2015年江苏省常州市中考真题数学

一、选择题(每小题2分，共16分)

1.　-3的绝对值是(　　)

A.3

B.-3

C.$\frac{1}{3}$

D.$-\frac{1}{3}$

解析：根据一个负数的绝对值等于它的相反数得出.|-3|=-(-3)=3.

答案：A

2.要使分式$\frac{3}{x-2}$有意义，则x的取值范围是(　　)

A.x＞2

B.x＜2

C.x≠-2

D.x≠2

解析：要使分式$\frac{3}{x-2}$有意义，须有x-2≠0，即x≠2，

答案：D

3.下列“慢行通过，注意危险，禁止行人通行，禁止非机动车通行”四个交通标志图(黑白阴影图片)中为轴对称图形的是(　　)

A. 

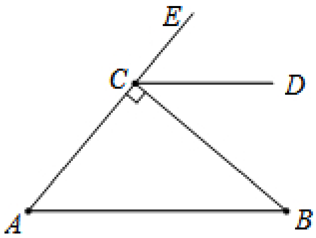
B. 

C. 

D.

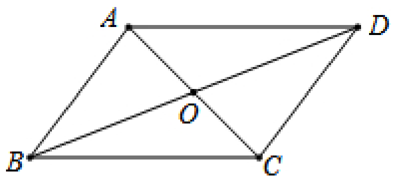
解析：A、不是轴对称图形，故本选项错误；
B、是轴对称图形，故本选项正确；
C、不是轴对称图形，故本选项错误；
D、不是轴对称图形，故本选项错误.
答案：B

4.如图，BC⊥AE 于点 C，CD∥AB，∠B=40°，则∠ECD 的度数是(　　)



A.70°
B.60°
C.50°
D.40°
解析：∵BC⊥AE，∴∠ACB=90°，
在 Rt△ABC 中，∠B=40°，∴∠A=90°－∠B=50°，
∵CD∥AB，∴∠ECD=∠A=50°.
答案：C

5.如图，▱ABCD 的对角线 AC、BD 相交于点 O，则下列说法一定正确的是(　　)



A.AO=OD
B.AO⊥OD
C.AO=OC
D.AO⊥AB
解析：对角线不一定相等，A 错误；
对角线不一定互相垂直，B 错误；
对角线互相平分，C 正确；
对角线与边不一定垂直，D 错误.
答案：C

6. 已知 a=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，b=$\frac{\sqrt{3}}{3}$，c=$\frac{\sqrt{5}}{5}$，则下列大小关系正确的是(　　)

A. a＞b＞c
B. c＞b＞a
C. b＞a＞c
D. a＞c＞b

解析：∵a=$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，b=$\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，c=$\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，且 $\sqrt{2}<\sqrt{3}<\sqrt{5}$，

∴$\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{5}}$，即 a＞b＞c.

答案：A.

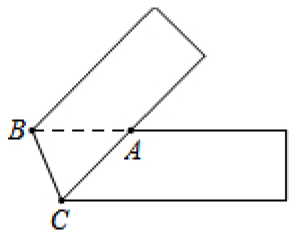
7. 已知二次函数 $y=x^2+(m-1)x+1$，当 x＞1 时，y 随 x 的增大而增大，而 m 的取值范围是(　　)
A. m=-1
B. m=3
C. m≤-1
D. m≥-1

解析：抛物线的对称轴为直线 x=-$\frac{m-1}{2}$，

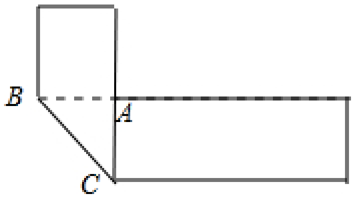
∵当 x＞1 时，y 的值随 x 值的增大而增大，∴-$\frac{m-1}{2}$≤1，解得 m≥-1.

答案：D

8. 将一张宽为 4cm 的长方形纸片(足够长)折叠成如图所示图形，重叠部分是一个三角形，则这个三角形面积的最小值是(　　)



A. $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ cm^2
B. 8cm^2
C. $\frac{16}{3}\sqrt{3}$ cm^2
D. 16cm^2
解析：如图，当 AC⊥AB 时，三角形面积最小，



∵∠BAC=90° ∠ACB=45° ∴AB=AC=4cm，∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8cm^2$.

答案：B

二、填空题(每小题 2 分，共 20 分)

9.计算$(\pi-1)^0+2^{-1}$=________.
解析：分别根据零指数幂，负整数指数幂的运算法则计算，然后根据实数的运算法则求得计算结果.$(\pi-1)^0+2^{-1}=1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$.

答案：$1\frac{1}{2}$

10. 太阳半径约为 696 000 千米，数字 696 000 用科学记数法表示为________.
解析：$696\ 000=6.96\times 10^5$.
答案：6.96×10^5

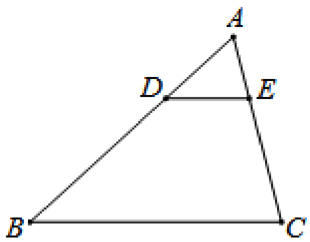
11.分解因式：$2x^2-2y^2$=________.
解析：$2x^2-2y^2=2(x^2-y^2)=2(x+y)(x-y)$.
答案：$2(x+y)(x-y)$.

12.已知扇形的圆心角为 120°，弧长为 6π，则扇形的面积是________.

解析：设扇形的半径为 r.则$\frac{120\pi r}{180}=6\pi$，解得 r=9，∴扇形的面积=$\frac{120\pi\times 9^2}{360}=27\pi$.

答案：27π

13.如图，在△ABC 中，DE∥BC，AD：DB=1：2，DE=2，则 BC 的长是________.



解析：∵DE∥BC，∴$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$，

∵AD：DB=1：2，DE=2，∴$\frac{1}{1+2}=\frac{2}{BC}$，解得 BC=6.

