

## 2014 年普通高等学校招生全国统一考试（新课标 II）数学文

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

1. 已知集合  $A = \{-2, 0, 2\}$ ,  $B = \{x | x^2 - x - 2 = 0\}$ , 则  $A \cap B = ( \quad )$

- A.  $\emptyset$
- B.  $\{2\}$
- C.  $\{0\}$
- D.  $\{-2\}$

解析:  $\because A = \{-2, 0, 2\}$ ,  $B = \{x | x^2 - x - 2 = 0\} = \{-1, 2\}$ ,  $\therefore A \cap B = \{2\}$ .

答案: B

2.  $\frac{1+3i}{1-i} = ( \quad )$

- A.  $1+2i$
- B.  $-1+2i$
- C.  $1-2i$
- D.  $-1-2i$

解析: 化简可得  $\frac{1+3i}{1-i} = \frac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-3+4i}{1-i^2} = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$

答案: B

3. 函数  $f(x)$  在  $x=x_0$  处导数存在, 若  $p: f'(x_0)=0$ ;  $q: x=x_0$  是  $f(x)$  的极值点, 则  $( \quad )$

- A.  $p$  是  $q$  的充分必要条件
- B.  $p$  是  $q$  的充分条件, 但不是  $q$  的必要条件
- C.  $p$  是  $q$  的必要条件, 但不是  $q$  的充分条件
- D.  $p$  既不是  $q$  的充分条件, 也不是  $q$  的必要条件

解析: 函数  $f(x) = x^3$  的导数为  $f'(x) = 3x^2$ , 由  $f'(x_0) = 0$ , 得  $x_0 = 0$ , 但此时函数  $f(x)$  单调递增, 无极值, 充分性不成立.

根据极值的定义和性质, 若  $x=x_0$  是  $f(x)$  的极值点, 则  $f'(x_0) = 0$  成立, 即必要性成立, 故  $p$  是  $q$  的必要条件, 但不是  $q$  的充分条件,

答案: C

4. 设向量  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  满足  $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10}$ ,  $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{6}$ , 则  $\vec{a} \cdot \vec{b} = ( \quad )$

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 5

解析:  $\because |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{10}$ ,  $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{6}$ ,  $\therefore$  分别平方得  $\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 10$ ,  $\vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 6$ ,

两式相减得  $4\vec{a} \cdot \vec{b} = 10 - 6 = 4$ , 即  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ ,

答案: A.

5. 等差数列  $\{a_n\}$  的公差为 2, 若  $a_2, a_4, a_8$  成等比数列, 则  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = ( \quad )$

A.  $n(n+1)$

B.  $n(n-1)$

C.  $\frac{n(n+1)}{2}$

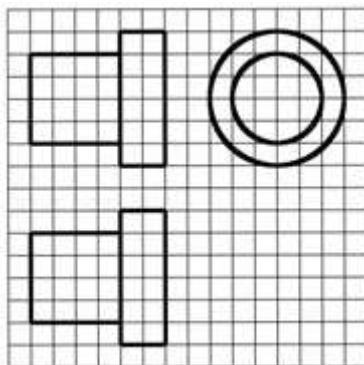
D.  $\frac{n(n-1)}{2}$

解析: 由题意可得  $a_4^2 = a_2 \cdot a_8$ , 即  $a_4^2 = (a_4 - 4)(a_4 + 8)$ , 解得  $a_4 = 8$ ,  $\therefore a_1 = a_4 - 3 \times 2 = 2$ ,

$$\therefore S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 2n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n(n+1),$$

答案: A.

6. 如图, 网格纸上正方形小格的边长为 1 (表示 1cm), 图中粗线画出的是某零件的三视图, 该零件由一个底面半径为 3cm, 高为 6cm 的圆柱体毛坯切削得到, 则切削掉部分的体积与原来毛坯体积的比值为 ( )



A.  $\frac{17}{27}$

B.  $\frac{5}{9}$

C.  $\frac{10}{27}$

D.  $\frac{1}{3}$

解析: 几何体是由两个圆柱组成, 一个是底面半径为 3 高为 2, 一个是底面半径为 2, 高为 4,

组合体体积是:  $3^2 \pi \cdot 2 + 2^2 \pi \cdot 4 = 34 \pi$ .

