

2015年浙江省绍兴市中考真题数学

一、选择题(本题有10小题,每小题4分,共40分)

1. 计算 $(-1) \times 3$ 的结果是( )

- A. -3
- B. -2
- C. 2
- D. 3

解析: 根据有理数的乘法运算法则进行计算即可得解.

$$(-1) \times 3 = -1 \times 3 = -3.$$

答案: A

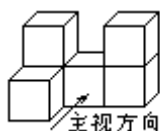
2. 据中国电子商务研究中心监测数据显示, 2015年第一季度中国轻纺城市场群的商品成交额达27 800 000 000元, 将27 800 000 000用科学记数法表示为( )

- A.  $2.78 \times 10^{10}$
- B.  $2.78 \times 10^{11}$
- C.  $27.8 \times 10^{10}$
- D.  $0.278 \times 10^{11}$

解析: 将27 800 000 000用科学记数法表示为 $2.78 \times 10^{10}$ .

答案: A

3. 有6个相同的立方体搭成的几何体如图所示, 则它的主视图是( )



- A.
- B.
- C.
- D.

解析: 从正面看第一层三个小正方形, 第二层左边一个小正方形, 右边一个小正方形.

答案: C

4. 下面是一位同学做的四道题: ① $2a+3b=5ab$ ; ② $(3a^3)^2=6a^6$ ; ③ $a^6 \div a^2=a^3$ ; ④ $a^2 \cdot a^3=a^5$ , 其中做对的一道题的序号是( )

- A. ①

- B. ②  
C. ③  
D. ④

解析：①不是同类项不能合并，故①错误；

②积的乘方等于乘方的积，故②错误；

③同底数幂的除法底数不变指数相减，故③错误；

④同底数幂的乘法底数不变指数相加，故④正确；

答案：D

5. 在一个不透明的袋子中装有除颜色外其它均相同的 3 个红球和 2 个白球，从中任意摸出一个球，则摸出白球的概率是( )

- A.  $\frac{1}{3}$   
B.  $\frac{2}{5}$   
C.  $\frac{1}{2}$   
D.  $\frac{3}{5}$

解析：∵在一个不透明的袋子中装有除颜色外其它均相同的 3 个红球和 2 个白球，

∴从中任意摸出一个球，则摸出白球的概率是： $\frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$ .

答案：B

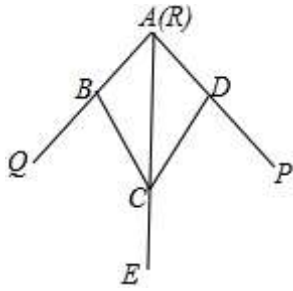
6. 化简  $\frac{x^2}{x-1} + \frac{1}{1-x}$  的结果是( )

- A.  $x+1$   
B.  $\frac{1}{x+1}$   
C.  $x-1$   
D.  $\frac{1}{x-1}$

解析：原式 =  $\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$ .

答案：A

7. 如图，小敏做了一个角平分仪 ABCD，其中 AB=AD，BC=DC. 将仪器上的点 A 与  $\angle PRQ$  的顶点 R 重合，调整 AB 和 AD，使它们分别落在角的两边上，过点 A，C 画一条射线 AE，AE 就是  $\angle PRQ$  的平分线. 此角平分仪的画图原理是：根据仪器结构，可得  $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ ，这样就有  $\angle QAE = \angle PAE$ . 则说明这两个三角形全等的依据是( )



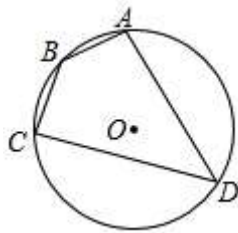
- A. SAS
- B. ASA
- C. AAS
- D. SSS

解析：在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle ABC$ 中，
$$\begin{cases} AD = AB, \\ DC = BC, \\ AC = AC, \end{cases} \therefore \triangle ADC \cong \triangle ABC (SSS),$$

$\therefore \angle DAC = \angle BAC$ ，即 $\angle QAE = \angle PAE$ 。

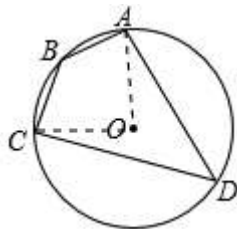
答案：D

8. 如图，四边形ABCD是 $\odot O$ 的内接四边形， $\odot O$ 的半径为2， $\angle B = 135^\circ$ ，则弧AC的长( )



- A.  $2\pi$
- B.  $\pi$
- C.  $\frac{\pi}{2}$
- D.  $\frac{\pi}{3}$

解析：连接OA、OC，



$\because \angle B = 135^\circ$ ， $\therefore \angle D = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ ， $\therefore \angle AOC = 90^\circ$ ，则弧AC的长 $= \frac{90\pi \times 2}{180} = \pi$ 。

