

2018年湖南省岳阳市中考一模试卷数学

一、选择题(每小题3分,共24分)

1. 生物学家发现了一种病毒,其长度约为0.00000032mm,数据0.00000032用科学记数法表示正确的是()

- A. 3.2×10^7
- B. 3.2×10^8
- C. 3.2×10^{-7}
- D. 3.2×10^{-8}

解析: 绝对值小于1的正数也可以利用科学记数法表示,一般形式为 $a \times 10^{-n}$,与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂,指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的0的个数所决定. $0.00000032 = 3.2 \times 10^{-7}$.

答案: C

2. 下列计算正确的是()

- A. $2a+3b=5ab$
- B. $\sqrt{36} = \pm 6$
- C. $a^6 \div a^2 = a^4$
- D. $(2ab^2)^3 = 6a^3b^5$

解析: A、 $2a+3b$,无法计算,故此选项错误;

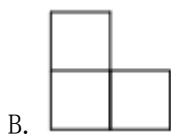
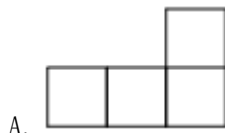
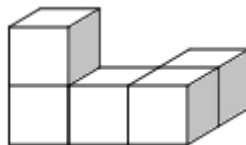
B、 $\sqrt{36} = 6$,故此选项错误;

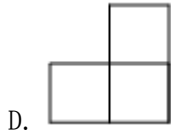
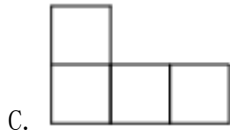
C、 $a^6 \div a^2 = a^4$,正确;

D、 $(2ab^2)^3 = 8a^3b^6$,故此选项错误.

答案: C

3. 如图中几何体的正视图是()

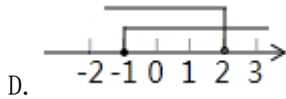
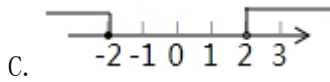
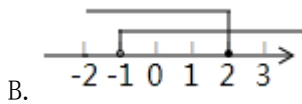
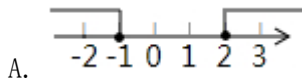




解析：此几何体的主视图由四个正方形组成，下面一层三个正方形，且左边有两层.

答案：C

4. 不等式组 $\begin{cases} x > -1, \\ 2x \leq 4 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是()



解析：由 $x > -1$ ，得 $x > -1$ ，由 $2x \leq 4$ ，得 $x \leq 2$ ， \therefore 不等式组的解集是 $-1 < x \leq 2$.

答案：B

5. 若关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的值可以是()

A. 0

B. -1

C. -2

D. -3

解析： $\because a=1, b=1, c=-m, \therefore \Delta=b^2-4ac=1^2-4 \times 1 \times (-m)=1+4m,$

\because 关于 x 的方程 $x^2+x-m=0$ 有两个不相等的实数根， $\therefore 1+4m > 0$ ，解得： $m > -\frac{1}{4}$ ，

则 m 的值可以是：0.

答案：A

6. 对于一组统计数据 3, 3, 6, 5, 3. 下列说法错误的是()

A. 众数是 3

B. 平均数是 4

C. 方差是 1.6

D. 中位数是 6

解析：A、这组数据中 3 都出现了 3 次，出现的次数最多，所以这组数据的众数为 3，此选项正确；

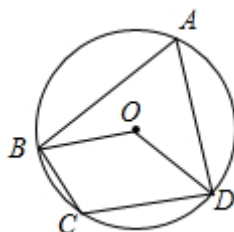
B、由平均数公式求得这组数据的平均数为 4，故此选项正确；

C、 $S^2 = \frac{1}{5} [(3-4)^2 + (3-4)^2 + (6-4)^2 + (5-4)^2 + (3-4)^2] = 1.6$ ，故此选项正确；

D、将这组数据按从大到小的顺序排列，第 3 个数是 3，故中位数为 3，故此选项错误。

答案：D

7. 如图， $\odot O$ 的半径为 3，四边形 ABCD 内接于 $\odot O$ ，连接 OB、OD，若 $\angle BOD = \angle BCD$ ，则 BD 的长为（ ）