底面半径为 3cm, 高为 6cm 的圆柱体毛坯的体积为:  $3^2 \pi \times 6 = 54 \pi$ .

切削掉部分的体积与原来毛坯体积的比值为:  $\frac{54 \pi - 34 \pi}{54 \pi} = \frac{10}{27}$ .

答案: C.

7. 正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的底面边长为 2，侧棱长为  $\sqrt{3}$ ，D 为 BC 中点，则三棱锥  $A-B_1DC_1$  的体积为( )

A. 3

B.  $\frac{3}{2}$

C. 1

D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：∵正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  的底面边长为 2，侧棱长为  $\sqrt{3}$ ，D 为 BC 中点，

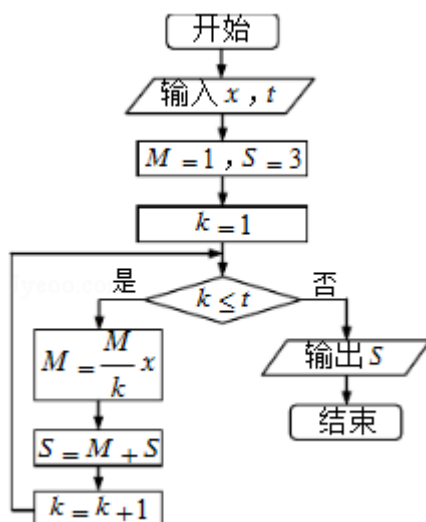
∴底面  $B_1DC_1$  的面积： $\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$ ，

A 到底面的距离就是底面正三角形的高： $\sqrt{3}$ 。

三棱锥  $A-B_1DC_1$  的体积为： $\frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 1$ 。

答案：C.

8. 执行如图所示的程序框图，若输入的  $x, t$  均为 2，则输出的  $S = ( )$



A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

解析：若  $x=t=2$ ，

则第一次循环， $1 \leq 2$  成立，则  $M = \frac{1}{1} \times 2 = 2$ ， $S = 2 + 3 = 5$ ， $k = 2$ ，

第二次循环， $2 \leq 2$  成立，则  $M = \frac{2}{2} \times 2 = 2$ ， $S = 2 + 5 = 7$ ， $k = 3$ ，

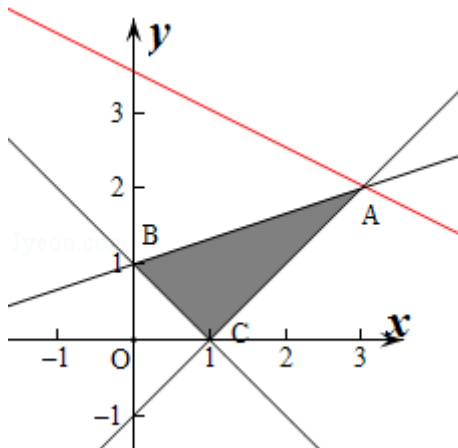
此时  $3 \leq 2$  不成立，输出  $S = 7$ ，

答案：D.

9. 设  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y-1 \geq 0 \\ x-y-1 \leq 0 \\ x-3y+3 \geq 0 \end{cases}$ , 则  $z=x+2y$  的最大值为( )

- A. 8  
B. 7  
C. 2  
D. 1

解析: 作出不等式对应的平面区域,



由  $z=x+2y$ , 得  $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$ , 平移直线  $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$ , 由图象可知当直线  $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$  经过点 A 时, 直线  $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$  的截距最大, 此时  $z$  最大.

由  $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x-3y+3=0 \end{cases}$ , 得  $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ , 即  $A(3, 2)$ , 此时  $z$  的最大值为  $z=3+2 \times 2=7$ ,

答案: B.

