

2015 年普通高等学校招生全国统一考试(新课标 II) 数学文

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分

1. 已知集合 $A=\{x|-1<x<2\}$ ， $B=\{x|0<x<3\}$ ，则 $A\cup B=(\quad)$

- A. $(-1, 3)$
- B. $(-1, 0)$
- C. $(0, 2)$
- D. $(2, 3)$

解析： $\because A=\{x|-1<x<2\}$ ， $B=\{x|0<x<3\}$ ， $\therefore A\cup B=\{x|-1<x<3\}$ ，

故选：A

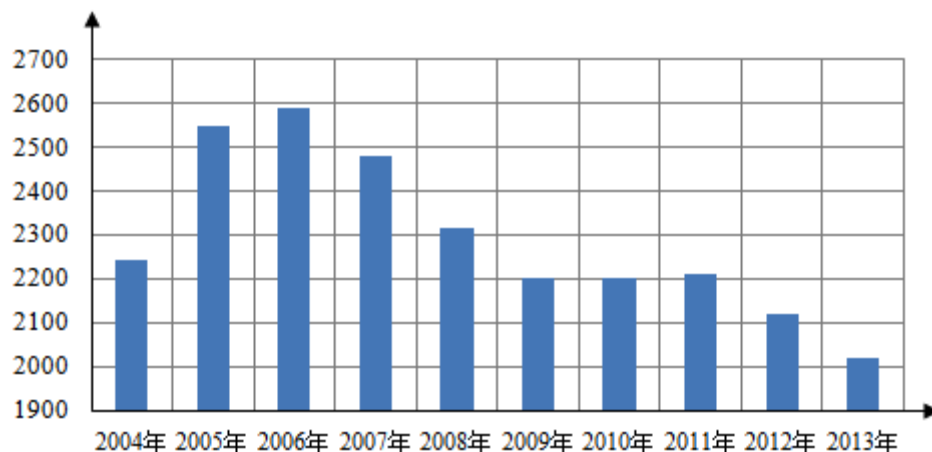
2. 若 a 为实数且 $\frac{2+ai}{1+i}$ ，则 $a=(\quad)$

- A. -4
- B. -3
- C. 3
- D. 4

解析：由 $\frac{2+ai}{1+i}=3+i$ ，得 $2+ai=(1+i)(3+i)=2+4i$ ，则 $a=4$ 。

故选：D

3. 根据如图给出的 2004 年至 2013 年我国二氧化硫年排放量(单位：万吨)柱形图，以下结论中不正确的是()



- A. 逐年比较，2008 年减少二氧化硫排放量的效果最显著
- B. 2007 年我国治理二氧化硫排放显现成效
- C. 2006 年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势
- D. 2006 年以来我国二氧化硫年排放量与年份正相关

解析：A 从图中明显看出 2008 年二氧化硫排放量比 2007 年的二氧化硫排放量明显减少，且减少的最多，故 A 正确；

B2004-2006 年二氧化硫排放量越来越多，从 2007 年开始二氧化硫排放量变少，故 B 正确；

C 从图中看出，2006 年以来我国二氧化硫年排放量越来越少，故 C 正确；

D2006 年以来我国二氧化硫年排放量越来越少，而不是与年份正相关，故 D 错误。

故选：D

4. $\vec{a}=(1, -1)$, $\vec{b}=(-1, 2)$ 则 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}=(\quad)$

- A. -1
- B. 0
- C. 1
- D. 2

解析: 因为 $\vec{a}=(1, -1)$, $\vec{b}=(-1, 2)$ 则 $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}=(1, 0) \cdot (1, -1)=1$.

故选: C

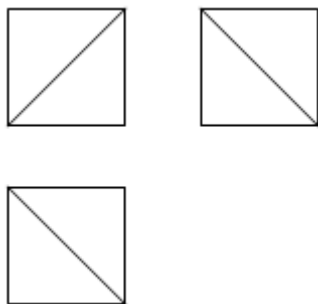
5. S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_1+a_3+a_5=3$, 则 $S_5=(\quad)$

- A. 5
- B. 7
- C. 9
- D. 11

解析: \because 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1+a_3+a_5=3$, 得 $3a_3=3$, 即 $a_3=1$. $\therefore S_5=5a_3=5$.

