2012年陕西省高考文科数学试题

一、选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求（本大题共10小题，每小题5分，共50分）

1. 集合$M=\{x\,|\,\lg x>0\}$，$N=\{x\,|\,x^2\le 4\}$，则$M\bigcap N=$（　C　）

A。 $(1,2)$　　　B。 $[1,2)$　　　C。 $(1,2]$　　　D。 $[1,2]$

2. 下列函数中，既是奇函数又是增函数的为（　D　）

A。 $y=x+1$　　　B。 $y=-x^2$　　　C。 $y=\frac{1}{x}$　　　D。 $y=x|x|$

3.对某商店一个月内每天的顾客人数进行了统计，得到样本的茎叶图（如图所示），则改样本的中位数、众数、极差分别是　（　A　）

1	2 5
2	0 2 3 3
3	1 2 4 4 8 9
4	5 5 5 7 7 8 8 9
5	0 0 1 1 4 7 9
6	1 7 8

A．46，45，56　　　　B．46，45，53

C．47，45，56　　　　D．45，47，53

4. 设$a,b\in R$，i是虚数单位，则“$ab=0$”是“复数$a+\frac{b}{i}$为纯虚数”的（　B　）

A。充分不必要条件　　　　B。 必要不充分条件

C。 充分必要条件　　　　D。 既不充分也不必要条件

5．下图是计算某年级500名学生期末考试（满分为100分）及格率q的程序框图，则图中空白框内应填入（　D　）

A. q= $\cos\left\{\sqrt{5CB_1\perp BA_1 2-+b^2}\right\}$ $\vec{b}C_1\angle CAB\left|f(1)\right|\le 1$ $\frac{N}{M}$

B q= $\frac{M}{N}$

C q= $\frac{N}{M+N}$

D.q= $\dfrac{M}{M+N}$

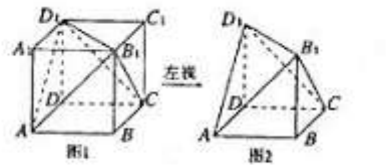
6. 已知圆 $C:x^2+y^2-4x=0$，l 过点 $P(3,0)$ 的直线，则（　　　）

A。l 与 C 相交　　　B。 l 与 C 相切　　　C。l 与 C 相离　　　D. 以上三个选项均有可能

7．设向量 $\vec{a}$ =（1. $\cos\theta$）与 $\vec{b}$ =（-1， $2\cos\theta$）垂直，则 $\cos 2\theta$ 等于 （　C　）

A $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　　B $\dfrac{1}{2}$　　　C .0　　　D.-1

8. 将正方形（如图 1 所示）截去两个三棱锥，得到图 2 所示的几何体，则该几何体的左视图为 （　B　）



（A）　（B）　（C）　（D）

9.设函数 f（x）= $\dfrac{2}{x}$ +lnx 则　　（　D　）

A．x= $\dfrac{1}{2}$ 为 f(x)的极大值点　　　B．x= $\dfrac{1}{2}$ 为 f(x)的极小值点

C．x=2 为 f(x)的极大值点　　　D．x=2 为 f(x)的极小值点

10.小王从甲地到乙地的时速分别为 a 和 b（a<b），其全程的平均时速为 v，则 （　A　）

A.a<v< $\sqrt{ab}$　　B.v= $\sqrt{ab}$　　C. $\sqrt{ab}$ <v< $\dfrac{a+b}{2}$　　D.v= $\dfrac{a+b}{2}$

二。 填空题：把答案填写在答题卡相应的题号后的横线上（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11 设函数发 f（x）= $\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0,\\ (\frac{1}{2})^x, & x<0,\end{cases}$，则 f（f（-4））= <u>4</u>

12. 观察下列不等式

$1+\frac{1}{2^2}<\frac{3}{2}$

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}<\frac{5}{3}$，

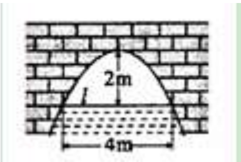
$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}<\frac{5}{3}$

……

照此规律，第五个不等式为 $\underline{1+\frac{1}{2^2}\pm\frac{1}{3^2}\pm\frac{1}{4^2}\pm\frac{1}{5^2}\pm\frac{1}{6^2}\le\frac{11}{6}}$

13. 在三角形 ABC 中，角 A,B,C 所对应的长分别为 a，b，c，若 a=2 ，B=$\frac{\pi}{6}$，c=2$\sqrt{3}$，则 b= 2______