答案：B

9. 如果一种变换是将抛物线向右平移2个单位或向上平移1个单位，我们把这种变换称为抛物线的简单变换. 已知抛物线经过两次简单变换后的一条抛物线是 $y = x^2 + 1$ ，则原抛物线的解

析式不可能的是( )

- A.  $y=x^2-1$
- B.  $y=x^2+6x+5$
- C.  $y=x^2+4x+4$
- D.  $y=x^2+8x+17$

解析: A、 $y=x^2-1$ , 先向上平移 1 个单位得到  $y=x^2$ , 再向上平移 1 个单位可以得到  $y=x^2+1$ , 故 A 正确;

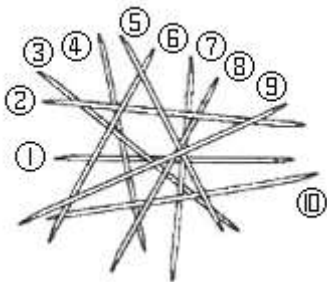
B、 $y=x^2+6x+5=(x+3)^2-4$ , 无法经两次简单变换得到  $y=x^2+1$ , 故 B 错误;

C、 $y=x^2+4x+4=(x+2)^2$ , 先向右平移 2 个单位得到  $y=(x+2-2)^2=x^2$ , 再向上平移 1 个单位得到  $y=x^2+1$ , 故 C 正确;

D、 $y=x^2+8x+17=(x+4)^2+1$ , 先向右平移 2 个单位得到  $y=(x+4-2)^2+1=(x+2)^2+1$ , 再向右平移 2 个单位得到  $y=x^2+1$ , 故 D 正确.

答案: B

10. 挑游戏棒是一种好玩的游戏, 游戏规则: 当一根棒条没有被其它棒条压着时, 就可以把它往上拿走. 如图中, 按照这一规则, 第 1 次应拿走⑨号棒, 第 2 次应拿走⑤号棒, ..., 则第 6 次应拿走( )



- A. ②号棒
- B. ⑦号棒
- C. ⑧号棒
- D. ⑩号棒

解析: 仔细观察图形发现:

第 1 次应拿走⑨号棒,

第 2 次应拿走⑤号棒,

第 3 次应拿走⑥号棒,

第 4 次应拿走②号棒,

第 5 次应拿走⑧号棒,

第 6 次应拿走⑩号棒,

答案: D

二、填空题(本题有 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

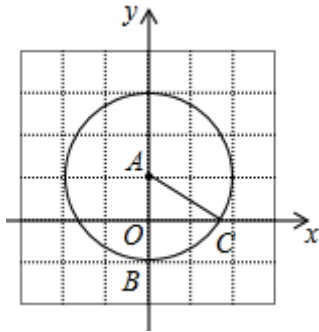
11. 分解因式:  $x^2-4=$ \_\_\_\_\_.

解析: 直接利用平方差公式进行因式分解即可.

$$x^2-4=(x+2)(x-2).$$

答案:  $(x+2)(x-2)$

12. 如图，已知点  $A(0, 1)$ ， $B(0, -1)$ ，以点  $A$  为圆心， $AB$  为半径作圆，交  $x$  轴的正半轴于点  $C$ ，则  $\angle BAC$  等于\_\_\_\_\_度.

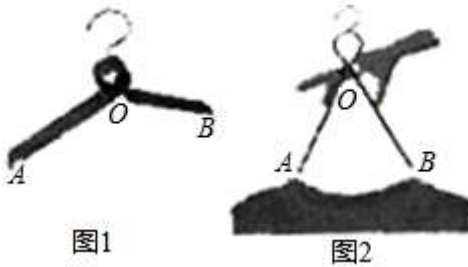


解析：∵  $A(0, 1)$ ， $B(0, -1)$ ，∴  $AB=2$ ， $OA=1$ ，∴  $AC=2$ ，

在  $\text{Rt}\triangle AOC$  中， $\cos \angle BAC = \frac{OA}{AC} = \frac{1}{2}$ ，∴  $\angle BAC = 60^\circ$  .

答案：60

13. 由于木质衣架没有柔性，在挂置衣服的时候不太方便操作. 小敏设计了一种衣架，在使用时能轻易收拢，然后套进衣服后松开即可. 如图 1，衣架杆  $OA=OB=18\text{cm}$ ，若衣架收拢时， $\angle AOB=60^\circ$ ，如图 2，则此时  $A, B$  两点之间的距离是\_\_\_\_\_  $\text{cm}$ .

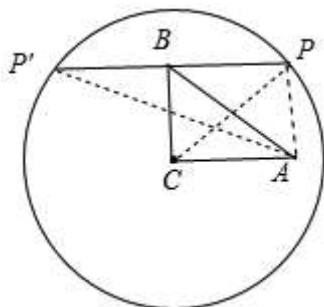


解析：∵  $OA=OB$ ， $\angle AOB=60^\circ$ ，∴  $\triangle AOB$  是等边三角形，∴  $AB=OA=OB=18\text{cm}$ .