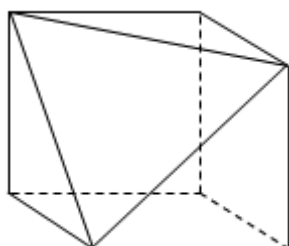
故选: A

6. 一个正方体被一个平面截去一部分后, 剩余部分的三视图如图, 则截去部分体积与剩余部分体积的比值为 (\quad)



- A. $\frac{1}{8}$
- B. $\frac{1}{7}$
- C. $\frac{1}{6}$
- D. $\frac{1}{5}$

解析: 设正方体的棱长为 1, 由三视图判断, 正方体被切掉的部分为以棱锥,



$$\therefore \text{正方体切掉部分的体积为 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6},$$

$$\therefore \text{剩余部分体积为 } 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6},$$

$$\therefore \text{截去部分体积与剩余部分体积的比值为 } \frac{1}{5}.$$

故选：D

7. 过三点 $A(1, 0)$, $B(0, \sqrt{3})$, $C(2, \sqrt{3})$ 则 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心到原点的距离为 ()

A. $\frac{5}{3}$

B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

D. $\frac{4}{3}$

解析：因为 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心在直线 BC 垂直平分线上，即直线 $x=1$ 上，

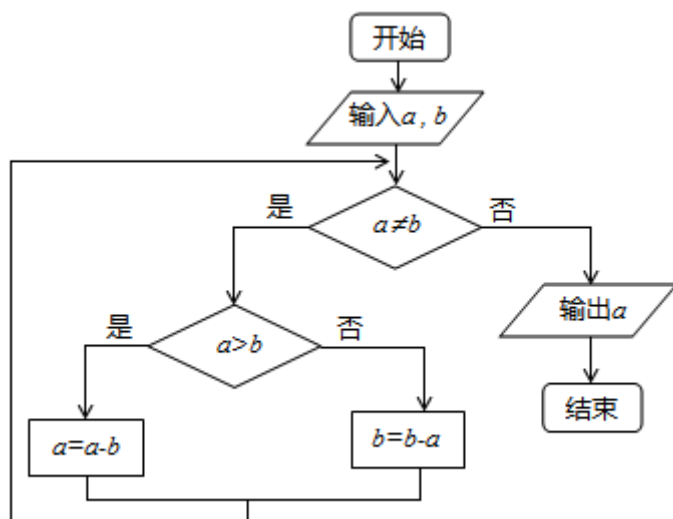
可设圆心 $P(1, p)$ ，由 $PA=PB$ 得 $|p| = \sqrt{1+(p-\sqrt{3})^2}$ ，得 $p = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

圆心坐标为 $P(1, \frac{2\sqrt{2}}{3})$ ，

所以圆心到原点的距离 $|OP| = \sqrt{1+(\frac{2\sqrt{2}}{3})^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}$ 。

故选：B

8. 如图程序抗土的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”。执行该程序框图，若输入 a, b 分别为 14, 18，则输出的 $a = ()$



- A. 0
- B. 2
- C. 4
- D. 14

解析：模拟执行程序框图，可得 $a=14$, $b=18$ ，
 满足条件 $a \neq b$ ，不满足条件 $a > b$, $b=4$ ，
 满足条件 $a \neq b$ ，满足条件 $a > b$, $a=10$ ，
 满足条件 $a \neq b$ ，满足条件 $a > b$, $a=6$ ，
 满足条件 $a \neq b$ ，满足条件 $a > b$, $a=2$ ，
 满足条件 $a \neq b$ ，不满足条件 $a > b$, $b=2$ ，
 不满足条件 $a \neq b$ ，输出 a 的值为 2。