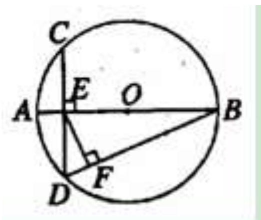
14. 右图是抛物线形拱桥，当水面在l时，拱顶离水面 2 米，水面宽 4 米，水位下降 1 米后，水面宽 $\underline{2\sqrt{6}}$ 米。



15. **（考生注意：请在下列三题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题评分）**

A。（不等式选做题）若存在实数 x 使$|x-a|+|x-1|\le 3$成立，则实数 a 的取值范围是 $\underline{-2\leqslant a\leqslant 4}$______。

B。（几何证明选做题）如图，在圆 O 中，直径 AB 与弦 CD 垂直，垂足为 E，$EF\perp DB$，垂足为 F，若 $AB=6$，$AE=1$，则 $DF\cdot DB=$____5______。



C。（坐标系与参数方程）直线$2\rho\cos\theta=1$与圆$\rho=2\cos\theta$相交的弦长为____$\sqrt{3}$_______。

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤（本大题共 6 小题，共 75 分）

16.已知等比数列$\{a_n\}$的公比为 q=-$\frac{1}{2}$.

（1）若a_3=$\frac{1}{4}$，求数列$\{a_n\}$的前 n 项和;

（Ⅱ）证明：对任意$k \in N_+$，a_k，a_{k+2}，a_{k+1}成等差数列。

解 （Ⅰ）由 $a_3 = a_1q^2 = \frac{1}{4}$ 及 $q = -\frac{1}{2}$，得 $a_1 = 1$，

所以数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n = \dfrac{1\times[1-(-\frac{1}{2})^n]}{1-(-\frac{1}{2})} = \dfrac{2+(-\frac{1}{2})^{n-1}}{3}$.

（Ⅱ）证明 对任意 $k \in \mathbf{N}_+$，

$2a_{k+2} - (a_k + a_{k+1}) = 2a_1q^{k+1} - (a_1q^{k-1} + a_1q^k) = a_1q^{k-1}(2q^2 - q - 1)$，

由 $q = -\frac{1}{2}$ 得 $2q^2 - q - 1 = 0$，故 $2a_{k+2} - (a_k + a_{k+1}) = 0$.

所以，对任意 $k \in \mathbf{N}_+$，a_k，a_{k+2}，a_{k+1} 成等差数列.

17.（本小题满分 12 分）

函数 $f(x) = A\sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) + 1$（$A > 0, \omega > 0$）的最大值为 3， 其图像相邻两条对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$，

（1）求函数 $f(x)$ 的解析式;

（2）设$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$，则 $f(\frac{\alpha}{2}) = 2$，求α 的值。

解 （Ⅰ）∵ 函数 $f(x)$ 的最大值为 3， ∴ $A + 1 = 3$，即 $A = 2$，

∵ 函数图像的相邻两条对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$， ∴ 最小正周期 $T = \pi$，

∴ $\omega = 2$， 故函数 $f(x)$ 的解析式为 $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6}) + 1$.

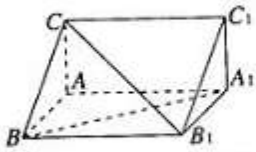
（Ⅱ）∵ $f(\frac{\alpha}{2}) = 2\sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) + 1 = 2$， 即 $\sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$，

∵ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$， ∴ $-\frac{\pi}{6} < \alpha - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}$，

∴ $\alpha - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$， 故 $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

18. （本小题满分 12 分）

直三棱柱 ABC- $A_1B_1C_1$ 中，AB=A A_1 ，$\angle CAB$ = $\frac{\pi}{2}$

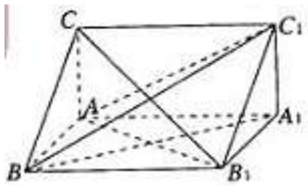


（Ⅰ）证明$CB_1 \perp BA_1$;

（Ⅱ）已知 AB=2，BC=$\sqrt{5}$，求三棱锥 C_1-ABA_1 的体积

解 （Ⅰ）如图，连结 AB_1，

∵ $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，$\angle CAB=\frac{\pi}{2}$，