A. π

B. $\frac{3}{2}\pi$

C. 2π

D. 3π

解析： \because 四边形 ABCD 内接于 $\odot O$ ， $\therefore \angle BCD + \angle A = 180^\circ$ ，

$\because \angle BOD = 2\angle A$ ， $\angle BOD = \angle BCD$ ， $\therefore 2\angle A + \angle A = 180^\circ$ ，解得： $\angle A = 60^\circ$ ， $\therefore \angle BOD = 120^\circ$ ，

$\therefore BD$ 的长 $= \frac{120\pi \times 3}{180} = 2\pi$ 。

答案：C

8. 定义：若点 P(a, b) 在函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象上，将以 a 为二次项系数，b 为一次项系数构造的

二次函数 $y = ax^2 + bx$ 称为函数 $y = \frac{1}{x}$ 的一个“派生函数”。例如：点 $(2, \frac{1}{2})$ 在函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图

象上，则函数 $y = 2x^2 + \frac{1}{2}x$ 称为函数 $y = \frac{1}{x}$ 的一个“派生函数”。现给出以下两个命题：

(1) 存在函数 $y = \frac{1}{x}$ 的一个“派生函数”，其图象的对称轴在 y 轴的右侧。

(2) 函数 $y = \frac{1}{x}$ 的所有“派生函数”的图象都经过同一点。下列判断正确的是（ ）

A. 命题 (1) 与命题 (2) 都是真命题

B. 命题 (1) 与命题 (2) 都是假命题

C. 命题 (1) 是假命题，命题 (2) 是真命题

D. 命题 (1) 是真命题，命题 (2) 是假命题

解析：(1) ∵ P(a, b) 在 $y = \frac{1}{x}$ 上，∴ a 和 b 同号，所以对称轴在 y 轴左侧，

∴ 存在函数 $y = \frac{1}{x}$ 的一个“派生函数”，其图象的对称轴在 y 轴的右侧是假命题.

(2) ∵ 函数 $y = \frac{1}{x}$ 的所有“派生函数”为 $y = ax^2 + bx$ ，∴ x=0 时，y=0，

∴ 所有“派生函数”为 $y = ax^2 + bx$ 经过原点，∴ 函数 $y = \frac{1}{x}$ 的所有“派生函数”，的图象都经过同一点，是真命题.

答案：C

二、填空题(每小题 4 分，共 32 分)

9. -5 的倒数是_____； $-\frac{1}{2018}$ 的相反数是_____.

解析：-5 的倒数是 $-\frac{1}{5}$ ； $-\frac{1}{2018}$ 的相反数是 $\frac{1}{2018}$.

答案： $-\frac{1}{5}$ ； $\frac{1}{2018}$

10. 分解因式： $x^3 - 9x =$ _____.

解析：原式 $= x(x^2 - 9) = x(x+3)(x-3)$.

答案： $x(x+3)(x-3)$

11. 二次根式 $\sqrt{a-2}$ 中字母 a 的取值范围是_____.

解析：根据题意得： $a-2 \geq 0$ ，解得： $a \geq 2$.

答案： $a \geq 2$

12. 方程 $3x(x-1) = 2(x-1)$ 的根为_____.

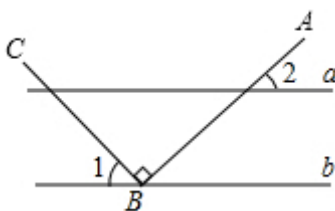
解析： $3x(x-1) = 2(x-1)$ ，

移项得： $3x(x-1) - 2(x-1) = 0$ ，即 $(x-1)(3x-2) = 0$ ，∴ $x-1=0$ ， $3x-2=0$ ，

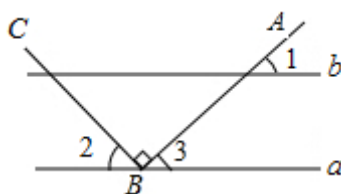
解方程得： $x_1=1$ ， $x_2=\frac{2}{3}$.

答案： $x=1$ 或 $x=\frac{2}{3}$

13. 如图， $a \parallel b$ ，点 B 在直线 a 上，且 $AB \perp BC$ ， $\angle 1 = 35^\circ$ ，那么 $\angle 2 =$ _____.