答案：6

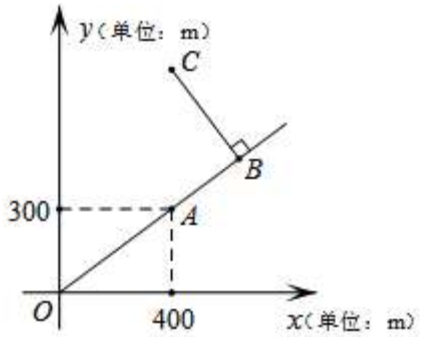
14.已知 x=2 是关于 x 的方程 a(x+1)=$\frac{1}{2}$a+x 的解，则 a 的值是________.

解析：把 x=2 代入方程得：3a=$\frac{1}{2}$a+2，解得：a=$\frac{4}{5}$.

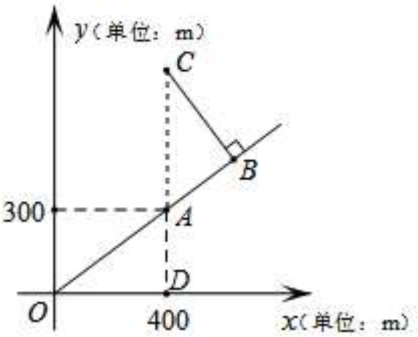
答案：$\frac{4}{5}$.

15.二次函数 $y=-x^2+2x-3$ 图象的顶点坐标是________.
解析：∵$y=-x^2+2x-3=-(x^2-2x+1)-2=-(x-1)^2-2$，故顶点的坐标是(1，-2).
答案：(1，-2)

16.如图是根据某公园的平面示意图建立的平面直角坐标系，公园的入口位于坐标原点 O，古塔位于点 A(400，300)，从古塔出发沿射线 OA 方向前行 300m 是盆景园 B，从盆景园 B 向左转 90° 后直行 400m 到达梅花阁 C，则点 C 的坐标是________.



解析：连接 AC，由题意可得：AB=300m，BC=400m，



在△AOD 和△ACB 中，∵$\begin{cases} AD=AB, \\ \angle ODA=\angle ABC, \\ DO=BC, \end{cases}$∴△AOD≌△ACB(SAS)，∴∠CAB=∠OAD，

∵B、O 在一条直线上，
∴C，A，D 也在一条直线上，∴AC=AO=500m，则 CD=AC=AD=800m，∴C 点坐标为：(400，800).
答案：(400，800)

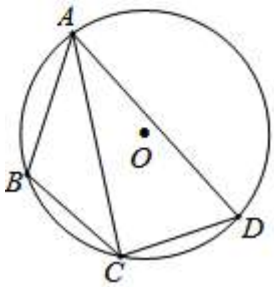
17.数学家歌德巴赫通过研究下面一系列等式，作出了一个著名的猜想.

4=2+2；　　　　　　　12=5+7；
6=3+3；　　　　　　　14=3+11=7+7；
8=3+5；　　　　　　　16=3+13=5+11；
10=3+7=5+5　　　　　18=5+13=7+11；
…
通过这组等式，你发现的规律是____________________(请用文字语言表达).

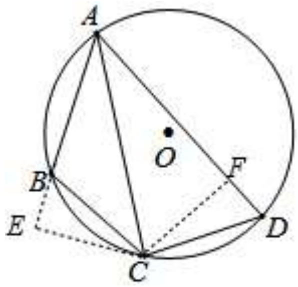
解析：此规律用文字语言表达为：所有大于2的偶数都可以写成两个素数之和.

答案：所有大于2的偶数都可以写成两个素数之和

18.如图，在⊙O的内接四边形ABCD中，AB=3，AD=5，∠BAD=60°，点C为弧BD的中点，则AC的长是________.



解析：过C作CE⊥AB于E，CF⊥AD于F，



则∠E=∠CFD=∠CFA=90°，

∵点C为弧BD的中点，∴弧BC=弧CD，∴∠BAC=∠DAC，BC=CD，

∵CE⊥AB，CF⊥AD，∴CE=CF，

∵A、B、C、D四点共圆，∴∠D=∠CBE，

在△CBE和△CDF中，$\begin{cases}\angle CBE=\angle D,\\ \angle E=\angle CFD,\\ CE=CF,\end{cases}$∴△CBE≌△CDF，∴BE=DF，

在△AEC和△AFC中，$\begin{cases}\angle E=\angle AFC,\\ \angle EAC=\angle FAC,\\ AC=AC,\end{cases}$∴△AEC≌△AFC，∴AE=AF，

设BE=DF=x，

∵AB=3，AD=5，∴AE=AF=x+3，∴5=x+3+x，解得：x=1，即AE=4，∴AC=$\frac{AE}{\cos 30^\circ}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$，

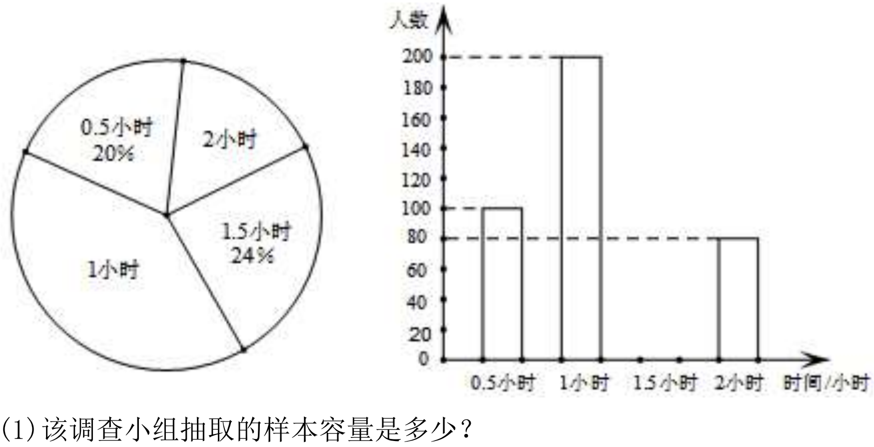
答案：$\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$.