答案：18

14. 在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中， $\angle C=90^\circ$ ， $BC=3$ ， $AC=4$ ，点  $P$  在以  $C$  为圆心，5 为半径的圆上，连结  $PA$ ， $PB$ . 若  $PB=4$ ，则  $PA$  的长为\_\_\_\_\_.

解析：连接  $CP$ ， $PB$  的延长线交  $\odot C$  于  $P'$ ，如图，



∵  $CP=5$ ， $CB=3$ ， $PB=4$ ，∴  $CB^2+PB^2=CP^2$ ，

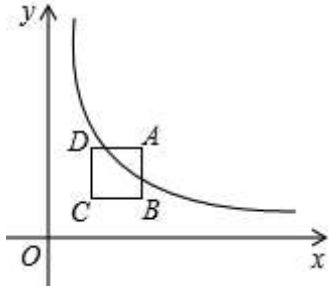
∴  $\triangle CPB$  为直角三角形， $\angle CBP=90^\circ$ ，∴  $CB \perp PB$ ，∴  $PB=P'B=4$ ，

∵  $\angle C=90^\circ$ ，∴  $PB \parallel AC$ ，而  $PB=AC=4$ ，∴ 四边形  $ACBP$  为矩形，∴  $PA=BC=3$ ，

在  $\text{Rt}\triangle APP'$  中，∵  $PA=3$ ， $PP'=8$ ，∴  $P'A = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$ ，∴  $PA$  的长为 3 或  $\sqrt{73}$  .

答案：3 或  $\sqrt{73}$ .

15. 在平面直角坐标系的第一象限内，边长为 1 的正方形 ABCD 的边均平行于坐标轴，A 点的坐标为 (a, a). 如图，若曲线  $y = \frac{3}{x}$  ( $x > 0$ ) 与此正方形的边有交点，则 a 的取值范围是\_\_\_\_\_.



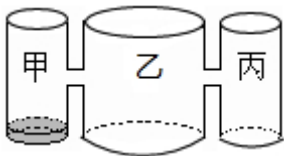
解析：∵A 点的坐标为 (a, a). 根据题意 C(a-1, a-1),

当 A 在双曲线  $y = \frac{3}{x}$  ( $x > 0$ ) 时，则  $a-1 = \frac{3}{a-1}$ ，解得  $a = \sqrt{3} + 1$ ,

当 C 在双曲线  $y = \frac{3}{x}$  ( $x > 0$ ) 时，则  $a = \frac{3}{a}$ ，解得  $a = \sqrt{3}$ ，∴a 的取值范围是  $\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3} + 1$ .

答案：  $\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3} + 1$

16. 实验室里，水平桌面上有甲、乙、丙三个圆柱形容器（容器足够高），底面半径之比为 1: 2: 1，用两个相同的管子，在容器的 5cm 高度处连通（即管子底端离容器底 5cm）. 现三个容器中，只有甲中有水，水位高 1cm，如图所示. 若每分钟同时向乙和丙注入相同量的水，开始注水 1 分钟，乙的水位上升  $\frac{5}{6}$  cm，则开始注入\_\_\_\_\_分钟的水量后，甲与乙的水位高度之差是 0.5cm.



解析：∵甲、乙、丙三个圆柱形容器（容器足够高），底面半径之比为 1: 2: 1，

∵注水 1 分钟，乙的水位上升  $\frac{5}{6}$  cm，

∴注水 1 分钟，丙的水位上升  $\frac{10}{3}$  cm，

设开始注入 t 分钟的水量后，甲与乙的水位高度之差是 0.5cm，

甲与乙的水位高度之差是 0.5cm 有三种情况：

①当乙的水位低于甲的水位时，有  $1 - \frac{5}{6}t = 0.5$ ，解得：  $t = \frac{3}{5}$  分钟；

②当甲的水位低于乙的水位时，甲的水位不变时，∴  $\frac{5}{6}t - 1 = 0.5$ ，解得：  $t = \frac{9}{5}$ ，

$\therefore \frac{10}{3} \times \frac{9}{5} = 6 > 5$ ,  $\therefore$  此时丙容器已向甲容器溢水,

$\therefore 5 \div \frac{10}{3} = \frac{3}{2}$  分钟,  $\frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{4}$ , 即经过  $\frac{3}{2}$  分钟边容器的水到达管子底部, 乙的水位上升  $\frac{5}{4}$ ,

$\therefore \frac{5}{4} + 2 \times \frac{5}{6} (t - \frac{3}{2}) - 1 = 0.5$ , 解得:  $t = \frac{33}{20}$ ;

③当甲的水位低于乙的水位时, 乙的水位到达管子底部, 甲的水位上升时,

$\therefore$  乙的水位到达管子底部的时间为:  $\frac{3}{2} + (5 - \frac{5}{4}) \div \frac{5}{6} \div 2 = \frac{15}{4}$  分钟,

$\therefore 5 - 1 - 2 \times \frac{10}{3} (t - \frac{15}{4}) = 0.5$ , 解得:  $t = \frac{171}{40}$ ,

综上所述开始注入  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{33}{20}$ ,  $\frac{171}{40}$  分钟的水量后, 甲与乙的水位高度之差是 0.5cm.