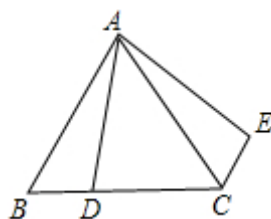


解析: $\because a \parallel b, \angle 1 = 35^\circ, \therefore \angle 3 = \angle 1 = 35^\circ. \because AB \perp BC, \therefore \angle 2 = 90^\circ - \angle 3 = 55^\circ.$



答案: 55°

14. 如图, 在等边三角形 ABC 中, $AB=6$, D 是 BC 上一点, 且 $BC=3BD$, $\triangle ABD$ 绕点 A 旋转后得到 $\triangle ACE$, 则 CE 的长度为_____.



解析: \because 在等边三角形 ABC 中, $AB=6, \therefore BC=AB=6,$

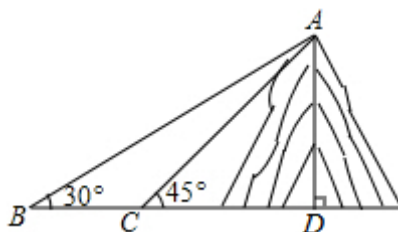
$\because BC=3BD, \therefore BD = \frac{1}{3} BC = 2,$

$\because \triangle ABD$ 绕点 A 旋转后得到 $\triangle ACE, \therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE, \therefore CE = BD = 2.$

答案: 2

15. 如图, 小明在一块平地上测山高, 先在 B 处测得山顶 A 的仰角为 30° , 然后向山脚直行 100 米到达 C 处, 再测得山顶 A 的仰角为 45° , 那么山高 AD 为_____米 (结果保留整数,

测角仪忽略不计, $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732$)



解析: 如图, $\angle ABD = 30^\circ, \angle ACD = 45^\circ, BC = 100\text{m},$

设 $AD = x\text{m}$, 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\because \tan \angle ACD = \frac{AD}{CD}, \therefore CD = AD = x, \therefore BD = BC + CD = x + 100,$

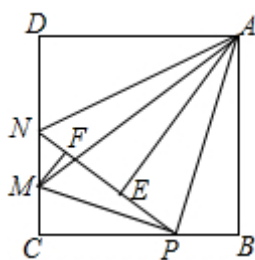
在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\because \tan \angle ABD = \frac{AD}{BD}, \therefore x = \frac{\sqrt{3}}{3} (x + 100), \therefore x = 50(\sqrt{3} + 1) \approx 137,$

即山高 AD 为 137 米.

答案: 137

16. 如图, 在边长为 2 的正方形 ABCD 中, P 是 BC 边上一动点 (点 P 不与 B、C 重合), 将 $\triangle ABP$ 沿直线 AP 翻折, 点 B 落在点 E 处; 在 CD 上有一点 M, 使得将 $\triangle CMP$ 沿直线 MP 翻折后, 点 C

落在直线 PE 上的点 F 处, 直线 PE 交 CD 于点 N, 连接 MA、NA, 则以下结论: ① $\triangle CMP \sim \triangle BPA$; ②四边形 AMCB 的面积最大值为 2.5; ③ $\triangle ADN \cong \triangle AEN$; ④线段 AM 的最小值为 2.5; ⑤当 P 为 BC 中点时, AE 为线段 NP 的中垂线. 正确的有_____ (只填序号)



解析: ①由翻折可知, $\angle APE = \angle APB$, $\angle MPC = \angle MPN$,

$$\therefore \angle APE + \angle MPF = \frac{1}{2} \angle CPN + \frac{1}{2} \angle BPE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CPM + \angle APB = 90^\circ, \because \angle APB + \angle PAB = 90^\circ,$$

$\therefore \angle CPM = \angle PAB$, $\because \angle C = \angle B = 90^\circ$, $\therefore \triangle CMP \sim \triangle BPA$. 故①正确;