10. 设  $F$  为抛物线  $C: y^2=3x$  的焦点, 过  $F$  且倾斜角为  $30^\circ$  的直线交于  $C$  于  $A, B$  两点, 则  $|AB|=( )$

- A.  $\frac{\sqrt{30}}{3}$   
B. 6  
C. 12  
D.  $7\sqrt{3}$

解析: 由  $y^2=3x$  得其焦点  $F(\frac{3}{4}, 0)$ , 准线方程为  $x=-\frac{3}{4}$ .

则过抛物线  $y^2=3x$  的焦点  $F$  且倾斜角为  $30^\circ$  的直线方程为  $y=\tan 30^\circ (x-\frac{3}{4})=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\frac{3}{4})$ .

代入抛物线方程, 消去  $y$ , 得  $16x^2-168x+9=0$ .

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  则  $x_1+x_2=\frac{168}{16}=\frac{21}{2}$ , 所以  $|AB|=x_1+\frac{3}{4}+x_2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{21}{2}=12$

答案: 12.

11. 若函数  $f(x)=kx-\ln x$  在区间  $(1, \infty)$  单调递增, 则  $k$  的取值范围是( )

- A.  $(-\infty, -2]$
- B.  $(-\infty, -1]$
- C.  $[2, +\infty)$
- D.  $[1, +\infty)$

解析: 函数  $f(x)=kx-\ln x$  在区间  $(1, \infty)$  单调递增,

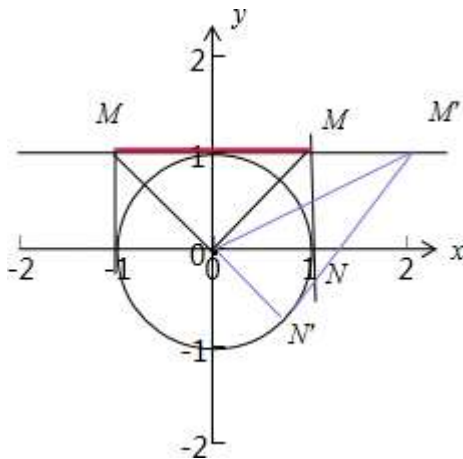
$\therefore$  当  $x>1$  时,  $f'(x)=k-\frac{1}{x} \geq 0, \therefore k-1 \geq 0, \therefore k \geq 1,$

答案: D.

12. 设点  $M(x_0, 1)$ , 若在圆  $O: x^2+y^2=1$  上存在点  $N$ , 使得  $\angle OMN=45^\circ$ , 则  $x_0$  的取值范围是( )

- A.  $[-1, 1]$
- B.  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- C.  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
- D.  $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$

解析: 由题意画出图形如图:



$\therefore$  点  $M(x_0, 1)$ ,  $\therefore$  若在圆  $O: x^2+y^2=1$  上存在点  $N$ , 使得  $\angle OMN=45^\circ$ ,

$\therefore$  圆上的点到  $MN$  的距离的最大值为 1, 要使  $MN=1$ , 才能使得  $\angle OMN=45^\circ$ ,

图中  $M'$  显然不满足题意, 当  $MN$  垂直  $x$  轴时, 满足题意,  $\therefore x_0$  的取值范围是  $[-1, 1]$ .

答案: A

## 二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分.

13. 甲、乙两名运动员各自等可能地从红、白、蓝 3 种颜色的运动服中选择 1 种, 则他们选择相同颜色运动服的概率为\_\_\_\_\_.

解析: 所有的选法共有  $3 \times 3=9$  种, 而他们选择相同颜色运动服的选法共有 3 种,

故他们选择相同颜色运动服的概率为  $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ ,

答案:  $\frac{1}{3}$ .

14. 函数  $f(x) = \sin(x + \phi) - 2\sin\phi \cos x$  的最大值为\_\_\_\_\_.

解析:  $\because f(x) = \sin(x + \phi) - 2\sin\phi \cos x$   
 $= \sin x \cos \phi + \cos x \sin \phi - 2\sin\phi \cos x$   
 $= \sin x \cos \phi - \sin\phi \cos x$   
 $= \sin(x - \phi).$

$\therefore f(x)$  的最大值为 1.