三、解答题(共 10 小题，共 84 分)

19.先化简，再求值：$(x+1)^2-x(2-x)$，其中 x=2.
解析：原式第一项利用完全平方公式化简，第二项利用单项式乘以多项式法则计算，去括号合并得到最简结果，把 x 的值代入计算即可求出值.
答案：原式$=x^2+2x+1-2x+x^2=2x^2+1$，
当 x=2 时，原式=8+1=9.

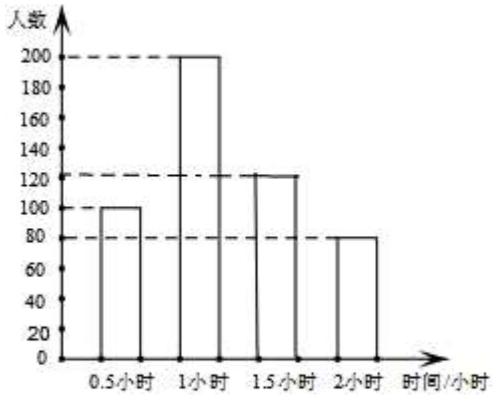
20.解方程和不等式组：
(1) $\dfrac{x}{3x-1}=2-\dfrac{1}{1-3x}$；
(2) $\begin{cases}2x+4>0,\\1-2x>-5.\end{cases}$
解析：(1)分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解；
(2)分别求出不等式组中两不等式的解集，找出解集的公共部分即可求出解集.
答案：(1)去分母得：x=6x-2+1，解得：x=$\dfrac{1}{5}$，经检验 x=$\dfrac{1}{5}$是分式方程的解.
(2) $\begin{cases}2x+4>0①,\\1-2x>-5②,\end{cases}$
由①得：x＞-2，
由②得：x＜3，
则不等式组的解集为-2＜x＜3.

21.某调查小组采用简单随机抽样方法，对某市部分中小学生一天中阳光体育运动时间进行了抽样调查，并把所得数据整理后绘制成如下的统计图：



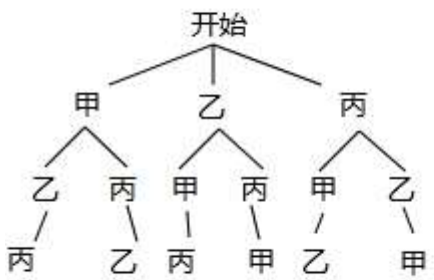
(1)该调查小组抽取的样本容量是多少？
(2)求样本学生中阳光体育运动时间为 1.5 小时的人数，并补全占频数分布直方图；

(3)请估计该市中小学生一天中阳光体育运动的平均时间.
解析：(1)利用 0.5 小时的人数为：100 人，所占比例为：20%，即可求出样本容量；
(2)利用样本容量乘以 1.5 小时的百分数，即可求出 1.5 小时的人数，画图即可；
(3)计算出该市中小学生一天中阳光体育运动的平均时间即可.
答案：(1)由题意可得：0.5 小时的人数为：100 人，所占比例为：20%，
∴本次调查共抽样了 500 名学生.
(2)1.5 小时的人数为：500×2.4=120(人)，如图所示：



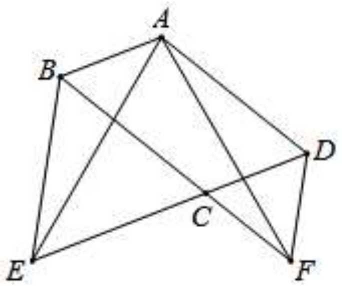
(3)根据题意得：$\frac{100\times 0.5+200\times 1+120\times 1.5+80\times 2}{100+200+120+80}$=1.18，即该市中小学生一天中阳光体育运动的平均时间约 1 小时.

22.甲，乙，丙三位学生进入了“校园朗诵比赛”冠军、亚军和季军的决赛，他们将通过抽签来决定比赛的出场顺序.
(1)求甲第一个出场的概率；
(2)求甲比乙先出场的概率.
解析：(1)画树状图得出所有等可能的情况数，找出甲第一个出场的情况数，即可求出所求的概率；
(2)找出甲比乙先出场的情况数，即可求出所求的概率.
答案：(1)画树状图如下：



所有等可能的情况有 6 种，其中甲第一个出场的情况有 2 种，则 P(甲第一个出场)=$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.
(2)甲比乙先出场的情况有 3 种，则 P(甲比乙先出场)=$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

23.如图，在▱ABCD 中，∠BCD=120°，分别延长 DC、BC 到点 E，F，使得△BCE 和△CDF 都是正三角形.



(1)求证：AE=AF；

(2)求∠EAF 的度数.

解析：(1)由平行四边形的性质得出∠BAD=∠BCD=120°，∠ABC=∠ADC，AB=CD，BC=AD，由等边三角形的性质得出 BE=BC，DF=CD，∠EBC=∠CDF=60°，证出∠ABE=∠FDA，AB=DF，BE=AD，根据 SAS 证明△ABE≌△FDA，得出对应边相等即可；

(2)由全等三角形的性质得出∠AEB=∠FAD，求出∠AEB+∠BAE=60°，得出∠FAD+∠BAE=60°，即可得出∠EAF 的度数.