②设 $PB = x$, 则 $CP = 2 - x$,

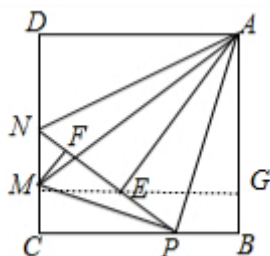
$$\because \triangle CMP \sim \triangle BPA, \therefore \frac{PB}{CM} = \frac{AB}{PC}, \therefore CM = \frac{1}{2}x(2-x),$$

$$\therefore S_{\text{四边形 AMCB}} = \frac{1}{2} \left[2 + \frac{1}{2}x(2-x) \right] \times 2 = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2 = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2.5,$$

$\therefore x = 1$ 时, 四边形 AMCB 面积最大值为 2.5, 故②正确;

③在 $\text{Rt} \triangle ADN$ 和 $\text{Rt} \triangle AEN$ 中, $AN = AN$, $AD = AE$, $\therefore \triangle ADN \cong \triangle AEN$. 故③正确;

④作 $MG \perp AB$ 于 G,



$$\because AM = \sqrt{MG^2 + AG^2} = \sqrt{4 + AG^2}, \therefore AG \text{ 最小时 } AM \text{ 最小},$$

$$\because AG = AB - BG = AB - CM = 2 - \frac{1}{2}x(2-x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{3}{2},$$

$$\therefore x = 1 \text{ 时, } AG \text{ 最小值} = \frac{3}{2}, \therefore AM \text{ 的最小值} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2}, \text{ 故④正确.}$$

⑤当 $PB = PC = PE = 1$ 时, 由折叠知, $ND = NE$,

设 $ND = NE = y$, 在 $\text{Rt} \triangle PCN$ 中, $(y+1)^2 = (2-y)^2 + 1^2$, 解得 $y = \frac{2}{3}$, $\therefore NE = \frac{2}{3}$, $\therefore NE \neq EP$, 故⑤错

误.

答案: ①②③④

三、解答题(17、18 题各 6 分, 19、20、21、22 题各 8 分, 23、24 题各 10 分, 共 64 分)

17. 计算: $|1-\sqrt{2}|+2\cos 45^{\circ}-\sqrt{8}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

解析: 根据绝对值的意义、特殊角的三角函数值、二次根式的化简和负指数幂的运算, 分别求得每项的值, 再进行计算即可.

答案: $|1-\sqrt{2}|+\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

18. 先化简, 再求值: $\left(1-\frac{5}{x+2}\right)\div\frac{x^2-9}{x+3}$, 其中 $x=\sqrt{3}-2$.

解析: 把分式进行化简, 再把 x 的值代入即可求出结果.

答案: 原式 = $\frac{x-3}{x+2}\div\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}=\frac{x-3}{x+2}\cdot\frac{x+3}{(x+3)(x-3)}=\frac{1}{x+2}$.

当 $x=\sqrt{3}-2$ 时, 原式 = $\frac{1}{\sqrt{3}-2+2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

19. 我校为了创建“书香校园”, 购买了一批图书, 其中科普类图书平均每本的价格比文学类图书平均每本的价格多 4 元, 已知学校用 16000 元购买的科普类图书的本数与用 12000 元购买的文学类图书的本数相等. 求学校购买的科普类图书和文学类图书平均每本的价格各是多少元?

解析: 首先设科普类图书平均每本的价格为 x 元, 则科普类图书平均每本的价格为 $(x+4)$ 元, 根据题意可得等量关系: 用 16000 元购进的科普类图书的本数 = 用 12000 元购买的文学类图书的本数, 根据等量关系列出方程, 再解即可.

答案: 设文学类图书平均每本的价格为 x 元, 则科普类图书平均每本的价格为 $(x+4)$ 元.

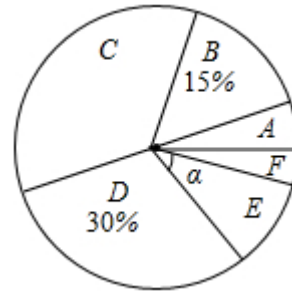
根据题意, 得 $\frac{16000}{x+4}=\frac{12000}{x}$. 解得 $x=12$.

经检验, $x=12$ 是原方程的解, 且符合题意, 则科普类图书平均每本的价格为 $12+4=16$ (元),

答: 文学类图书平均每本的价格为 12 元, 科普类图书平均每本的价格为 16 元.