答案: 1.

15. 偶函数  $y = f(x)$  的图象关于直线  $x = 2$  对称,  $f(3) = 3$ , 则  $f(-1) =$ \_\_\_\_\_.

解析: 因为偶函数  $y = f(x)$  的图象关于直线  $x = 2$  对称,

所以  $f(2+x) = f(2-x) = f(x-2)$ , 即  $f(x+4) = f(x)$ , 则  $f(-1) = f(-1+4) = f(3) = 3$ ,

答案: 3

16. 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n+1} = \frac{1}{1 - a_n}$ ,  $a_2 = 2$ , 则  $a_1 =$ \_\_\_\_\_.

解析: 由题意得,  $a_{n+1} = \frac{1}{1 - a_n}$ ,  $a_2 = 2$ , 令  $n = 1$  代入上式得,  $a_2 = \frac{1}{1 - a_1}$ , 解得  $a_1 = \frac{1}{2}$ .

答案:  $\frac{1}{2}$ .

### 三、解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (12分) 四边形 ABCD 的内角 A 与 C 互补,  $AB = 1$ ,  $BC = 3$ ,  $CD = DA = 2$ .

(1) 求 C 和 BD;

(2) 求四边形 ABCD 的面积.

解析: (1) 在三角形 BCD 中, 利用余弦定理列出关系式, 将 BC, CD, 以及  $\cos C$  的值代入表示出  $BD^2$ , 在三角形 ABD 中, 利用余弦定理列出关系式, 将 AB, DA 以及  $\cos A$  的值代入表示出  $BD^2$ , 两者相等求出  $\cos C$  的值, 确定出 C 的度数, 进而求出 BD 的长;

(2) 由 C 的度数求出 A 的度数, 利用三角形面积公式求出三角形 ABD 与三角形 BCD 面积, 之和即为四边形 ABCD 面积.

答案: (1) 在  $\triangle BCD$  中,  $BC = 3$ ,  $CD = 2$ ,

由余弦定理得:  $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos C = 13 - 12 \cos C$ ①,

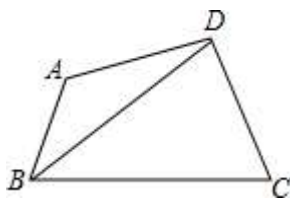
在  $\triangle ABD$  中,  $AB = 1$ ,  $DA = 2$ ,  $A + C = \pi$ ,

由余弦定理得:  $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A = 5 - 4 \cos A = 5 + 4 \cos C$ ②,

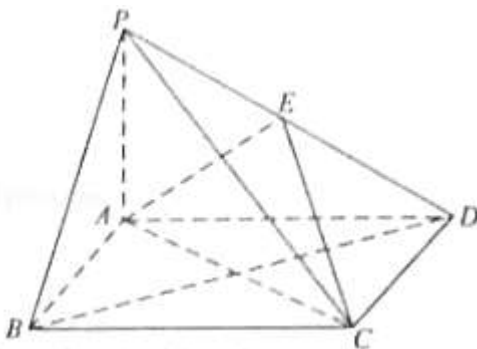
由①②得:  $\cos C = \frac{1}{2}$ , 则  $C = 60^\circ$ ,  $BD = \sqrt{7}$ .

(2)  $\because \cos C = \frac{1}{2}$ ,  $\cos A = -\frac{1}{2}$ ,  $\therefore \sin C = \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

则  $S = \frac{1}{2} AB \cdot DA \sin A + \frac{1}{2} BC \cdot CD \sin C = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ .



18. (12分)如图,四棱锥P-ABCD中,底面ABCD为矩形,PA⊥平面ABCD, E为PD的中点.



(I)证明:PB//平面AEC;

(II)设AP=1, AD=√3, 三棱锥P-ABD的体积V=√3/4, 求A到平面PBC的距离.

解析:(I)设BD与AC的交点为O, 连结EO, 通过直线与平面平行的判定定理证明PB//平面AEC;

(II)通过AP=1, AD=√3, 三棱锥P-ABD的体积V=√3/4, 求出AB, 作AH⊥PB角PB于H, 说

明AH就是A到平面PBC的距离. 通过解三角形求解即可.