∴ $AC\perp$ 平面 ABB_1A_1，故 $AC\perp BA_1$。

又∵ $AB=AA_1$，∴ 四边形 ABB_1A_1 是正方形，

∴ $BA_1\perp AB_1$，又 $CA\cap AB_1=A$，

∴ $BA_1\perp$ 平面 CAB_1，　故 $CB_1\perp BA_1$。

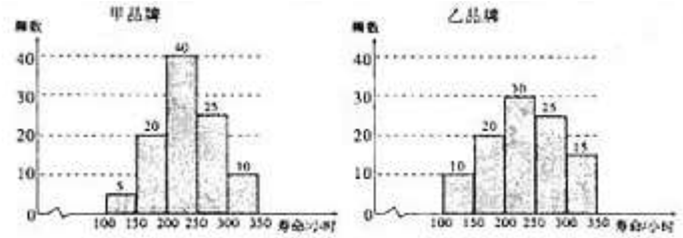
（Ⅱ）∵ $AB=AA_1=2$，$BC=\sqrt{5}$，　∴ $AC=A_1C_1=1$，

由（Ⅰ）知，$A_1C_1\perp$ 平面 ABA_1，

∴ $V_{C_1-ABA_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABA_1}\cdot A_1C_1=\frac{1}{3}\times 2\times 1=\frac{2}{3}$.

19（本小题满分 12 分）

假设甲乙两种品牌的同类产品在某地区市场上销售量相等，为了解他们的使用寿命，现从两种品牌的产品中分别随机抽取 100 个进行测试，结果统计如下：



（Ⅰ）估计甲品牌产品寿命小于 200 小时的概率；

（Ⅱ）这两种品牌产品中，，某个产品已使用了 200 小时，试估计该产品是甲品牌的概率。

解 （Ⅰ）甲品牌产品寿命小于 200 小时的频率为 $\frac{5+20}{100}=\frac{1}{4}$，用频率估计概率，所以，甲品牌产品寿命小于 200 小时的概率为 $\frac{1}{4}$.

（Ⅱ）根据抽样结果，寿命大于 200 小时的产品有 $75+70=145$ 个，

其中甲品牌产品是 75 个，所以在样本中，寿命大于 200 小时的产品是甲品牌的频率是 $\frac{75}{145}=\frac{15}{29}$，用频率估计概率，所以已使用了 200 小时的该产品是甲品牌的概率为 $\frac{15}{29}$.

20. （本小题满分 13 分）

已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+y^2=1$，椭圆 C_2 以 C_1 的长轴为短轴，且与 C_1 有相同的离心率。

（1）求椭圆 C_2 的方程；

（2）设 O 为坐标原点，点 A，B 分别在椭圆 C_1 和 C_2 上，$\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}$，求直线 AB 的方程。

解 （Ⅰ）由已知可设椭圆 C_2 的方程为 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{4}=1(a>2)$，

其离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $\frac{\sqrt{a^2-4}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $a=4$． 故椭圆 C_2 的方程为 $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$．

（Ⅱ）**解法一** A、B 两点的坐标分别记为 (x_A,y_A)，(x_B,y_B)，

由 $\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}$ 及（Ⅰ）知，O，A，B 三点共线且点 A、B 不在 y 轴上，

因此可设直线 AB 的方程为 $y=kx$．

将 $y=kx$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 中，得 $(1+4k^2)x^2=4$， 所以 $x_A{}^2=\frac{4}{1+4k^2}$，

将 $y=kx$ 代入 $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$ 中，得 $(4+k^2)x^2=16$， 所以 $x_B{}^2=\frac{16}{4+k^2}$，

又由 $\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}$ 得 $x_B{}^2=4x_A{}^2$， 即 $\frac{16}{4+k^2}=\frac{16}{1+4k^2}$，

解得 $k=\pm1$， 故直线 AB 的方程为 $y=x$ 或 $y=-x$．

解法二 A、B 两点的坐标分别记为 (x_A,y_A)，(x_B,y_B)，

由 $\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}$ 及（Ⅰ）知，O，A，B 三点共线且点 A、B 不在 y 轴上，

因此可设直线 AB 的方程为 $y=kx$．

将 $y=kx$ 代入 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 中，得 $(1+4k^2)x^2=4$， 所以 $x_A{}^2=\frac{4}{1+4k^2}$，

由 $\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}$ 得 $x_B{}^2=\frac{16}{1+4k^2}$，$y_B{}^2=\frac{16k^2}{1+4k^2}$，

将 $x_B{}^2$，$y_B{}^2$ 代入 $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$ 中，得 $\frac{4+k^2}{1+4k^2}=1$，

即 $4+k^2=1+4k^2$， 解得 $k=\pm1$，

故直线 AB 的方程为 $y=x$ 或 $y=-x$．

21。 （本小题满分 14 分）

设函数 $f_n(x)=x^n+bx+c \quad (n\in N_+,b,c\in R)$

（1）设 $n\ge2$，$b=1,\ \ c=-1$，证明：$f_n(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内存在唯一的零点；

（2）设 n 为偶数，$\left|f(-1)\right|\le1$，$\left|f(1)\right|\le1$，求 b+3c 的最小值和最大值；

（3）设 $n=2$，若对任意 $x_1,x_2\in[-1,1]$，有 $|f_2(x_1)-f_2(x_2)|\le4$，求 b 的取值范围；

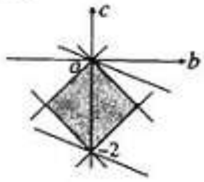
解 (Ⅰ) 当 $b=1$, $c=-1$, $n\geqslant 2$ 时, $f(x)=x^n+x-1$.