20. 在星期一的第八节课, 我校体育老师随机抽取了九年级的总分学生进行体育中考的模拟测试, 并对成绩进行统计分析, 绘制了频数分布表和统计图, 按得分划分成 A、B、C、D、E、F 六个等级, 并绘制成如下两幅不完整的统计图表.

等级	得分x(分)	频数(人)
A	$95 < x \leq 100$	4
B	$90 < x \leq 95$	m
C	$85 < x \leq 90$	n
D	$80 < x \leq 85$	24
E	$75 < x \leq 80$	8
F	$70 < x \leq 75$	4



请你根据图表中的信息完成下列问题:

- 1) 本次抽样调查的样本容量是_____. 其中 $m=$ _____, $n=$ _____.
- 2) 扇形统计图中, 求 E 等级对应扇形的圆心角 α 的度数;
- 3) 我校九年级共有 700 名学生, 估计体育测试成绩在 A、B 两个等级的人数共有多少人?
- 4) 我校决定从本次抽取的 A 等级学生(记为甲、乙、丙、丁)中, 随机选择 2 名成为学校代表参加全市体能竞赛, 请你用列表法或画树状图的方法, 求恰好抽到甲和乙的概率.

解析: (1) 用 D 组的频数除以它所占的百分比得到样本容量; 用样本容量乘以 B 组所占的百分比得到 m 的值, 然后用样本容量分别减去其它各组的频数即可得到 n 的值;

(2) 用 E 组所占的百分比乘以 360° 得到 α 的值;

(3) 利用样本估计整体, 用 700 乘以 A、B 两组的频率和可估计体育测试成绩在 A、B 两个等级的人数;

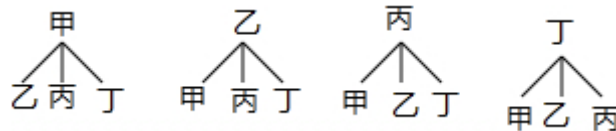
(4) 画树状图展示所有 12 种等可能的结果数, 再找出恰好抽到甲和乙的结果数, 然后根据概率公式求解.

答案: (1) $24 \div 30\% = 80$, 所以样本容量为 80; $m = 80 \times 15\% = 12$, $n = 80 - 12 - 4 - 24 - 8 - 4 = 28$;

(2) E 等级对应扇形的圆心角 α 的度数 $= \frac{8}{80} \times 360^\circ = 36^\circ$;

(3) $700 \times \frac{12+4}{80} = 140$, 所以估计体育测试成绩在 A、B 两个等级的人数共有 140 人;

(4) 画树状图如下:

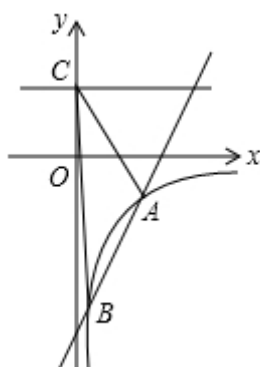


共 12 种等可能的结果数, 其中恰好抽到甲和乙的结果数为 2,

所以恰好抽到甲和乙的概率 $= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

21. 如图, 一次函数 $y=kx+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ ($x>0$) 的图象交于 $A(2, -1)$ 、 $B(\frac{1}{2},$

n) 两点. 直线 $y=2$ 与 y 轴交于点 C .



- 1) 求一次函数与反比例函数的解析式;
- 2) 求 $\triangle ABC$ 的面积;
- 3) 直接写出不等式 $kx+b > \frac{m}{x}$ 在如图所示范围内的解集.

解析: 1) 把 A 坐标代入反比例解析式求出 m 的值, 确定出反比例解析式, 再将 B 坐标代入求出 n 的值, 确定出 B 坐标, 将 A 与 B 坐标代入一次函数解析式求出 k 与 b 的值, 即可确定出一次函数解析式;

2) 利用两点间的距离公式求出 AB 的长, 利用点到直线的距离公式求出点 C 到直线 AB 的距离, 即可确定出三角形 ABC 面积.

3) 根据函数图象, 找到直线在双曲线上方部分对应的 x 的取值范围即可得.