答案:(I)设BD与AC的交点为O, 连结EO,

∵ABCD是矩形,

∴O为BD的中点

∵E为PD的中点,

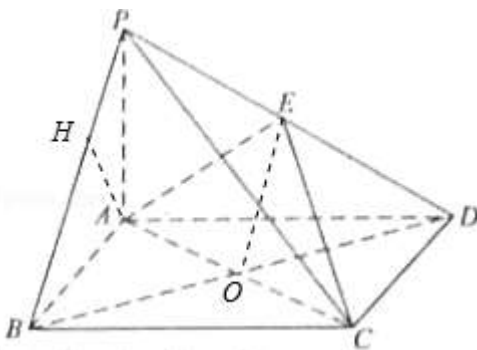
∴EO//PB.

EO⊂平面AEC, PB⊄平面AEC

∴PB//平面AEC;

(II)∵AP=1, AD=√3, 三棱锥P-ABD的体积V=√3/4,

∴V=1/6 PA·AB·AD=√3/6 AB=√3/4, ∴AB=3/2, 作AH⊥PB角PB于H,



由题意可知  $BC \perp$  平面  $PAB$ .  $\therefore BC \perp AH$ ,

故  $AH \perp$  平面  $PBC$ . 又  $AH = \frac{PA \cdot AB}{PB} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$  A 到平面  $PBC$  的距离  $\frac{3\sqrt{13}}{13}$ .

19. (12分) 某市为了考核甲、乙两部门的工作情况, 随机访问了 50 位市民, 根据这 50 位市民对两部门的评分(评分越高表明市民的评价越高)绘制的茎叶图如图:

甲部门		乙部门
	3	5 9
	4	0 4 4 8
	5	1 2 2 4 5 6 6 7 7 7 8 9
9 7 6 6 5 3 3 2 1 1 0	6	0 1 1 2 3 4 6 8 8
9 8 8 7 7 7 6 6 5 5 5 5 4 4 3 3 3 2 1 0 0	7	0 0 1 1 3 4 4 9
6 6 5 5 2 0 0	8	1 2 3 3 4 5
6 3 2 2 2 0	9	0 1 1 4 5 6
	10	0 0 0

(I) 分别估计该市市民对甲、乙两部门评分的中位数;

(II) 分别估计该市的市民对甲、乙两部门的评分高于 90 的概率;

(III) 根据茎叶图分析该市的市民对甲、乙两部门的评价.

解析: (I) 根据茎叶图的知识, 中位数是指中间的一个或两个的平均数, 首先要排序, 然后再找,

(II) 利用样本来估计总体, 只要求出样本的概率就可以了.

(III) 根据 (I) (II) 的结果和茎叶图, 合理的评价, 恰当的描述即可.

答案: (I) 由茎叶图知, 50 位市民对甲部门的评分有小到大顺序, 排在排在第 25, 26 位的是 75, 75, 故样本的中位数是 75, 所以该市的市民对甲部门的评分的中位数的估计值是 75.

50 位市民对乙部门的评分有小到大顺序, 排在排在第 25, 26 位的是 66, 68, 故样本的中位数是  $\frac{66+68}{2}=67$ , 所以该市的市民对乙部门的评分的中位数的估计值是 67.

(II) 由茎叶图知, 50 位市民对甲、乙部门的评分高于 90 的比率分别为  $\frac{5}{50}=0.1$ ,  $\frac{8}{50}=0.16$ ,

故该市的市民对甲、乙两部门的评分高于 90 的概率得估计值分别为 0.1, 0.16,

(III) 由茎叶图知, 市民对甲部门的评分的中位数高于乙部门的评分的中位数, 而且由茎叶图可以大致看出对甲部门的评分标准差要小于乙部门的标准差, 说明该市的市民对甲部门的评价较高、评价较为一致, 对乙部门的评价较低、评价差异较大.