答案：(1)∵四边形 ABCD 是平行四边形，

∴∠BAD=∠BCD=120°，∠ABC=∠ADC，AB=CD，BC=AD，

∵△BCE 和△CDF 都是正三角形，

∴BE=BC，DF=CD，∠EBC=∠CDF=60°，

∴∠ABE=∠FDA，AB=DF，BE=AD，

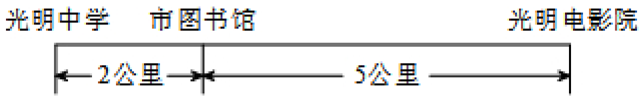
在△ABE 和△FDA 中，$\begin{cases} AB=DF, \\ \angle ABE=\angle FDA, \\ BE=AD, \end{cases}$

∴△ABE≌△FDA(SAS)，∴AE=AF.

(2)∵△ABE≌△FDA，∴∠AEB=∠FAD，∵∠ABE=60°+60°=120°，

∴∠AEB+∠BAE=60°，∴∠FAD+∠BAE=60°，∴∠EAF=120°-60°=60°.

24.已知某市的光明中学、市图书馆和光明电影院在同一直线上，它们之间的距离如图所示.小张星期天上午带了 75 元现金先从光明中学乘出租车去了市图书馆，付费 9 元；中午再从市图书馆乘出租车去了光明电影院，付费 12.6 元.若该市出租车的收费标准是：不超过 3 公里计费为 m 元，3 公里后按 n 元/公里计费.



(1)求 m，n 的值，并直接写出车费 y(元)与路程 x(公里)(x＞3)之间的函数关系式；

(2)如果小张这天外出的消费还包括：中午吃饭花费 15 元，在光明电影院看电影花费 25 元.问小张剩下的现金够不够乘出租车从光明电影院返回光明中学？为什么？

解析：(1)根据题意，不超过 3 公里计费为 m 元，由图示可知光明中学和市图书馆相距 2 公里，可由此得出 m，由出租车的收费标准是：不超过 3 公里计费为 m 元，3 公里后按 n 元/公里计费.当 x＞3 时，由收费与路程之间的关系就可以求出结论；

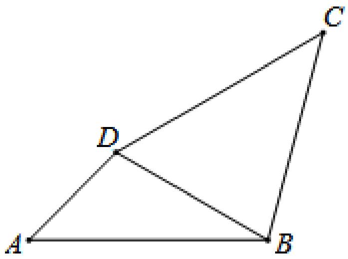
(2)分别计算小张所剩钱数和返程所需钱数，即可得出结论.答案：(1)∵由图示可知光明中学和市图书馆相距 2 公里，付费 9 元，∴m=9，

∵从市图书馆乘出租车去光明电影院，路程 5 公里，付费 12.6 元，

∴(5-3)n+9=12.6，解得：n=1.8.

∴车费 y(元)与路程 x(公里)(x＞3)之间的函数关系式为：y=1.8(x-3)+9=1.8x+3.6(x＞3).
(2)小张剩下坐车的钱数为：75-15-25-9-12.6=13.4(元)，
乘出租车从光明电影院返回光明中学的费用：1.8×7+3.6=16.2(元)
∵13.4＜16.2，故小张剩下的现金不够乘出租车从光明电影院返回光明中学.

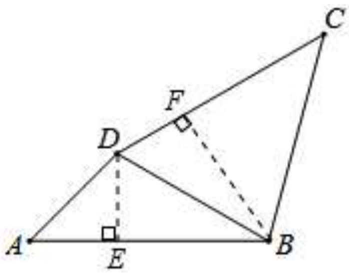
25.如图，在四边形 ABCD 中，∠A=∠C=45°，∠ADB=∠ABC=105°.



(1)若 AD=2，求 AB；

(2)若 AB+CD=$2\sqrt{3}$+2，求 AB.

解析：(1)在四边形 ABCD 中，由∠A=∠C=45°，∠ADB=∠ABC=105°，得∠BDF=∠ADC-∠ADB=165°-105°=60°，△ADE 与△BCF 为等腰直角三角形，求得 AE，利用锐角三角函数得 BE，得 AB；
(2)设 DE=x，利用(1)的某些结论，特殊角的三角函数和勾股定理，表示 AB，CD，得结果.
答案：(1)过 D 点作 DE⊥AB，过点 B 作 BF⊥CD，



∵∠A=∠C=45°，∠ADB=∠ABC=105°，
∴∠ADC=360°-∠A-∠C-∠ABC=360°-45°-45°-105°=165°，
∴∠BDF=∠ADC-∠ADB=165°-105°=60°，△ADE 与△BCF 为等腰直角三角形，

∵AD=2，∴AE=DE= $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

∵∠ABC=105°，∴∠ABD=105°-45°-30°=30°，

∴BE=$\frac{DE}{\tan 30^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{6}$，∴AB=$\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

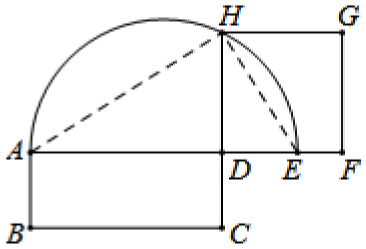
(2)设 DE=x，则 AE=x，BE=$\frac{x}{\tan 30^\circ}=\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{3}x$，∴BD=$\sqrt{x^2+\left(\sqrt{3}x\right)^2}$=2x，

∵∠BDF=60°，∴∠DBF=30°，∴DF=$\frac{1}{2}$BD=x，

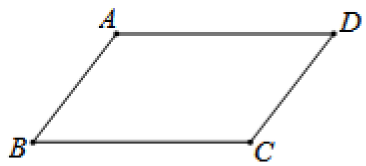
∴BF=$\sqrt{BD^2-DF^2}=\sqrt{(2x)^2-x^2}=\sqrt{3}$x，∴CF=3x，

∵AB=AE+BE=x+$\sqrt{3}$x，CD=DF+CF=x+$\sqrt{3}$x，AB+CD=2$\sqrt{3}$+2，∴AB=$\sqrt{3}$+1.