$\because\ f(\frac{1}{2})f(1)=(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2})\times 1<0$, $\quad\therefore\ f(x)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 内存在零点.

又当 $x\in(\frac{1}{2},1)$ 时, $f'(x)=nx^{n-1}+1>0$,

$\therefore\ f(x)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 上是单调递增的, $\quad\therefore\ f(x)$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 内存在唯一零点.

(Ⅱ) 解法一 由题意知 $\begin{cases}-1\leqslant f(-1)\leqslant 1,\\ -1\leqslant f(1)\leqslant 1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0\leqslant b-c\leqslant 2,\\ -2\leqslant b+c\leqslant 0.\end{cases}$



由图像知, $b+3c$ 在点 $(0,-2)$ 取到最小值 -6,
在点 $(0,0)$ 取到最大值 0.
$\therefore\ b+3c$ 的最小值为 -6, 最大值为 0.

解法二 由题意知

$-1\leqslant f(1)=1+b+c\leqslant 1$, 即 $-2\leqslant b+c\leqslant 0$,

$-1\leqslant f(-1)=1-b+c\leqslant 1$, 即 $-2\leqslant -b+c\leqslant 0$,

① × 2 + ② 得

$$-6\leqslant 2(b+c)+(-b+c)=b+3c\leqslant 0,$$

当 $b=0$, $c=-2$ 时, $b+3c=-6$; 当 $b=c=0$ 时, $b+3c=0$,
所以 $b+3c$ 的最小值为 -6, 最大值为 0.

解法三 由题意知 $\begin{cases}f(-1)=1-b+c,\\ f(1)=1+b+c,\end{cases}$

解得 $b=\dfrac{f(1)-f(-1)}{2}$, $c=\dfrac{f(1)+f(-1)-2}{2}$,

$\therefore\ b+3c=2f(1)+f(-1)-3$.

又 $\because -1\leqslant f(-1)\leqslant 1$, $-1\leqslant f(1)\leqslant 1$, $\quad\therefore\ -6\leqslant b+3c\leqslant 0$,
当 $b=0$, $c=-2$ 时, $b+3c=-6$; 当 $b=c=0$ 时, $b+3c=0$,
所以 $b+3c$ 的最小值为 -6, 最大值为 0.

(Ⅲ) 当 $n=2$ 时, $f(x)=x^2+bx+c$.
对任意 x_1, $x_2\in[-1,1]$ 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 4$ 等价于 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值与最小值之差 $M\leqslant 4$. 据此分类讨论如下:

(ⅰ) 当 $|\frac{b}{2}|>1$, 即 $|b|>2$ 时, $M=|f(1)-f(-1)|=2|b|>4$, 与题设矛盾.

(ⅱ) 当 $-1\leqslant-\frac{b}{2}<0$, 即 $0<b\leqslant 2$ 时,

$$M=f(1)-f(-\frac{b}{2})=(\frac{b}{2}+1)^2\leqslant 4 \text{ 恒成立.}$$

(ⅲ) 当 $0\leqslant-\frac{b}{2}\leqslant 1$, 即 $-2\leqslant b\leqslant 0$ 时,

$$M=f(-1)-f(-\frac{b}{2})=(\frac{b}{2}-1)^2\leqslant 4 \text{ 恒成立.}$$

综上可知, $-2\leqslant b\leqslant 2$.

注: (ⅱ), (ⅲ) 也可合并证明如下:

用 $\max\{a,b\}$ 表示 a, b 中的较大者. 当 $-1\leqslant-\frac{b}{2}\leqslant 1$, 即 $-2\leqslant b\leqslant 2$ 时,

$$\begin{aligned}M&=\max\{f(1),f(-1)\}-f(-\frac{b}{2})\\&=\frac{f(-1)+f(1)}{2}+\frac{|f(-1)-f(1)|}{2}-f(-\frac{b}{2})\\&=1+c+|b|-(-\frac{b^2}{4}+c)\\&=(1+\frac{|b|}{2})^2\leqslant 4 \text{ 恒成立.}\end{aligned}$$