故选：B

9. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_3 a_5 = 4(a_4 - 1)$, 则 $a_2 =$ ()

- A. 2
- B. 1
- C. $\frac{1}{2}$
- D. $\frac{1}{8}$

解析：设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$$\because a_1 = \frac{1}{4}, a_3 a_5 = 4(a_4 - 1), \therefore \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times q^6 = 4\left(\frac{1}{4} q^3 - 1\right), \text{化为 } q^3 = 8, \text{解得 } q = 2, \text{则 } a_2 = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}.$$

故选：C

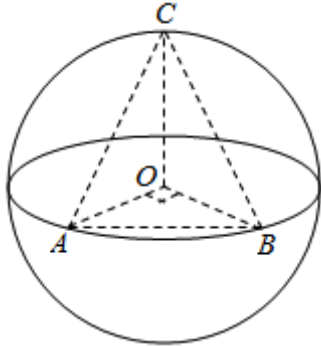
10. 已知 A, B 是球 O 的球面上两点, $\angle AOB = 90^\circ$, C 为该球面上的动点, 若三棱锥 $O-ABC$ 体积的最大值为 36, 则球 O 的表面积为 ()

- A. 36π
- B. 64π
- C. 144π

D. 256π

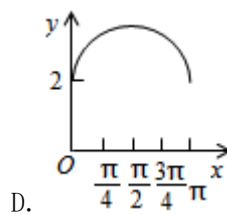
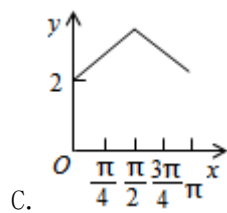
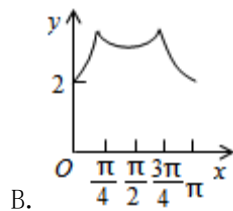
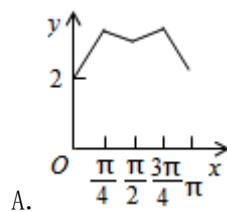
解析：如图所示，当点 C 位于垂直于面 AOB 的直径端点时，三棱锥 O-ABC 的体积最大，设球

O 的半径为 R，此时 $V_{O-ABC}=V_{C-AOB}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times R^2\times R=16R^3=36$ ，故 $R=6$ ，则球 O 的表面积为 $4\pi R^2=144\pi$ 。



故选 C

11. 如图，长方形 ABCD 的边 $AB=2$ ， $BC=1$ ，O 是 AB 的中点，点 P 沿着边 BC，CD 与 DA 运动，记 $\angle BOP=x$ 。将动点 P 到 A，B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$ ，则 $y=f(x)$ 的图象大致为 ()



解析：由对称性可知函数 $f(x)$ 关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称，

且当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 时， $BP = \tan x$ ， $AP = \sqrt{AB^2 + BP^2} = \sqrt{4 + \tan^2 x}$ ，

此时 $f(x) = \sqrt{4 + \tan^2 x} + \tan x$ ， $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ，此时单调递增，排除 A，C（不是直线递增），D.

故选：B

12. 设函数 $f(x) = \ln(1 + |x|) - \frac{1}{1+x^2}$ ，则使得 $f(x) > f(2x-1)$ 成立的 x 的取值范围是（ ）

A. $(\frac{1}{3}, 1)$

B. $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$

C. $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

D. $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

解析：∵ 函数 $f(x) = \ln(1 + |x|) - \frac{1}{1+x^2}$ 为偶函数，

且在 $x \geq 0$ 时， $f(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{1+x^2}$ 导数为 $f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} > 0$ ，

即有函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 单调递增，

∴ $f(x) > f(2x-1)$ 等价于 $f(|x|) > f(|2x-1|)$ ，即 $|x| > |2x-1|$ ，

平方得 $3x^2 - 4x + 1 < 0$ ，解得 $\frac{1}{3} < x < 1$ ，所求 x 的取值范围是 $(\frac{1}{3}, 1)$ 。