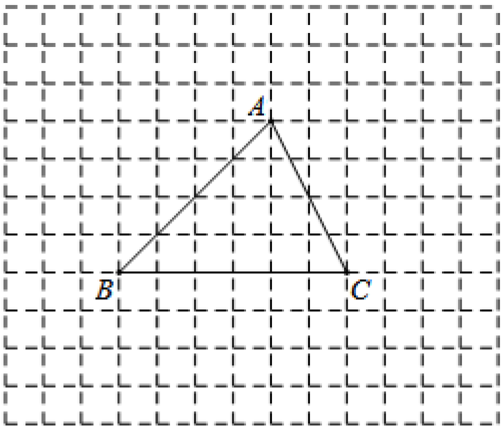
26.设ω是一个平面图形，如果用直尺和圆规经过有限步作图(简称尺规作图)，画出一个正方形与ω的面积相等(简称等积)，那么这样的等积转化称为ω的“化方”.



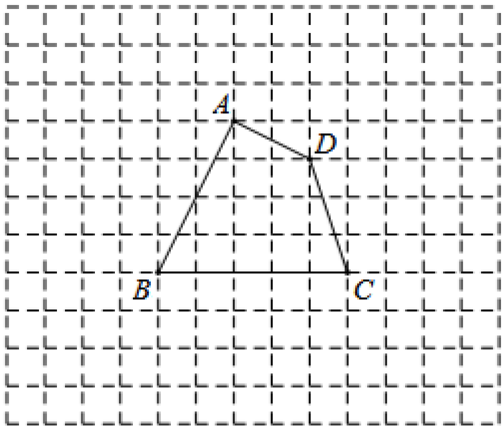
图①



图②



图③



图④

(1)阅读填空

如图①，已知矩形ABCD，延长AD到E，使DE=DC，以AE为直径作半圆.延长CD交半圆于点H，以DH为边作正方形DFGH，则正方形DFGH与矩形ABCD等积.

理由：连接AH，EH.

∵AE为直径，∴∠AHE=90°，∴∠HAE+∠HEA=90°.

∵DH⊥AE，∴∠ADH=∠EDH=90°，

∴∠HAD+∠AHD=90°，

∴∠AHD=∠HED，∴△ADH∽________.

∴$\frac{AD}{DH}=\frac{DH}{DE}$，即$DH^2$=AD×DE.

又∵DE=DC，∴DH^2=________，即正方形DFGH与矩形ABCD等积.

(2)操作实践

平行四边形的“化方”思路是，先把平行四边形转化为等积的矩形，再把矩形转化为等积的正方形.

如图②，请用尺规作图作出与?ABCD等积的矩形(不要求写具体作法，保留作图痕迹).

(3)解决问题

三角形的“化方”思路是：先把三角形转化为等积的_______(填写图形名称)，再转化为等积的正方形.

如图③，△ABC 的顶点在正方形网格的格点上，请作出与△ABC 等积的正方形的一条边(不要求写具体作法，保留作图痕迹，不通过计算△ABC 面积作图).

(4)拓展探究

n 边形(n＞3)的“化方”思路之一是：把 n 边形转化为等积的 n-1 边形，…，直至转化为等积的三角形，从而可以化方.

如图④,四边形 ABCD 的顶点在正方形网格的格点上,请作出与四边形 ABCD 等积的三角形(不要求写具体作法，保留作图痕迹，不通过计算四边形 ABCD 面积作图).

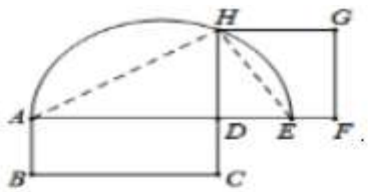
解析：(1)首先根据相似三角形的判定方法，可得△ADH∽△HDE；然后根据等量代换，可得 $DH^2=AD\times DC$，据此判断即可.

(2)首先把平行四边形 ABCD 转化为等积的矩形 ADMN，然后延长 AD 到 E，使 DE=DM，以 AE 为直径作半圆.延长 MD 交半圆于点 H，以 DH 为边作正方形 DFGH，则正方形 DFGH 与矩形 ABMN 等积，所以正方形 DFGH 与平行四边形 ABCD 等积，据此解答即可.

(3)首先以三角形的底为矩形的长，以三角形的高的一半为矩形的宽，将△ABC 转化为等积的矩形 MBCD；然后延长 MD 到 E，使 DE=DC，以 ME 为直径作半圆.延长 CD 交半圆于点 H，则 DH 即为与△ABC 等积的正方形的一条边.

(4)首先根据 AG∥EH，判断出 AG=2EH，然后根据 CF=2DF，可得 CF•EH=DF•AG，据此判断出 $S_{\triangle CEF}=S_{\triangle ADF}$，$S_{\triangle CDI}=S_{\triangle AEI}$，所以 $S_{\triangle BCE}=S_{四边形ABCD}$，即△BCE 与四边形 ABCD 等积，据此解答即可.

答案：(1)如图①，连接 AH，EH，



图①

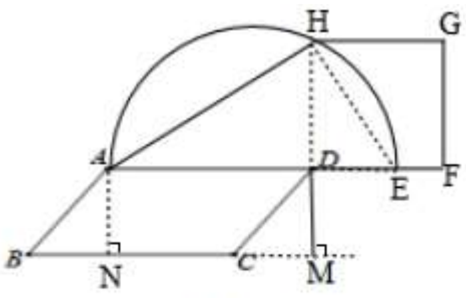
∵AE 为直径，∴∠AHE=90°，∴∠HAE+∠HEA=90°.

∵DH⊥AE，∴∠ADH=∠EDH=90°，

∴∠HAD+∠AHD=90°，∴∠AHD=∠HED，∴△ADH∽△HDE.∴$\dfrac{AD}{DH}=\dfrac{DH}{DE}$，即 $DH^2=AD\times DE$.