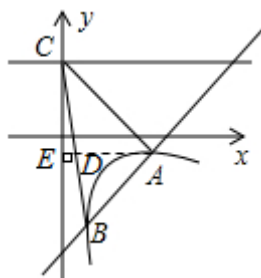
答案: 1) 把 $A(2, -1)$ 代入反比例解析式得: $-1 = \frac{m}{2}$, 即 $m = -2$, \therefore 反比例解析式为 $y = -\frac{2}{x}$,

把 $B(\frac{1}{2}, n)$ 代入反比例解析式得: $n = -4$, 即 $B(\frac{1}{2}, -4)$,

把 A 与 B 坐标代入 $y = kx + b$ 中得: $\begin{cases} 2k + b = -1, \\ k + b = -4, \end{cases}$ 解得: $k = 2, b = -5$,

则一次函数解析式为 $y = 2x - 5$;

2) 如图,



$\because A(2, -1), B(\frac{1}{2}, -4)$, 直线 AB 解析式为 $y = 2x - 5$,

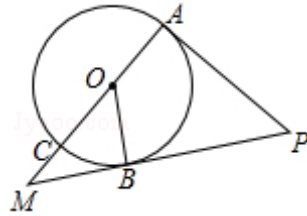
$\because C(0, 2)$, 直线 BC 解析式为 $y = -12x + 2$,

将 $y = -1$ 代入 BC 的解析式得 $x = \frac{1}{4}$, 则 $AD = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.

$\because x_C - x_B = 2 - (-4) = 6$, $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AD \times (y_C - y_B) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{4} \times 6 = \frac{21}{4}$.

3) 由图可知, 当 $x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 2$ 时, $kx+b > \frac{m}{x}$.

22. 如图, AC 是 $\odot O$ 的直径, OB 是 $\odot O$ 的半径, PA 切 $\odot O$ 于点 A, PB 与 AC 的延长线交于点 M, $\angle COB = \angle APB$.



(1) 求证: PB 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 当 $OB=3$, $PA=6$ 时, 求 MB、MC 的长.

解析: (1) 根据切线的性质, 可得 $\angle MAP=90^\circ$, 根据直角三角形的性质, 可得 $\angle P+M=90^\circ$, 根据余角的性质, 可得 $\angle M+\angle MOB=90^\circ$, 根据直角三角形的判定, 可得 $\angle MOB=90^\circ$, 根据切线的判定, 可得答案;

(2) 根据相似三角形的判定与性质, 可得 $\frac{MB}{AM} = \frac{OB}{AP} = \frac{OM}{PB}$, 根据解方程组, 可得答案.

答案: (1) $\because AC$ 是 $\odot O$ 的直径, PA 切 $\odot O$ 于点 A, $\therefore PA \perp OA$

\therefore 在 $Rt\triangle MAP$ 中, $\angle M+\angle P=90^\circ$, 而 $\angle COB=\angle APB$,

$\therefore \angle M+\angle COB=90^\circ$,

$\therefore \angle OBM=90^\circ$, 即 $OB \perp BP$,

$\therefore PB$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) $\because \angle COB=\angle APB$, $\angle OBM=\angle PAM$,

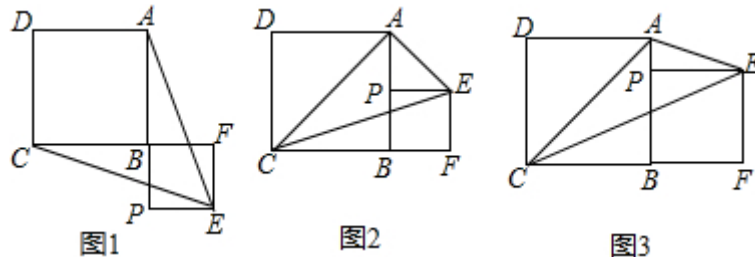
$\therefore \triangle OBM \sim \triangle APM$,

$$\therefore \frac{MB}{AM} = \frac{OB}{AP} = \frac{OM}{PB} = \frac{1}{2},$$

设 $MB=x$, 则 $MA=2x$, $MO=2x-3$, $\therefore MP=4x-6$,

在 $Rt\triangle AMP$ 中, $(4x-6)^2 - (2x)^2 = 6^2$, 解得 $x=4$ 或 0 (舍去), $\therefore MB=4$, $MC=2$.