故选 A

二、填空题

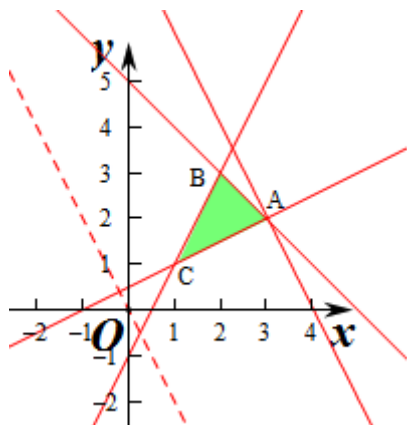
13. 已知函数 $f(x) = ax^3 - 2x$ 的图象过点 $(-1, 4)$ 则 $a =$ _____.

解析：根据条件得： $4 = -a + 2$ ；∴ $a = -2$.

故答案为：-2

14. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-5 \leq 0 \\ 2x-y-1 \geq 0 \\ x-2y+1 \leq 0 \end{cases}$ ，则 $z = 2x + y$ 的最大值为_____.

解析：作出不等式组对应的平面区域如图：（阴影部分 ABC）.



由 $z=2x+y$ 得 $y=-2x+z$,

平移直线 $y=-2x+z$,

由图象可知当直线 $y=-2x+z$ 经过点 A 时, 直线 $y=-2x+z$ 的截距最大, 此时 z 最大.

$$\begin{cases} x+y-5=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}, \text{ 即 } A(3, 2),$$

将 $A(3, 2)$ 的坐标代入目标函数 $z=2x+y$,

得 $z=2 \times 3+2=8$. 即 $z=2x+y$ 的最大值为 8.

故答案为: 8

15. 已知双曲线过点 $(4, \sqrt{3})$ 且渐近线方程为 $y=\pm \frac{1}{2}x$, 则该双曲线的标准方程是_____.

解析: 设双曲线方程为 $y^2 - \frac{1}{4}x^2 = \lambda$, 代入点 $(4, \sqrt{3})$, 可得 $3 - \frac{1}{4} \times 16 = \lambda$, $\therefore \lambda = -1$,

\therefore 双曲线的标准方程是 $\frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1$.

故答案为: $\frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1$

16. 已知曲线 $y=x+\ln x$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切, 则 $a=_____$.

解析: $y=x+\ln x$ 的导数为 $y' = 1 + \frac{1}{x}$,

曲线 $y=x+\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线斜率为 $k=2$,

则曲线 $y=x+\ln x$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-1=2x-2$, 即 $y=2x-1$.

由于切线与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切,

故 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 可联立 $y=2x-1$, 得 $ax^2+ax+2=0$,

又 $a \neq 0$, 两线相切有一切点, 所以有 $\Delta = a^2 - 8a = 0$, 解得 $a=8$.

故答案为: 8

三. 解答题

17. $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 上的点, AD 平分 $\angle BAC$, $BD=2DC$

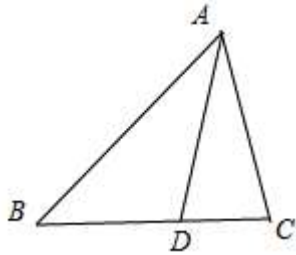
(I) 求 $\frac{\sin \angle B}{\sin \angle C}$.

(II) 若 $\angle BAC = 60^\circ$, 求 $\angle B$.

解析: (I) 由题意画出图形, 再由正弦定理结合内角平分线定理得答案;

(II) 由 $\angle C = 180^\circ - (\angle BAC + \angle B)$, 两边取正弦后展开两角和的正弦, 再结合 (I) 中的结论得答案.