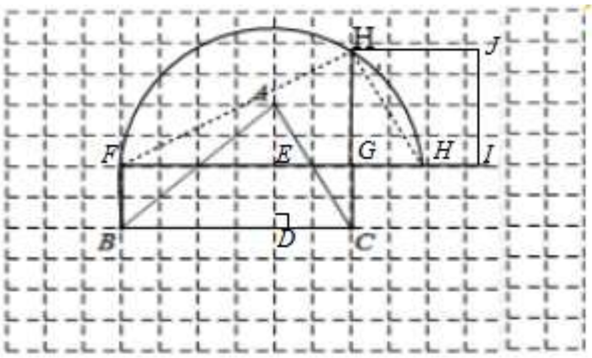
又∵DE=DC，∴DH2=AD×DC，即正方形 DFGH 与矩形 ABCD 等积.

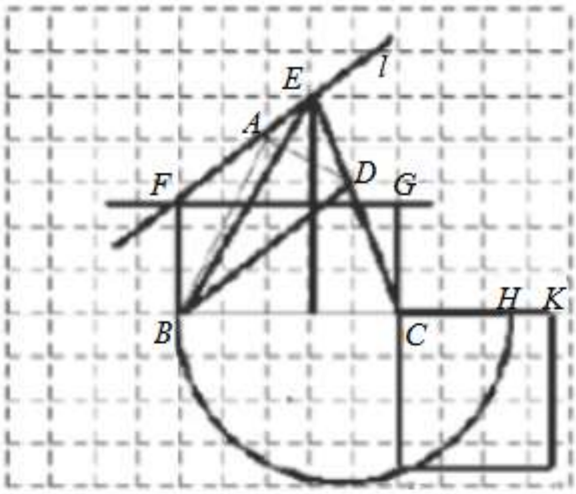
(2)作法：



图②

①过 A、D 作 AN、DM 分别垂直 BC 于 N、M；

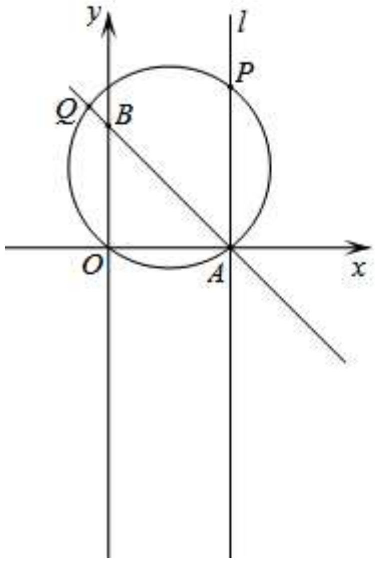
②延长 AD，取 DE=DM；
③以 AE 为直径作半圆 O；
④延长 MD 交半圆 O 于 H；
⑤以 H、D 作正方形 HDFG，则正方形 HDFG 为平行四边形 ABCD 的等积正方形.
证明：
∵矩形 ADMN 的长和宽分别等于平行四边形 ABCD 的底和高，
∴矩形 ADMN 的面积等于平行四边形 ABCD 的面积，
∵AE 为直径，∴∠AHE=90°，∴∠HAE+∠HEA=90°.
∵DH⊥AE，∴∠ADH=∠EDH=90°，
∴∠HAD+∠AHD=90°，∴∠AHD=∠HED，∴△ADH∽△HDE. ∴ $\frac{AD}{DH}=\frac{DH}{DE}$，即 $DH^2=AD\times DE$.
又∵DE=DM，∴$DH^2=AD\times DM$，
即正方形 DFGH 与矩形 ABMN 等积，∴正方形 DFGH 与平行四边形 ABCD 等积.
(3)作法：


图③
①过 A 点作 AD 垂直 BC 于 D；
②作 AD 的垂直平分线，取 AD 中点 E；
③过 E 作 BC 平行线，作长方形 BCGF，则 $S_{矩形BCGF}=S_{\triangle ABC}$；
其他步骤同(2)可作出其等积正方形.
(4)作法：


①过 A 点作 BD 平行线 l；
②延长 CD 交平行线与 E 点；
③连接 BE，则 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle EBC}$，

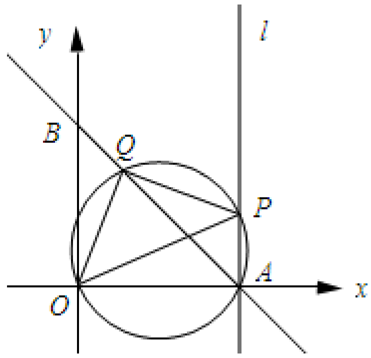
同(3)可作出其等积正方形.
△BCE 与四边形 ABCD 等积，理由如下：
∵BD∥l，∴$S_{△ABD}=S_{△EBD}$，∴$S_{△BCE}=S_{四边形ABCD}$，即△EBC 与四边形 ABCD 等积.

27.如图，一次函数 y=-x+4 的图象与 x 轴、y 轴分别相交于点 A、B，过点 A 作 x 轴的垂线 l，点 P 为直线 l 上的动点，点 Q 为直线 AB 与△OAP 外接圆的交点，点 P、Q 与点 A 都不重合.



(1)写出点 A 的坐标；
(2)当点 P 在直线 l 上运动时，是否存在点 P 使得△OQB 与△APQ 全等？如果存在，求出点 P 的坐标；如果不存在，请说明理由.
(3)若点 M 在直线 l 上，且∠POM=90°，记△OAP 外接圆和△OAM 外接圆的面积分别是 S_1、S_2，求 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}$ 的值.