23. 已知正方形 ABCD, P 为射线 AB 上的一点, 以 BP 为边作正方形 BPEF, 使点 F 在线段 CB 的延长线上, 连接 EA, EC.



(1) 如图 1, 若点 P 在线段 AB 的延长线上, 求证: $EA=EC$;

(2) 如图 2, 若点 P 在线段 AB 的中点, 连接 AC, 判断 $\triangle ACE$ 的形状, 并说明理由;

(3) 如图 3, 若点 P 在线段 AB 上, 连接 AC, 当 EP 平分 $\angle AEC$ 时, 设 $AB=a$, $BP=b$, 求 a:b 及 $\angle AEC$ 的度数.

解析: (1) 根据正方形的性质证明 $\triangle APE \cong \triangle CFE$, 可得结论;

(2) 分别证明 $\angle PAE=45^\circ$ 和 $\angle BAC=45^\circ$ ，则 $\angle CAE=90^\circ$ ，即 $\triangle ACE$ 是直角三角形；

(3) 分别计算 PG 和 BG 的长，利用平行线分线段成比例定理列比例式得： $\frac{PE}{BC} = \frac{PG}{GB}$ ，即

$$\frac{b}{a} = \frac{a-b}{2b-a}，解得：a = \sqrt{2}b，$$

得出 a 与 b 的比，再计算 GH 和 BG 的长，根据角平分线的逆定理得： $\angle HCG = \angle BCG$ ，由平行线的内错角得： $\angle AEC = \angle ACB = 45^\circ$ 。

答案：(1) \because 四边形 $ABCD$ 和四边形 $BPEF$ 是正方形， $\therefore AB=BC, BP=BF, \therefore AP=CF$ ，

在 $\triangle APE$ 和 $\triangle CFE$ 中，

$\because AP=CF, \angle P=\angle F, PE=EF, \therefore \triangle APE \cong \triangle CFE, \therefore EA=EC$ ；

(2) $\triangle ACE$ 是直角三角形，理由是：

如图 2， $\because P$ 为 AB 的中点， $\therefore PA=PB$ ，

$\because PB=PE, \therefore PA=PE, \therefore \angle PAE=45^\circ$ ，

又 $\because \angle BAC=45^\circ, \therefore \angle CAE=90^\circ$ ，即 $\triangle ACE$ 是直角三角形；

(3) 如图 3，设 CE 交 AB 于 G ，

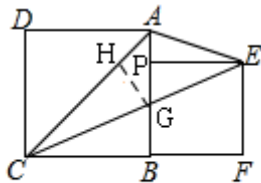


图3

$\because EP$ 平分 $\angle AEC, EP \perp AG$ ，

$\therefore AP=PG=a-b, BG=a-(2a-2b)=2b-a$ ，

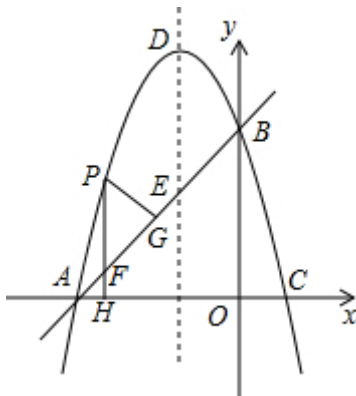
$\because PE \parallel CF, \therefore \frac{PE}{BC} = \frac{PG}{GB}$ ，即 $\frac{b}{a} = \frac{a-b}{2b-a}$ ，解得： $a = \sqrt{2}b, \therefore a : b = \sqrt{2} : 1$ ，

作 $GH \perp AC$ 于 $H, \because \angle CAB=45^\circ, \therefore HG = \frac{\sqrt{2}}{2}AG = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\sqrt{2}b - 2b) = (2 - \sqrt{2})b$ ，

又 $\because BG=2b-a=(2 - \sqrt{2})b, \therefore GH=GB, GH \perp AC, GB \perp BC, \therefore \angle HCG = \angle BCG$ ，

$\because PE \parallel CF, \therefore \angle PEG = \angle BCG, \therefore \angle AEC = \angle ACB = 45^\circ$ 。