答案: (I) 如图,



由正弦定理得:

$$\frac{AD}{\sin \angle B} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}, \quad \frac{AD}{\sin \angle C} = \frac{DC}{\sin \angle CAD},$$

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $BD = 2DC$,

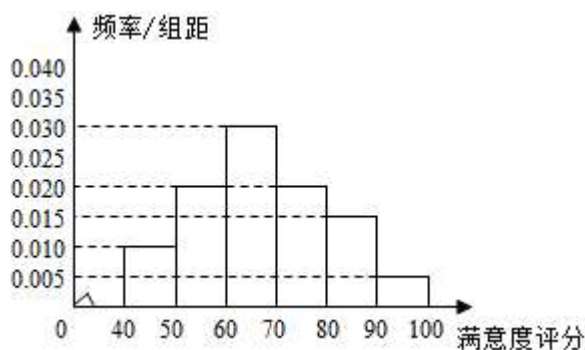
$$\therefore \frac{\sin \angle B}{\sin \angle C} = \frac{DC}{BD} = \frac{1}{2}.$$

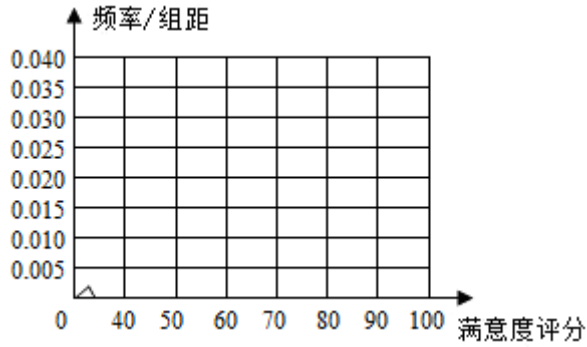
(II) $\because \angle C = 180^\circ - (\angle BAC + \angle B)$, $\angle BAC = 60^\circ$,

$$\therefore \sin \angle C = \sin(\angle BAC + \angle B) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \angle B + \frac{1}{2} \sin \angle B,$$

由 (I) 知 $2\sin \angle B = \sin \angle C$, $\therefore \tan \angle B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即 $\angle B = 30^\circ$.

18. 某公司为了了解用户对其产品的满意度, 从 A, B 两地区分别随机调查了 40 个用户, 根据用户对产品的满意度评分, 得到 A 地区用户满意度评分的频率分布直方图和 B 地区用户满意度评分的频数分布表





B 地区用户满意度评分的频数分布表

满意度评分分组	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100)
频数	2	8	14	10	6

(I) 做出 B 地区用户满意度评分的频率分布直方图，并通过直方图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度(不要求计算出具体值，给出结论即可)

(II) 根据用户满意度评分，将用户的满意度从低到高分三个不等级：

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

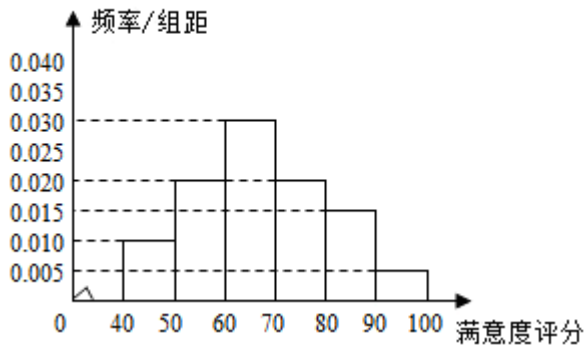
估计哪个地区用户的满意度等级为不满意的概率大？说明理由。

解析：(I) 根据分布表的数据，画出频率直方图，求解即可。

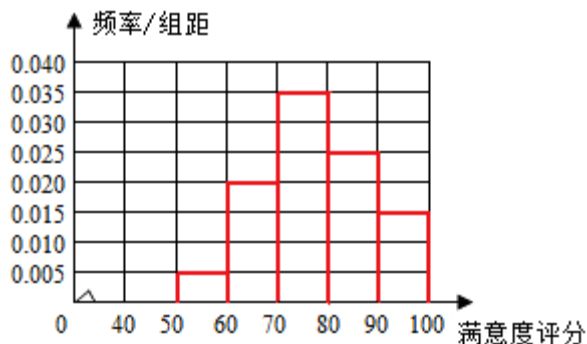
(II) 计算得出 C_A 表示事件：“A 地区用户的满意度等级为不满意”， C_B 表示事件：“B 地区用户的满意度等级为不满意”， $P(C_A)$ ， $P(C_B)$ ，即可判断不满意的情况。

