2}t(2+\frac{\sqrt{3}}{2}t) = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{解得 } t_1 = \frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3}, t_2 = \frac{-\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3} \text{ (舍去)}, \therefore \text{点 } P_1 \text{ 的坐标为 } (\frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3}, 0).$$

$$\textcircled{2} \therefore \text{当 D 在 y 轴上时, 根据勾股定理求出 } BD = \frac{4\sqrt{3}}{3} = OP,$$

$$\therefore \text{当 } -\frac{4\sqrt{3}}{3} < t \leq 0 \text{ 时, 如图, } BD=OP=-t, DG=-\frac{\sqrt{3}}{2}t, \therefore GH=BF=2-(-\frac{\sqrt{3}}{2}t)=2+\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

$$\therefore \triangle OPD \text{ 的面积等于 } \frac{\sqrt{3}}{4}, \therefore -\frac{1}{2}t(2+\frac{\sqrt{3}}{2}t) = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ 解得 } t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, t_2 = -\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } P_2 \text{ 的坐标为 } (-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0), \text{ 点 } P_3 \text{ 的坐标为 } (-\sqrt{3}, 0).$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } t \leq -\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ 时, 如图 3, } BD=OP=-t, DG=-\frac{\sqrt{3}}{2}t, \therefore DH=-\frac{\sqrt{3}}{2}t-2.$$

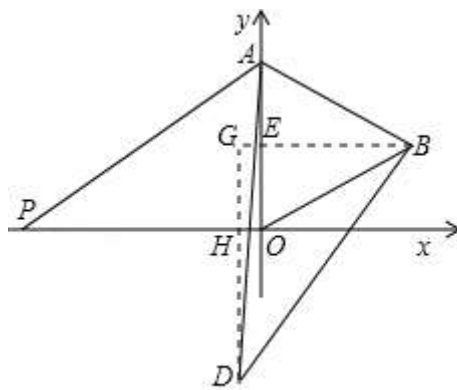


图3

$$\therefore \triangle OPD \text{ 的面积等于 } \frac{\sqrt{3}}{4}, \therefore \frac{1}{2}(-t)[-2+\frac{\sqrt{3}}{2}t] = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\text{解得 } t_1 = \frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3} \text{ (舍去)}, t_2 = \frac{-\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3}, \therefore \text{点 } P_4 \text{ 的坐标为 } (\frac{-\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3}, 0),$$

综上所述，点 P 的坐标分别为 $P_1(\frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3}, 0)$ 、 $P_2(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ 、 $P_3(-\sqrt{3}, 0)$ 、 $P_4(-\frac{-\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3}, 0)$ 。