24. 如图，在平面直角坐标系 xoy 中，直线 $y=x+3$ 交 x 轴于 A 点，交 y 轴于 B 点，过 $A、B$ 两点的抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 交 x 轴于另一点 C ，点 D 是抛物线的顶点。



(1) 求此抛物线的解析式;

(2) 点 P 是直线 AB 上方的抛物线上一点, (不与点 A、B 重合), 过点 P 作 x 轴的垂线交 x 轴于点 H, 交直线 AB 于点 F, 作 $PG \perp AB$ 于点 G. 求出 $\triangle PFG$ 的周长最大值;

(3) 在抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 上是否存在除点 D 以外的点 M, 使得 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ABD$ 的面积相等? 若存在, 请求出此时点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

解析: (1) 将已知点的坐标代入二次函数的解析式利用待定系数法确定二次函数的解析式即可;

(2) 首先根据 $\triangle PFG$ 是等腰直角三角形, 设 $P(m, -m^2 - 2m + 3)$ 得到 $F(m, m + 3)$, 进而得到 $PF = -m^2 - 2m + 3 - m - 3 = -m^2 - 3m$, 从而得到 $\triangle PFG$ 周长为: $-m^2 - 3m + \sqrt{2}(-m^2 - 3m)$, 配方后即可确定其最大值;

(3) 当 $DM_1 \parallel AB$, $M_3M_2 \parallel AB$, 且与 AB 距离相等时, 根据同底等高可以确定 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ABD$ 的面积相等, 分别求得直线 DM_1 解析式为: $y = x + 5$ 和直线 M_3M_2 解析式为: $y = x + 1$, 联立之后求得交点坐标即可.

答案: (1) \because 直线 AB: $y = x + 3$ 与坐标轴交于 $A(-3, 0)$ 、 $B(0, 3)$,

$$\text{代入抛物线解析式 } y = -x^2 + bx + c \text{ 中, } \begin{cases} 0 = -9 - 3b + c, \\ 3 = c, \end{cases} \therefore \begin{cases} b = -2, \\ c = 3, \end{cases}$$

\therefore 抛物线解析式为: $y = -x^2 - 2x + 3$;

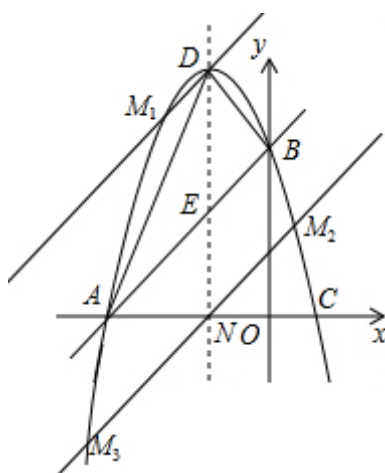
(2) \because 由题意可知 $\triangle PFG$ 是等腰直角三角形,

设 $P(m, -m^2 - 2m + 3)$, $\therefore F(m, m + 3)$, $\therefore PF = -m^2 - 2m + 3 - m - 3 = -m^2 - 3m$,

$$\triangle PFG \text{ 周长为: } -m^2 - 3m + \sqrt{2}(-m^2 - 3m) = -(\sqrt{2} + 1)\left(m + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9(\sqrt{2} + 1)}{4},$$

$$\therefore \triangle PFG \text{ 周长的最大值为: } \frac{9(\sqrt{2} + 1)}{4}.$$

(3) 点 M 有三个位置, 如图所示的 M_1 、 M_2 、 M_3 , 都能使 $\triangle ABM$ 的面积等于 $\triangle ABD$ 的面积.



此时 $DM_1 \parallel AB$, $M_3M_2 \parallel AB$, 且与 AB 距离相等,

$\because D(-1, 4)$, $\therefore E(-1, 2)$ 、则 $N(-1, 0)$

$\because y = x + 3$ 中, $k = 1$, \therefore 直线 DM_1 解析式为: $y = x + 5$,

直线 M_3M_2 解析式为: $y = x + 1$,

$$\therefore x+5=-x^2-2x+3 \text{ 或 } x+1=-x^2-2x+3, \therefore x_1=-1, x_2=-2, x_3 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}, x_4 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2},$$

$$\therefore M_1(-2, 3), M_2\left(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right), M_3\left(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right).$$