答案：(I) 如图，

A 地区用户满意度评分的频率分布直方图



B 地区用户满意度评分的频率分布直方图



通过两个地区用户满意度评分的频率分布直方图可以看出，B地区用户满意度评分的平均值高于A地区用户满意度评分的平均值，

B地区的用户满意度评分的比较集中，而A地区的用户满意度评分的比较分散。

(II) A地区用户的满意度等级为不满意的概率大。

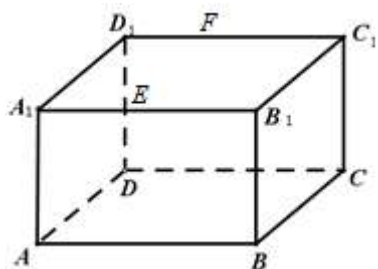
记 C_A 表示事件：“A地区用户的满意度等级为不满意”， C_B 表示事件：“B地区用户的满意度等级为不满意”，

由直方图得 $P(C_A) = (0.01 + 0.02 + 0.03) \times 10 = 0.6$ ，

得 $P(C_B) = (0.005 + 0.02) \times 10 = 0.25$ ，

\therefore A地区用户的满意度等级为不满意的概率大。

19. 如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=16, BC=10, AA_1=8$ ，点 E, F 分别在 A_1B_1, D_1C_1 上， $A_1E=D_1F=4$ 。过 E, F 的平面 α 与此长方体的面相交，交线围成一个正方形。



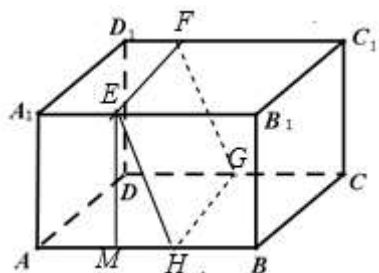
(I) 在图中画出这个正方形(不必说出画法和理由)

(II) 求平面 α 把该长方体分成的两部分体积的比值。

解析：(I) 利用平面与平面平行的性质，可在图中画出这个正方形；

(II) 求出 $\sqrt{EH^2 - EM^2} = 6$ ， $AH=10$ ， $HB=6$ ，即可求平面 α 把该长方体分成的两部分体积的比值。

答案：(I) 交线围成的正方形 EFGH 如图所示。



(II) 作 $EM \perp AB$ ，垂足为 M ，则 $AM=A_1E=4$ ， $EB_1=12$ ， $EM=AA_1=8$ 。

因为 EFGH 为正方形，所以 $EH=EF=BC=10$ ，

于是 $MH = \sqrt{EH^2 - EM^2} = 6$ ， $AH=10$ ， $HB=6$ 。

因为长方体被平面 α 分成两个高为 10 的直棱柱，

所以其体积的比值为 $\frac{9}{7}$ 。

20. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，($a > b > 0$) 的离心率 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，点 $(2, \sqrt{2})$ 在 C 上。

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴, l 与 C 有两个交点 A, B, 线段 AB 的中点为 M. 证明: 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值.

解析: (1) 利用椭圆的离心率, 以及椭圆经过的点, 求解椭圆的几何量, 然后得到椭圆的方程.

(2) 设直线 l: $y=kx+b$, ($k \neq 0, b \neq 0$), $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $M(x_M, y_M)$, 联立直线方程与椭圆方程, 通过韦达定理求解 K_{OM} , 然后推出直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值.