解析：(1)将 y=0 代入 y=-x+4，求得 x 的值，从而得到点 A 的坐标；
(2)首先根据题意画出图形，然后在 Rt△BOA 中，由勾股定理得：AB 的长度，然后由全等三角形的性质求得 QA 的长度，从而得到 BQ 的长，然后根据 PA=BQ 求得 PA 的长度，从而可求得点 P 的坐标；
(3)首先根据题意画出图形，设 AP=m，由△OAM∽△PAO，可求得 AM 的长度，然后根据勾股定理可求得两圆的直径(用含 m 的式子表示)，然后利用圆的面积公式求得两圆的面积，最后代入所求代数式求解即可.
答案：(1)令 y=0，得：-x+4=0，解得 x=4，所以点 A 的坐标为(4，0)；
(2)存在.理由：如图所示：



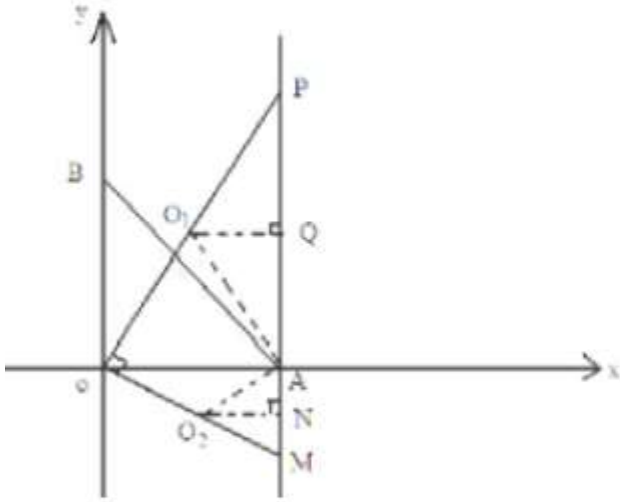
∵∠OBA=∠BAP，∴它们是对应角，∴BQ=PA，
将 x=0 代入 y=-x+4 得：y=4，∴OB=4，
由(1)可知 OA=4，

在 Rt△BOA 中，由勾股定理得：$AB=\sqrt{OB^2+OA^2}=4\sqrt{2}$.

∵△BOQ≌△AQP.∴QA=OB=4，BQ=PA.

∵BQ=AB-AQ=$4\sqrt{2}-4$，∴PA=$4\sqrt{2}-4$.∴点 P 的坐标为(4，$4\sqrt{2}-4$).

(3)如图所示：



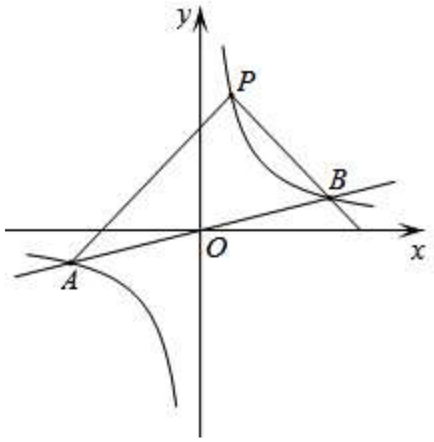
令 PA=a，MA=b，△OAP 外接圆的圆心为 O_1，△OAM 的外接圆的圆心为 O_2，
∴$OP^2=OA^2+PA^2=4^2+a^2=16+a^2$，$OM^2=OA^2+MA^2=4^2+b^2=16+b^2$，
在 Rt△POM 中，$PM^2=OP^2+OM^2=a^2+16+b^2+16$，
又∵$PM^2=(PA+AM)^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，∴ab=16，

∵$O_1A^2=O_1Q^2+QA^2=(\frac{OA}{2})^2+(\frac{PA}{2})^2=\frac{1}{4}a^2+4$，$O2A^2=O2N^2+NA^2=(\frac{OA}{2})^2+(\frac{MA}{2})^2=\frac{1}{4}b^2+4$，

∴$S_1=\pi\times O_1A^2=(\frac{1}{4}a^2+4)\pi$，$S_2=\pi\times O_2A^2=(\frac{1}{4}b^2+4)\pi$，

$$\therefore\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}=\frac{S_1+S_2}{S_1S_2}=\frac{\pi\times\left(\frac{1}{4}a^2+4\right)+\pi\times\left(\frac{1}{4}b^2+4\right)}{\pi\times\left(\frac{1}{4}a^2+4\right)\times\pi\times\left(\frac{1}{4}b^2+4\right)}=\frac{4}{\pi}\times\frac{a^2+16+b^2+16}{16a^2+16b^2+16^2+16^2}=\frac{14}{\pi}$$

28.如图，反比例函数 y=$\frac{k}{x}$的图象与一次函数 y=$\frac{1}{4}$x 的图象交于点 A、B，点 B 的横坐标是 4.点 P 是第一象限内反比例函数图象上的动点，且在直线 AB 的上方.



(1)若点 P 的坐标是(1，4)，直接写出 k 的值和△PAB 的面积；

(2)设直线 PA、PB 与 x 轴分别交于点 M、N，求证：△PMN 是等腰三角形；

(3)设点 Q 是反比例函数图象上位于 P、B 之间的动点(与点 P、B 不重合)，连接 AQ、BQ，比较∠PAQ 与∠PBQ 的大小，并说明理由.

解析：(1)过点 A 作 AR⊥y 轴于 R，过点 P 作 PS⊥y 轴于 S，连接 PO，设 AP 与 y 轴交于点 C，如图 1，可根据条件先求出点 B 的坐标，然后把点 B 的坐标代入反比例函数的解析式，即可求出 k，然后求出直线 AB 与反比例函数的交点 A 的坐标，从而得到 OA=OB，由此可得 $S_{\triangle PAB}=2S_{\triangle AOP}$，要求△PAB 的面积，只需求△PAO 的面积，只需用割补法就可解决问题；

(2)过点 P 作 PH⊥x 轴于 H，如图 2.可用待定系数法求出直线 PB 的解析式，从而得到点 N 的坐标，同理可得到点 M 的坐标，进而得到 MH=NH，根据垂直平分线的性质可得 PM=PN，即△PMN 是等腰三角形；

(3)过点 Q 作 QT⊥x 轴于 T，设 AQ 交 x 轴于 D，QB 的延长线交 x 轴于 E，如图 3.可设点 Q 为(c，$\frac{4}{c}$)，运用待定系数法求出直线 AQ 的解析式，即可得到点 D 的坐标为(c-4，0)，同理可得 E(c+4，0)，从而得到 DT=ET，根据垂直平分线的性质可得 QD=QE，则有∠QDE=∠QED.然后根据对顶角相等及三角形外角的性质，就可得到∠PAQ=∠PBQ.