20. (12分) 设  $F_1, F_2$  分别是  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的左, 右焦点,  $M$  是  $C$  上一点且  $MF_2$  与  $x$

轴垂直, 直线  $MF_1$  与  $C$  的另一个交点为  $N$ .

(1) 若直线  $MN$  的斜率为  $\frac{3}{4}$ , 求  $C$  的离心率;

(2) 若直线  $MN$  在  $y$  轴上的截距为 2, 且  $|MN|=5|F_1N|$ , 求  $a, b$ .

解析: (1) 根据条件求出  $M$  的坐标, 利用直线  $MN$  的斜率为  $\frac{3}{4}$ , 建立关于  $a, c$  的方程即可求

$C$  的离心率;



(2) 根据直线 MN 在 y 轴上的截距为 2, 以及  $|MN|=5|F_1N|$ , 建立方程组关系, 求出 N 的坐标, 代入椭圆方程即可得到结论.

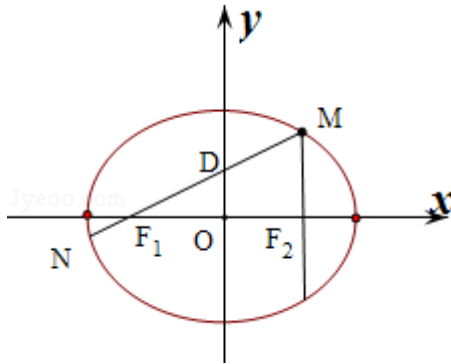
答案: (1)  $\because M$  是  $C$  上一点且  $MF_2$  与  $x$  轴垂直,

$\therefore M$  的横坐标为  $c$ , 当  $x=c$  时,  $y=\frac{b^2}{a}$ , 即  $M(c, \frac{b^2}{a})$ ,

若直线 MN 的斜率为  $\frac{3}{4}$ , 即  $\tan \angle MF_1F_2 = \frac{\frac{b^2}{a}}{2c} = \frac{b^2}{2ac} = \frac{3}{4}$ ,

即  $b^2 = \frac{3}{2}ac = a^2 - c^2$ , 即  $c^2 - \frac{3}{2}ac - a^2 = 0$ , 则  $e^2 - \frac{3}{2}e - 1 = 0$ , 解得  $e = \frac{1}{2}$ .

(II) 由题意, 原点  $O$  是  $F_1F_2$  的中点, 则直线  $MF_1$  与  $y$  轴的交点  $D(0, 2)$  是线段  $MF_1$  的中点,



故  $\frac{b^2}{a} = 4$ , 即  $b^2 = 4a$ ,

由  $|MN|=5|F_1N|$ , 解得  $|DF_1|=2|F_1N|$ ,

设  $N(x_1, y_1)$ , 由题意知  $y_1 < 0$ , 则  $\begin{cases} 2(-c - x_1) = c \\ -2y_1 = 2 \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}c \\ y_1 = -1 \end{cases}$

代入椭圆方程得  $\frac{9c^2}{4a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ , 将  $b^2 = 4a$  代入得  $\frac{9(a^2 - 4a)}{4a^2} + \frac{1}{4a} = 1$ , 解得  $a=7, b=2\sqrt{7}$ .

21. (12分) 已知函数  $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 2$ , 曲线  $y=f(x)$  在点  $(0, 2)$  处的切线与  $x$  轴交点的横坐标为  $-2$ .

(I) 求  $a$ ;

(II) 证明: 当  $k < 1$  时, 曲线  $y=f(x)$  与直线  $y=kx-2$  只有一个交点.

解析: (I) 求函数的导数, 利用导数的几何意义建立方程即可求  $a$ ;

(II) 构造函数  $g(x) = f(x) - kx + 2$ , 利用函数导数和极值之间的关系即可得到结论.

答案: (I) 函数的导数  $f'(x) = 3x^2 - 6x + a$ ;  $f'(0) = a$ ;

则  $y=f(x)$  在点  $(0, 2)$  处的切线方程为  $y=ax+2$ ,

$\therefore$  切线与  $x$  轴交点的横坐标为  $-2$ ,

$\therefore f(-2) = -2a + 2 = 0$ , 解得  $a=1$ .