答案: (1) 椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ($a > b > 0$) 的离心率 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 点 $(2, \sqrt{2})$ 在 C 上, 可得 $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1$, 解得 $a^2 = 8, b^2 = 4$, 所求椭圆 C 方程为: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 设直线 l: $y=kx+b$, ($k \neq 0, b \neq 0$), $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $M(x_M, y_M)$,

把直线 $y=kx+b$ 代入 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 可得 $(2k^2+1)x^2 + 4kbx + 2b^2 - 8 = 0$,

故 $x_M = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-2kb}{2k^2+1}$, $y_M = kx_M + b = \frac{b}{2k^2+1}$,

于是在 OM 的斜率为: $K_{OM} = \frac{y_M}{x_M} = -\frac{1}{2k}$, 即 $K_{OM} \cdot k = -\frac{1}{2}$.

\therefore 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值.

21. 设函数 $f(x) = \ln x + a(1-x)$.

(I) 讨论: $f(x)$ 的单调性;

(II) 当 $f(x)$ 有最大值, 且最大值大于 $2a-2$ 时, 求 a 的取值范围.

解析: (I) 先求导, 再分类讨论, 根据导数即可判断函数的单调性;

(2) 先求出函数的最大值, 再构造函数 $g(a) = \ln a + a - 1$, 根据函数的单调性即可求出 a 的范围.

答案: (I) $f(x) = \ln x + a(1-x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x}$,

若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) > 0$, \therefore 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

若 $a > 0$, 则当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在

$(0, \frac{1}{a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递减,

(II), 由 (I) 知, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无最大值; 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{a}$ 取得

最大值, 最大值为 $f(\frac{1}{a}) = -\ln a + a - 1$,

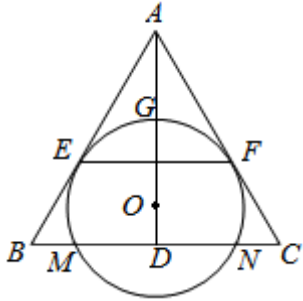
$\therefore f(\frac{1}{a}) > 2a - 2$, $\therefore \ln a + a - 1 < 0$,

令 $g(a) = \ln a + a - 1$,

$\therefore g(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, $g(1) = 0$, \therefore 当 $0 < a < 1$ 时, $g(a) < 0$,

当 $a > 1$ 时, $g(a) > 0$, $\therefore a$ 的取值范围为 $(0, 1)$.

22. 如图, O 为等腰三角形 ABC 内一点, $\odot O$ 与 $\triangle ABC$ 的底边 BC 交于 M, N 两点, 与底边上的高 AD 交于点 G , 且与 AB, AC 分别相切于 E, F 两点.



(1) 证明: $EF \parallel BC$;

(2) 若 AG 等于 $\odot O$ 的半径, 且 $AE = MN = 2\sqrt{3}$, 求四边形 $EBCF$ 的面积.

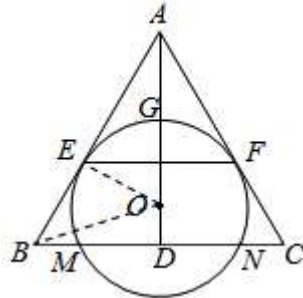
解析: (1) 通过 AD 是 $\angle CAB$ 的角平分线及圆 O 分别与 AB, AC 相切于点 E, F , 利用相似的性质即得结论;

(2) 通过 (1) 知 AD 是 EF 的垂直平分线, 连结 OE, OM , 则 $OE \perp AE$, 利用 $S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AEF}$ 计算即可.

答案 (1) $\because \triangle ABC$ 为等腰三角形, $AD \perp BC$, $\therefore AD$ 是 $\angle CAB$ 的角平分线, 又 \because 圆 O 分别与 AB, AC 相切于点 E, F , $\therefore AE = AF$, $\therefore AD \perp EF$, $\therefore EF \parallel BC$.