### 三、解答题(本题有 8 小题, 共 80 分)

17. (1) 计算:  $2\cos 45^\circ - (\pi + 1)^0 + \sqrt{\frac{1}{4}} + (\frac{1}{2})^{-1}$ ;

(2) 解不等式:  $3x - 5 \leq 2(x + 2)$

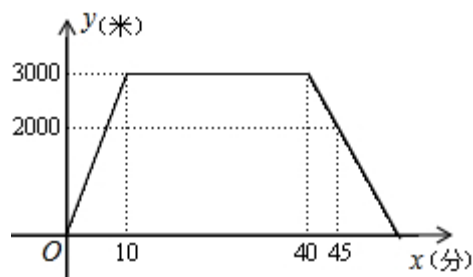
解析: (1) 原式第一项利用特殊角的三角函数值计算, 第二项利用零指数幂法则计算, 第三项利用算术平方根定义计算, 最后一项利用负整数指数幂法则计算即可得到结果;

(2) 不等式去括号, 移项合并, 把  $x$  系数化为 1, 即可求出解.

答案: (1) 原式  $= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{1}{2} + 2 = \sqrt{2} + \frac{3}{2}$ ;

(2) 去括号得:  $3x - 5 \leq 2x + 4$ , 移项合并得:  $x \leq 9$ .

18. 小敏上午 8:00 从家里出发, 骑车去一家超市购物, 然后从这家超市返回家中. 小敏离家的路程  $y$  (米) 和所经过的时间  $x$  (分) 之间的函数图象如图所示. 请根据图象回答下列问题:



(1) 小敏去超市途中的速度是多少? 在超市逗留了多少时间?

(2) 小敏几点几分返回到家?

解析: (1) 根据观察横坐标, 可得去超市的时间, 根据观察纵坐标, 可得去超市的路程, 根据路程与时间的关系, 可得答案; 在超市逗留的时间即路程不变化所对应的时间段;

(2) 求出返回家时的函数解析式, 当  $y=0$  时, 求出  $x$  的值, 即可解答.

答案: (1) 小敏去超市途中的速度是:  $3000 \div 10 = 300$  (米/分),

在超市逗留了的时间为:  $40 - 10 = 30$  (分).

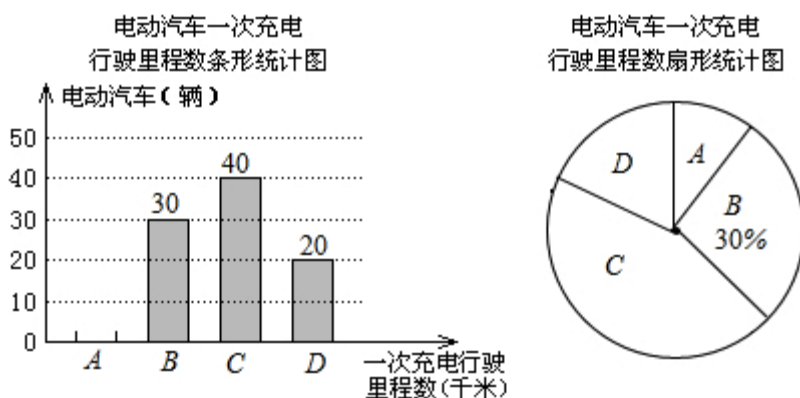
(2) 设返回家时,  $y$  与  $x$  的函数解析式为  $y=kx+b$ ,

把  $(40, 3000)$ ,  $(45, 2000)$  代入得: 
$$\begin{cases} 3000 = 40k + b, \\ 2000 = 45k + b, \end{cases} \text{解得: } \begin{cases} k = -200, \\ b = 11000, \end{cases}$$

$\therefore$  函数解析式为  $y=-200x+11000$ ,

当  $y=0$  时,  $x=55$ ,  $\therefore$  返回到家的时间为: 8: 55.

19. 为了解某种电动汽车的性能, 对这种电动汽车进行了抽检, 将一次充电后行驶的里程数分为 A, B, C, D 四个等级, 其中相应等级的里程依次为 200 千米, 210 千米, 220 千米, 230 千米, 获得如下不完整的统计图.



根据以上信息, 解答下列问题:

(1) 问这次被抽检的电动汽车共有几辆? 并补全条形统计图;

(2) 估计这种电动汽车一次充电后行驶的平均里程数为多少千米?