(II) 当  $a=1$  时,  $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ ,

设  $g(x) = f(x) - kx + 2 = x^3 - 3x^2 + (1-k)x + 4$ ,

由题设知  $1-k > 0$ ,

当  $x \leq 0$  时,  $g'(x) = 3x^2 - 6x + 1 - k > 0$ ,  $g(x)$  单调递增,  $g(-1) = k - 1$ ,  $g(0) = 4$ ,  
 则  $g(x) = 0$  在  $(-\infty, 0]$  有唯一实根.

当  $x > 0$  时, 令  $h(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ , 则  $g(x) = h(x) + (1 - k)x > h(x)$ .

则  $h'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$  单调递增,  $g(-1) = k - 1$ ,  $g(0) = 4$ ,  
 则  $g(x) = 0$  在  $(-\infty, 0]$  有唯一实根.

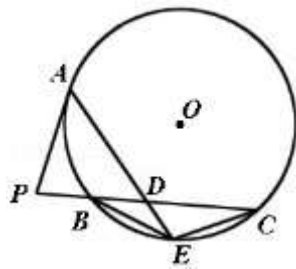
$\therefore g(x) > h(x) \geq h(2) = 0$ ,

$\therefore g(x) = 0$  在  $(0, +\infty)$  上没有实根.

综合当  $k < 1$  时, 曲线  $y = f(x)$  与直线  $y = kx - 2$  只有一个交点.

### 三、选修 4-1: 几何证明选讲

22. (10 分) 如图,  $P$  是  $\odot O$  外一点,  $PA$  是切线,  $A$  为切点, 割线  $PBC$  与  $\odot O$  相交于点  $B, C$ ,  $PC = 2PA$ ,  $D$  为  $PC$  的中点,  $AD$  的延长线交  $\odot O$  于点  $E$ , 证明:



(I)  $BE = EC$ ;

(II)  $AD \cdot DE = 2PB^2$ .

解析: (I) 连接  $OE, OA$ , 证明  $OE \perp BC$ , 可得  $E$  是  $\widehat{BC}$  的中点, 从而  $BE = EC$ ;

(II) 利用切割线定理证明  $PD = 2PB$ ,  $PB = BD$ , 结合相交弦定理可得  $AD \cdot DE = 2PB^2$ .

答案: (I) 连接  $OE, OA$ , 则  $\angle OAE = \angle OEA$ ,  $\angle OAP = 90^\circ$ ,

$\because PC = 2PA$ ,  $D$  为  $PC$  的中点,

$\therefore PA = PD$ ,

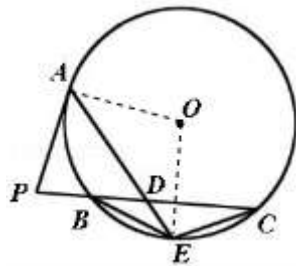
$\therefore \angle PAD = \angle PDA$ ,

$\because \angle PDA = \angle CDE$ ,

$\therefore \angle OEA + \angle CDE = \angle OAE + \angle PAD = 90^\circ$ ,

$\therefore OE \perp BC$ ,  $\therefore E$  是  $\widehat{BC}$  的中点,  $\therefore BE = EC$ ;

(II)  $\because PA$  是切线,  $A$  为切点, 割线  $PBC$  与  $\odot O$  相交于点  $B, C$ ,



$\therefore PA^2 = PB \cdot PC$ ,

$\because PC = 2PA$ ,  $\therefore PA = 2PB$ ,  $\therefore PD = 2PB$ ,  $\therefore PB = BD$ ,  $\therefore BD \cdot DC = PB \cdot 2PB$ ,

$\because AD \cdot DE = BD \cdot DC$ ,  $\therefore AD \cdot DE = 2PB^2$ .

#### 四、选修 4-4, 坐标系与参数方程

23. 在直角坐标系  $xOy$  中, 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 半圆  $C$  的极坐标方程  $\rho=2\cos\theta$ ,  $\theta\in[0, \frac{\pi}{2}]$ .