(2) 由 (1) 知 $AE = AF$, $AD \perp EF$, $\therefore AD$ 是 EF 的垂直平分线,

又 $\because EF$ 为圆 O 的弦, $\therefore O$ 在 AD 上, 连结 OE, OM , 则 $OE \perp AE$,



由 AG 等于圆 O 的半径可得 $AO = 2OE$,

$\therefore \angle OAE = 30^\circ$, $\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle AEF$ 都是等边三角形,

$\because AE = 2\sqrt{3}$, $\therefore AO = 4$, $OE = 2$,

$\because OM = OE = 2$, $DM = \frac{1}{2}MN = \sqrt{3}$, $\therefore OD = 1$, $\therefore AD = 5$, $AB = \frac{10\sqrt{3}}{3}$,

\therefore 四边形 $EBCF$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

23. 在直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C_1: \begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数, $t \neq 0$, $0 \leq \alpha < \pi$) 在以 O 为极

点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_2: \rho = 2\sin \theta$, 曲线 $C_3: \rho = 2\sqrt{3}\cos \theta$.

(1) 求 C_2 与 C_3 交点的直角坐标;

(2) 若 C_2 与 C_1 相交于点 A , C_1 与 C_3 相交于点 B , 求 $|AB|$ 的最大值.

解析: (1) 把曲线的极坐标分别化为直角坐标方程联立可得交点坐标;

(2) 求出曲线 C_1 的极坐标方程, 可得 A, B 的极坐标, 即可求 $|AB|$ 的最大值.

答案: (1) 曲线 $C_2: \rho = 2\sin \theta$ 化为 $\rho^2 = 2\rho\sin \theta$, $\therefore x^2 + y^2 = 2y$.

曲线 $C_3: \rho = 2\sqrt{3}\cos \theta$ 化为 $\rho^2 = 2\sqrt{3}\rho\cos \theta$, $\therefore x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}x$.

$$\text{联立 } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

$\therefore C_2$ 与 C_3 交点的直角坐标为 $(0, 0)$ 和 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$;

(2) 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\theta = \alpha$ ($\rho \in \mathbb{R}, \rho \neq 0$), 其中 $0 \leq \alpha < \pi$.

因此 A 的极坐标为 $(2\sin \alpha, \alpha)$, B 的极坐标为 $(2\sqrt{3}\cos \alpha, \alpha)$,

所以 $|AB| = |2\sin \alpha - 2\sqrt{3}\cos \alpha| = 4|\sin(\alpha - \frac{\pi}{3})|$,

当 $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ 时, $|AB|$ 取得最大值, 最大值为 4.

24. 设 a, b, c, d 均为正数, 且 $a+b=c+d$, 证明:

(1) 若 $ab > cd$, 则 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$;

(2) $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ 是 $|a-b| < |c-d|$ 的充要条件.

解析: (1) 运用不等式的性质, 结合条件 a, b, c, d 均为正数, 且 $a+b=c+d, ab > cd$, 即可得证;

(2) 从两方面证, ①若 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$, 证得 $|a-b| < |c-d|$, ②若 $|a-b| < |c-d|$, 证得

$\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$, 注意运用不等式的性质, 即可得证.

答案: (1) 由于 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$,

$$(\sqrt{c} + \sqrt{d})^2 = c+d+2\sqrt{cd},$$

由 a, b, c, d 均为正数, 且 $a+b=c+d, ab > cd$,

则 $\sqrt{ab} > \sqrt{cd}$,

即有 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{c} + \sqrt{d})^2$, 则.

(2)①若 $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{c}+\sqrt{d}$, 则 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > (\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$,

即为 $a+b+2\sqrt{ab} > c+d+2\sqrt{cd}$,

由 $a+b=c+d$, 则 $ab > cd$,

于是 $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$,

$(c-d)^2 = (c+d)^2 - 4cd$,

即有 $(a-b)^2 < (c-d)^2$, 即为 $|a-b| < |c-d|$;

②若 $|a-b| < |c-d|$, 则 $(a-b)^2 < (c-d)^2$,

即有 $(a+b)^2 - 4ab < (c+d)^2 - 4cd$,

由 $a+b=c+d$, 则 $ab > cd$,

则有 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > (\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$.

综上所述, $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{c}+\sqrt{d}$ 是 $|a-b| < |c-d|$ 的充要条件.