解析: (1) 根据条形统计图和扇形图可知, 将一次充电后行驶的里程数分为 B 等级的有 30 辆电动汽车, 所占的百分比为 30%, 用  $30 \div 30\%$  即可求出电动汽车的总量; 分别计算出 C、D 所占的百分比, 即可得到 A 所占的百分比, 即可求出 A 的电动汽车的辆数, 即可补全统计图;

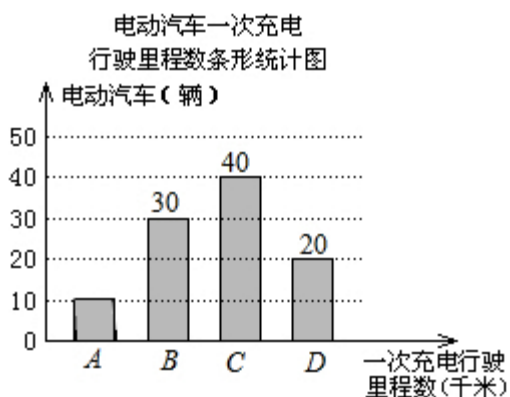
(2) 用总里程除以汽车总辆数, 即可解答.

答案: (1) 这次被抽检的电动汽车共有:  $30 \div 30\% = 100$  (辆),

C 所占的百分比为:  $40 \div 100 \times 100\% = 40\%$ , D 所占的百分比为:  $20 \div 100 \times 100\% = 20\%$ ,

A 所占的百分比为:  $100\% - 40\% - 20\% - 30\% = 10\%$ ,

A 等级电动汽车的辆数为:  $100 \times 10\% = 10$  (辆), 补全统计图如图所示:

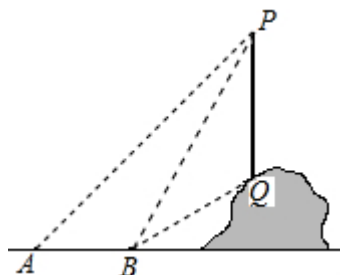


(2) 这种电动汽车一次充电后行驶的平均里程数为:  $\frac{1}{100} \times (10 \times 200 + 30 \times 210 + 220 \times 40 + 20 \times 230) = 217$  (千米),



∴估计这种电动汽车一次充电后行驶的平均里程数为 217 千米.

20. 如图, 从地面上的点 A 看一山坡上的电线杆 PQ, 测得杆顶端点 P 的仰角是  $45^\circ$ , 向前走 6m 到达 B 点, 测得杆顶端点 P 和杆底端点 Q 的仰角分别是  $60^\circ$  和  $30^\circ$ .



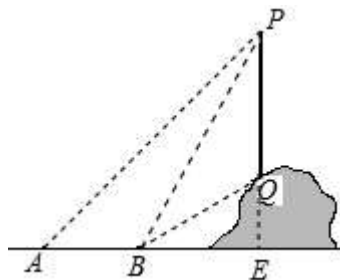
(1) 求  $\angle BPQ$  的度数;

(2) 求该电线杆 PQ 的高度 (结果精确到 1m). 备用数据:  $\sqrt{3} \approx 1.7$ ,  $\sqrt{2} \approx 1.4$ .

解析: (1) 延长 PQ 交直线 AB 于点 E, 根据直角三角形两锐角互余求得即可;

(2) 设  $PE=x$  米, 在直角  $\triangle APE$  和直角  $\triangle BPE$  中, 根据三角函数利用  $x$  表示出 AE 和 BE, 根据  $AB=AE-BE$  即可列出方程求得  $x$  的值, 再在直角  $\triangle BQE$  中利用三角函数求得 QE 的长, 则 PQ 的长度即可求解.

答案: 延长 PQ 交直线 AB 于点 E,



(1)  $\angle BPQ=90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ;

(2) 设  $PE=x$  米. 在直角  $\triangle APE$  中,  $\angle A=45^\circ$ , 则  $AE=PE=x$  米;  $\because \angle PBE=60^\circ \therefore \angle BPE=30^\circ$

在直角  $\triangle BPE$  中,  $BE=\frac{\sqrt{3}}{3} PE=\frac{\sqrt{3}}{3} x$  米,

$\because AB=AE-BE=6$  米, 则  $x-\frac{\sqrt{3}}{3} x=6$ , 解得:  $x=9+3\sqrt{3}$ . 则  $BE=(3\sqrt{3}+3)$  米.

在直角  $\triangle BEQ$  中,  $QE=\frac{\sqrt{3}}{3} BE=\frac{\sqrt{3}}{3} (3\sqrt{3}+3)=(3+\sqrt{3})$  米.

$\therefore PQ=PE-QE=9+3\sqrt{3}-(3+\sqrt{3})=6+2\sqrt{3} \approx 9$  (米).