答案：(1)k=4，$S_{\triangle PAB}$=15.

过点 A 作 AR⊥y 轴于 R，过点 P 作 PS⊥y 轴于 S，连接 PO，

设 AP 与 y 轴交于点 C，如图 1，

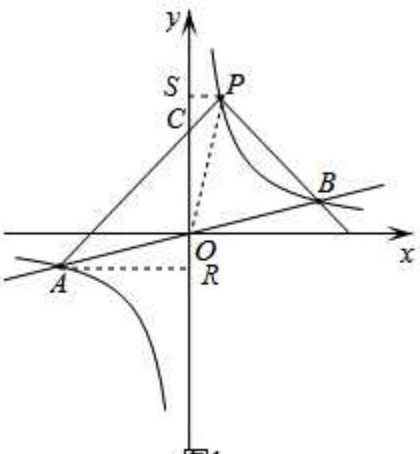


图1

把 x=4 代入 y=$\frac{1}{4}$x，得到点 B 的坐标为(4，1)，

把点 B(4，1)代入 y=$\frac{k}{x}$，得 k=4.

解方程组$\begin{cases} y=\frac{1}{4}x, \\ y=\frac{4}{x}, \end{cases}$得到点 A 的坐标为(-4，-1)，

则点 A 与点 B 关于原点对称，∴OA=OB，∴$S_{\triangle AOP}=S_{\triangle BOP}$，∴$S_{\triangle PAB}=2S_{\triangle AOP}$.
设直线 AP 的解析式为 y=mx+n，把点 A(-4，-1)、P(1，4)代入 y=mx+n，
求得直线 AP 的解析式为 y=x+3，则点 C 的坐标(0，3)，OC=3，
∴$S_{\triangle AOP}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle POC}=\frac{1}{2}OC\cdot AR+\frac{1}{2}OC\cdot PS=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{15}{2}$，∴$S_{\triangle PAB}=2S_{\triangle AOP}=15$.
(2)过点 P 作 PH⊥x 轴于 H，如图 2.

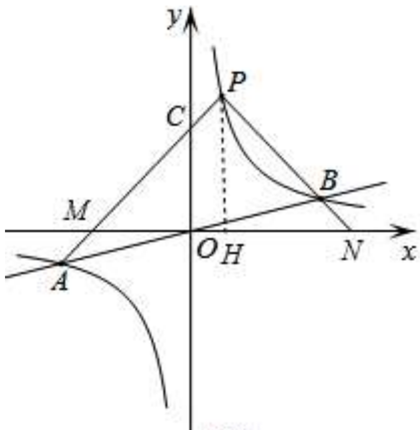


图2

B(4，1)，则反比例函数解析式为 y=$\frac{4}{x}$，

设 P(m，$\frac{4}{m}$)，直线 PA 的方程为 y=ax+b，直线 PB 的方程为 y=px+q，

联立$\begin{cases} 4m=ma+b, \\ -1=-4a+b, \end{cases}$解得直线 PA 的方程为 y=$\frac{1}{m}$x+$\frac{4}{m}$-1，

联立$\begin{cases}4m=mp+q,\\4p+q=1,\end{cases}$解得直线PB的方程为y=$-\dfrac{1}{m}$x+$\dfrac{4}{m}$+1，

∴M(m-4，0)，N(m+4，0)，∴H(m，0)，∴MH=m-(m-4)=4，NH=m+4-m=4，

∴MH=NH，∴PH垂直平分MN，∴PM=PN，∴△PMN是等腰三角形.

(3)∠PAQ=∠PBQ.理由如下：

过点Q作QT⊥x轴于T，设AQ交x轴于D，QB的延长线交x轴于E，如图3.

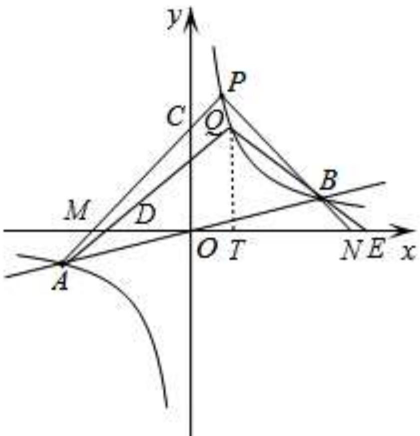


图3

可设点Q为(c，$\dfrac{4}{c}$)，直线AQ的解析式为y=px+q，

则有$\begin{cases}-4p+q=-1,\\cp+q=\dfrac{4}{c},\end{cases}$解得：$\begin{cases}p=\dfrac{1}{c},\\q=\dfrac{4}{c}-1,\end{cases}$∴直线AQ的解析式为y=$\dfrac{1}{c}$x+$\dfrac{4}{c}$-1.

当y=0时，$\dfrac{1}{c}$x+$\dfrac{4}{c}$-1=0，解得：x=c-4，∴D(c-4，0).

同理可得E(c+4，0)，∴DT=c-(c-4)=4，ET=c+4-c=4，

∴DT=ET，∴QT垂直平分DE，∴QD=QE，∴∠QDE=∠QED.

∵∠MDA=∠QDE，∴∠MDA=∠QED.

∵PM=PN，∴∠PMN=∠PNM.

∵∠PAQ=∠PMN-∠MDA，∠PBQ=∠NBE=∠PNM-∠QED，∴∠PAQ=∠PBQ.