(I) 求  $C$  的参数方程;

(II) 设点  $D$  在  $C$  上,  $C$  在  $D$  处的切线与直线  $l: y=\sqrt{3}x+2$  垂直, 根据 (I) 中你得到的参数方程, 确定  $D$  的坐标.

解析: (I) 半圆  $C$  的极坐标方程化为直角坐标方程为  $(x-1)^2+y^2=1$ , 令  $x-1=\cos\alpha\in[-1, 1]$ ,  $y=\sin\alpha$ , 可得半圆  $C$  的参数方程.

(II) 由题意可得直线  $CD$  和直线  $l$  平行. 设点  $D$  的坐标为  $(1+\cos\alpha, \sin\alpha)$ , 根据直线  $CD$  和直线  $l$  的斜率相等求得  $\cot\alpha$  的值, 可得  $\alpha$  的值, 从而得到点  $D$  的坐标.

答案: (I) 半圆  $C$  的极坐标方程  $\rho=2\cos\theta$ ,  $\theta\in[0, \frac{\pi}{2}]$ , 即  $\rho^2=2\rho\cos\theta$ ,

化为直角坐标方程为  $(x-1)^2+y^2=1$ ,  $x\in[0, 2]$ 、 $y\in[0, 1]$ .

令  $x-1=\cos\alpha\in[-1, 1]$ ,  $y=\sin\alpha$ ,  $\alpha\in[0, \pi]$ .

故半圆  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x=1+\cos\alpha \\ y=\sin\alpha \end{cases}$ ,  $\alpha\in[0, \pi]$ .

(II) 设点  $D$  在  $C$  上,  $C$  在  $D$  处的切线与直线  $l: y=\sqrt{3}x+2$  垂直,

$\therefore$  直线  $CD$  和直线  $l$  平行, 故直线  $CD$  和直线  $l$  斜率相等.

设点  $D$  的坐标为  $(1+\cos\alpha, \sin\alpha)$ ,

$\because C(1, 0)$ ,

$$\therefore \frac{\sin\alpha - 0}{(1+\cos\alpha) - 1} = \sqrt{3},$$

解得  $\tan\alpha = \sqrt{3}$ , 即  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ,

故点  $D$  的坐标为  $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ .

#### 五、选修 4-5: 不等式选讲

24. 设函数  $f(x) = |x + \frac{1}{a}| + |x - a|$  ( $a > 0$ ).

(I) 证明:  $f(x) \geq 2$ ;

(II) 若  $f(3) < 5$ , 求  $a$  的取值范围.

解析: (I) 由  $a > 0$ ,  $f(x) = |x + \frac{1}{a}| + |x - a|$ , 利用绝对值三角不等式、基本不等式证得  $f(x) \geq 2$  成立.

(II) 由  $f(3) = |3 + \frac{1}{a}| + |3 - a| < 5$ , 分当  $a > 3$  时和当  $0 < a \leq 3$  时两种情况, 分别去掉绝对值, 求得不等式的解集, 再取并集, 即得所求.

答案: (I)  $\because a > 0$ ,  $f(x) = |x + \frac{1}{a}| + |x - a| \geq |(x + \frac{1}{a}) - (x - a)| = |a + \frac{1}{a}| = a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$ ,

故不等式  $f(x) \geq 2$  成立.

$$(II) \because f(3) = \left| 3 + \frac{1}{a} \right| + |3-a| < 5,$$

$\therefore$  当  $a > 3$  时, 不等式即  $a + \frac{1}{a} < 5$ , 即  $a^2 - 5a + 1 < 0$ ,

$$\text{解得 } 3 < a < \frac{5 + \sqrt{21}}{2}.$$

当  $0 < a \leq 3$  时, 不等式即  $6 - a + \frac{1}{a} < 5$ ,

$$\text{即 } a^2 - a - 1 > 0, \text{ 求得 } \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < a \leq 3.$$

综上所述,  $a$  的取值范围  $\left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right)$ .