答: 电线杆 PQ 的高度约 9 米.

21. 如果抛物线  $y=ax^2+bx+c$  过定点  $M(1, 1)$ , 则称此抛物线为定点抛物线.

(1) 张老师在投影屏幕上出示了一个题目: 请你写出一条定点抛物线的一个解析式. 小敏写出

了一个答案:  $y=2x^2+3x-4$ , 请你写出一个不同于小敏的答案:

(2) 张老师又在投影屏幕上出示了一个思考题: 已知定点抛物线  $y=-x^2+2bx+c+1$ , 求该抛物线顶点纵坐标的值最小时的解析式, 请你解答.

解析: (1) 根据顶点式的表示方法, 结合题意写一个符合条件的表达式则可;

(2) 根据顶点纵坐标得出  $b=1$ , 再利用最小值得出  $c=-1$ , 进而得出抛物线的解析式.

答案: (1) 依题意, 选择点  $(1, 1)$  作为抛物线的顶点, 二次项系数是 1,

根据顶点式得:  $y=x^2-2x+2$ ;

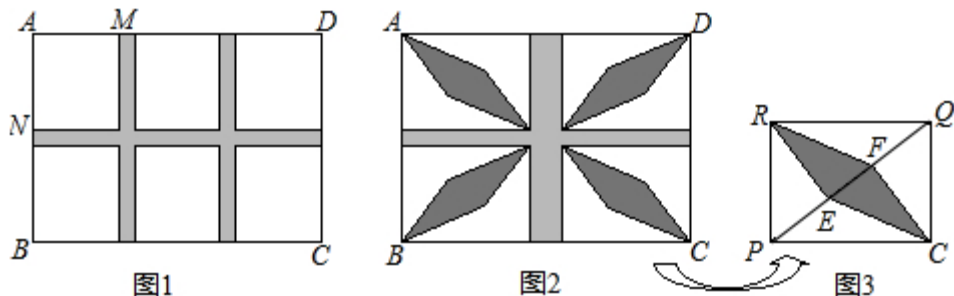
(2)  $\because$  定点抛物线的顶点坐标为  $(b, c+b^2+1)$ , 且  $-1+2b+c+1=1, \therefore c=1-2b$ ,

$\therefore$  顶点纵坐标  $c+b^2+1=2-2b+b^2=(b-1)^2+1$ ,

$\therefore$  当  $b=1$  时,  $c+b^2+1$  最小, 抛物线顶点纵坐标的值最小, 此时  $c=-1$ ,

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y=-x^2+2x$ .

22. 某校规划在一块长 AD 为 18m, 宽 AB 为 13m 的长方形场地 ABCD 上, 设计分别与 AD, AB 平行的横向通道和纵向通道, 其余部分铺上草皮.



(1) 如图 1, 若设计三条通道, 一条横向, 两条纵向, 且它们的宽度相等, 其余六块草坪相同, 其中一块草坪两边之比  $AM:AN=8:9$ , 问通道的宽是多少?

(2) 为了建造花坛, 要修改(1)中的方案, 如图 2, 将三条通道改为两条通道, 纵向的宽度改为横向宽度的 2 倍, 其余四块草坪相同, 且每一块草坪均有一边长为 8m, 这样能在这些草坪建造花坛. 如图 3, 在草坪 RPCQ 中, 已知  $RE \perp PQ$  于点 E,  $CF \perp PQ$  于点 F, 求花坛 RECF 的面积.

解析: (1) 利用  $AM:AN=8:9$ , 设通道的宽为  $xm$ ,  $AM=8ym$ , 则  $AN=9y$ , 进而利用 AD 为 18m, 宽 AB 为 13m 得出等式求出即可;

(2) 根据题意得出纵向通道的宽为 2m, 横向通道的宽为 1m, 进而得出 PQ, RE 的长, 即可得出 PE、EF 的长, 进而求出花坛 RECF 的面积.

答案: (1) 设通道的宽为  $xm$ ,  $AM=8ym$ ,

$$\because AM:AN=8:9, \therefore AN=9y, \therefore \begin{cases} 2x+24y=18, \\ x+18y=13, \end{cases} \text{解得: } \begin{cases} x=1, \\ y=\frac{2}{3}. \end{cases}$$

答: 通道的宽是 1m;

(2)  $\because$  四块相同草坪中的每一块, 有一条边长为 8m, 若  $RP=8$ , 则  $AB>13$ , 不合题意,

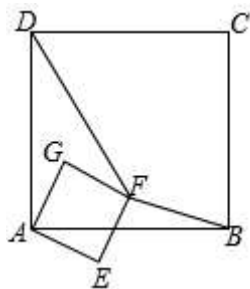
$\therefore RQ=8, \therefore$  纵向通道的宽为 2m, 横向通道的宽为 1m,  $\therefore RP=6$ ,

$\because RE \perp PQ$ , 四边形 RPCQ 是长方形,  $\therefore PQ=10, \therefore RE \times PQ=PR \times QR=6 \times 8, \therefore RE=4.8$ ,

$\because RP^2=RE^2+PE^2, \therefore PE=3.6$ , 同理可得:  $QF=3.6, \therefore EF=2.8$ ,

$\therefore S_{\text{四边形 RECF}}=4.8 \times 2.8=13.44$ , 即花坛 RECF 的面积为  $13.44m^2$ .

23. 正方形 ABCD 和正方形 AEFB 有公共顶点 A，将正方形 AEFB 绕点 A 按顺时针方向旋转，记旋转角  $\angle DAG = \alpha$ ，其中  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ，连结 DF，BF，如图.



- (1) 若  $\alpha = 0^\circ$ ，则  $DF = BF$ ，请加以证明；
- (2) 试画一个图形(即反例)，说明(1)中命题的逆命题是假命题；
- (3) 对于(1)中命题的逆命题，如果能补充一个条件后能使该逆命题为真命题，请直接写出你认为需要补充的一个条件，不必说明理由.

解析：(1) 利用正方形的性质证明  $\triangle DGF \cong \triangle BEF$  即可；

(2) 当  $\alpha = 180^\circ$  时， $DF = BF$ .

(3) 利用正方形的性质和  $\triangle DGF \cong \triangle BEF$  的性质即可证得是真命题.

答案：(1) 如图 1， $\because$  四边形 ABCD 和四边形 AEFB 为正方形，

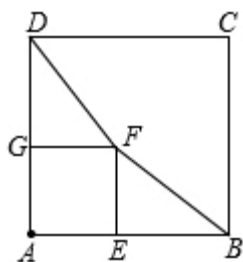


图1

$\therefore AG = AE$ ， $AD = AB$ ， $GF = EF$ ， $\angle DGF = \angle BEF = 90^\circ$ ， $\therefore DG = BE$ ，  
在  $\triangle DGF$  和  $\triangle BEF$  中，

$$\begin{cases} DG = BE, \\ \angle DGF = \angle BEF, \therefore \triangle DGF \cong \triangle BEF \text{ (SAS)}, \therefore DF = BF; \\ GF = EF, \end{cases}$$

(2) 图形(即反例)如图 2，

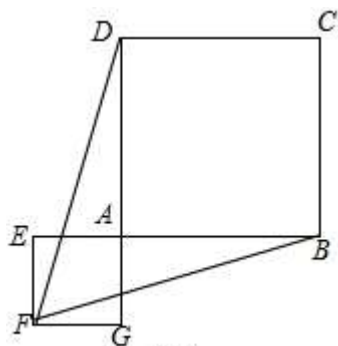


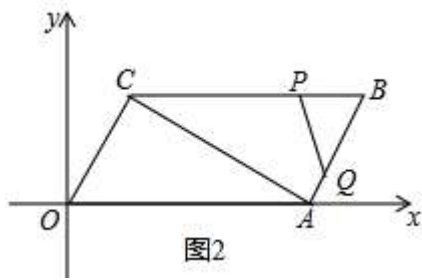
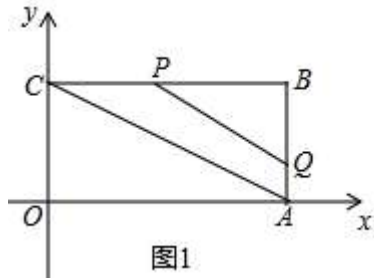
图2

(3) 补充一个条件为：点 F 在正方形 ABCD 内；

即：若点 F 在正方形 ABCD 内， $DF = BF$ ，则旋转角  $\alpha = 0^\circ$  .

24. 在平面直角坐标系中，O 为原点，四边形 OABC 的顶点 A 在 x 轴的正半轴上， $OA = 4$ ， $OC = 2$ ，

点P, 点Q分别是边BC, 边AB上的点, 连结AC, PQ, 点B<sub>1</sub>是点B关于PQ的对称点.



(1) 若四边形PABC为矩形, 如图1,

①求点B的坐标;

②若BQ:BP=1:2, 且点B<sub>1</sub>落在OA上, 求点B<sub>1</sub>的坐标;

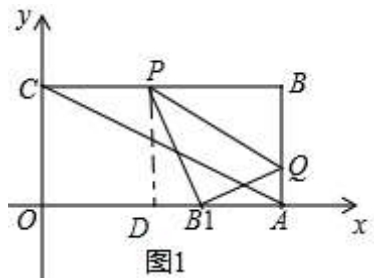
(2) 若四边形OABC为平行四边形, 如图2, 且OC⊥AC, 过点B<sub>1</sub>作B<sub>1</sub>F∥x轴, 与对角线AC、边OC分别交于点E、点F. 若B<sub>1</sub>E: B<sub>1</sub>F=1:3, 点B<sub>1</sub>的横坐标为m, 求点B<sub>1</sub>的纵坐标, 并直接写出m的取值范围.

解析: (1) ①根据OA=4, OC=2, 可得点B的坐标; ②利用相似三角形的判定和性质得出点的坐标;

(2) 根据平行四边形的性质, 且分点在线段EF的延长线和线段上两种情况进行分析解答.

答案: (1) ∵OA=4, OC=2, ∴点B的坐标为(4, 2);

②如图1, 过点P作PD⊥OA, 垂足为点D,



∵BQ:BP=1:2, 点B关于PQ的对称点为B<sub>1</sub>, ∴B<sub>1</sub>Q: B<sub>1</sub>P=1:2,

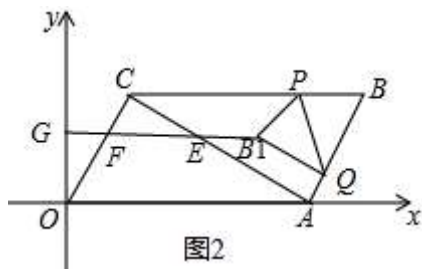
∵∠PDB<sub>1</sub>=∠PB<sub>1</sub>Q=∠B<sub>1</sub>AQ=90°, ∴∠PB<sub>1</sub>D=∠B<sub>1</sub>QA, ∴△PB<sub>1</sub>D∽△B<sub>1</sub>QA,

∴  $\frac{PD}{AB_1} = \frac{PB_1}{B_1Q} = 2$ , ∴B<sub>1</sub>A=1, ∴OB<sub>1</sub>=3, 即点B<sub>1</sub>(3, 0);

(2) ∵四边形OABC为平行四边形, OA=4, OC=2, 且OC⊥AC, ∴∠OAC=30°, ∴点C(1,  $\sqrt{3}$ ),

∵B<sub>1</sub>E: B<sub>1</sub>F=1:3, ∴点B<sub>1</sub>不与点E, F重合, 也不在线段EF的延长线上,

①当点B<sub>1</sub>在线段FE的延长线上时, 如图2, 延长B<sub>1</sub>F与y轴交于点G, 点B<sub>1</sub>的横坐标为m, B<sub>1</sub>F∥x轴, B<sub>1</sub>E: B<sub>1</sub>F=1:3, ∴B<sub>1</sub>G=m,



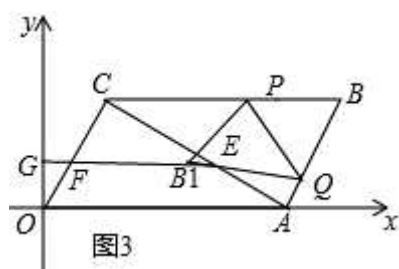
设  $OG=a$ , 则  $GF=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ ,  $OF=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$ ,  $\therefore CF=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}a$ ,  $\therefore EF=4-\frac{4\sqrt{3}}{3}a$ ,  $B_1E=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}a$ ,

$$\therefore B_1G=B_1E+EF+FG=(2-\frac{2\sqrt{3}}{3}a)+(4-\frac{4\sqrt{3}}{3}a)+\frac{\sqrt{3}}{3}a=m,$$

$$\therefore a=-\frac{\sqrt{3}}{5}m+\frac{6\sqrt{3}}{5}, \text{ 即 } B_1 \text{ 的纵坐标为 } -\frac{\sqrt{3}}{5}m+\frac{6\sqrt{3}}{5},$$

$m$  的取值范围是  $\frac{17}{7} \leq m \leq 1+\frac{10}{7}\sqrt{7}$ ;

②当点  $B_1$  在线段  $EF$  (除点  $E, F$ ) 上时, 如图 3, 延长  $B_1F$  与  $y$  轴交于点  $G$ , 点  $B_1$  的横坐标为  $m$ ,  $F \parallel x$  轴,  $B_1E: B_1F=1:3$ ,  $\therefore B_1G=m$ ,



设  $OG=a$ , 则  $GF=\frac{\sqrt{3}}{3}a$ ,  $OF=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$ ,  $\therefore CF=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}a$ ,

$$\therefore FE=4-\frac{4\sqrt{3}}{3}a, B_1F=\frac{3}{4}EF=3-\sqrt{3}a, \therefore B_1G=B_1F-FG=(3-\sqrt{3}a)+\frac{\sqrt{3}}{3}a=m,$$

$$\therefore a=-\frac{\sqrt{3}}{2}m+\frac{3}{2}\sqrt{3}, \text{ 即点 } B_1 \text{ 的纵坐标为 } -\frac{\sqrt{3}}{2}m+\frac{3}{2}\sqrt{3},$$

故  $m$  的取值范围是  $\frac{15}{7} \leq m \leq 3$ .