

2015 年普通高等学校招生全国统一考试(新课标 II) 数学文

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分

1. 已知集合  $A=\{x|-1<x<2\}$ ,  $B=\{x|0<x<3\}$ , 则  $A\cup B=(\quad)$

- A.  $(-1, 3)$
- B.  $(-1, 0)$
- C.  $(0, 2)$
- D.  $(2, 3)$

解析：∵ $A=\{x|-1<x<2\}$ ,  $B=\{x|0<x<3\}$ , ∴ $A\cup B=\{x|-1<x<3\}$ ,

故选：A

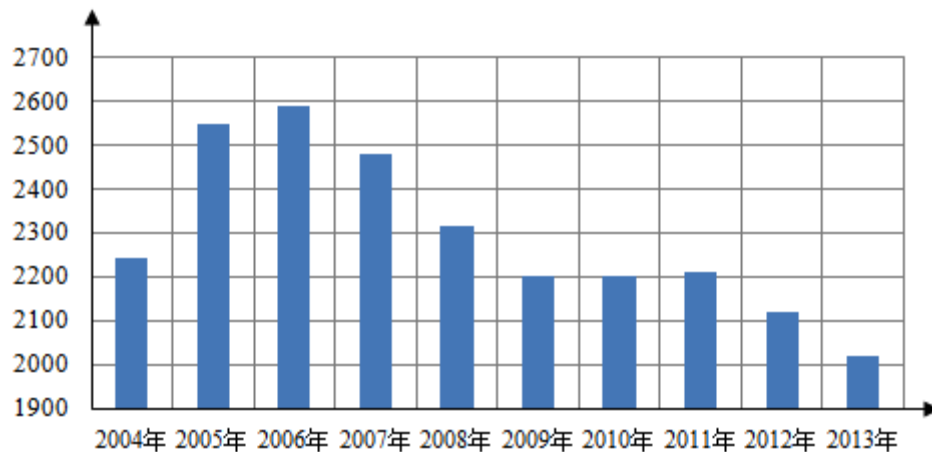
2. 若  $a$  为实数且  $\frac{2+ai}{1+i}$ , 则  $a=(\quad)$

- A. -4
- B. -3
- C. 3
- D. 4

解析：由  $\frac{2+ai}{1+i}=3+i$ , 得  $2+ai=(1+i)(3+i)=2+4i$ , 则  $a=4$ .

故选：D

3. 根据如图给出的 2004 年至 2013 年我国二氧化硫年排放量(单位：万吨)柱形图，以下结论中不正确的是( )



- A. 逐年比较，2008 年减少二氧化硫排放量的效果最显著
- B. 2007 年我国治理二氧化硫排放显现成效
- C. 2006 年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势
- D. 2006 年以来我国二氧化硫年排放量与年份正相关

解析：A 从图中明显看出 2008 年二氧化硫排放量比 2007 年的二氧化硫排放量明显减少，且减少的最多，故 A 正确；

B2004-2006 年二氧化硫排放量越来越多，从 2007 年开始二氧化硫排放量变少，故 B 正确；

C 从图中看出，2006 年以来我国二氧化硫年排放量越来越少，故 C 正确；

D2006 年以来我国二氧化硫年排放量越来越少，而不是与年份正相关，故 D 错误。

故选：D

4.  $\vec{a}=(1, -1)$ ,  $\vec{b}=(-1, 2)$  则  $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}=(\quad)$

- A. -1
- B. 0
- C. 1
- D. 2

解析: 因为  $\vec{a}=(1, -1)$ ,  $\vec{b}=(-1, 2)$  则  $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}=(1, 0) \cdot (1, -1)=1$ .

故选: C

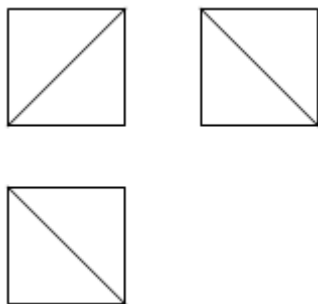
5.  $S_n$  是等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 若  $a_1+a_3+a_5=3$ , 则  $S_5=(\quad)$

- A. 5
- B. 7
- C. 9
- D. 11

解析:  $\because$  数列  $\{a_n\}$  是等差数列, 且  $a_1+a_3+a_5=3$ , 得  $3a_3=3$ , 即  $a_3=1$ .  $\therefore S_5=5a_3=5$ .

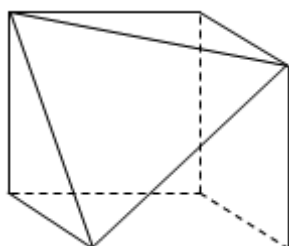
故选: A

6. 一个正方体被一个平面截去一部分后, 剩余部分的三视图如图, 则截去部分体积与剩余部分体积的比值为  $(\quad)$



- A.  $\frac{1}{8}$
- B.  $\frac{1}{7}$
- C.  $\frac{1}{6}$
- D.  $\frac{1}{5}$

解析: 设正方体的棱长为 1, 由三视图判断, 正方体被切掉的部分为以棱锥,



$$\therefore \text{正方体切掉部分的体积为 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6},$$

$$\therefore \text{剩余部分体积为 } 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6},$$

$$\therefore \text{截去部分体积与剩余部分体积的比值为 } \frac{1}{5}.$$

故选：D

7. 过三点  $A(1, 0)$ ,  $B(0, \sqrt{3})$ ,  $C(2, \sqrt{3})$  则  $\triangle ABC$  外接圆的圆心到原点的距离为 ( )

A.  $\frac{5}{3}$

B.  $\frac{\sqrt{21}}{3}$

C.  $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

D.  $\frac{4}{3}$

解析：因为  $\triangle ABC$  外接圆的圆心在直线  $BC$  垂直平分线上，即直线  $x=1$  上，

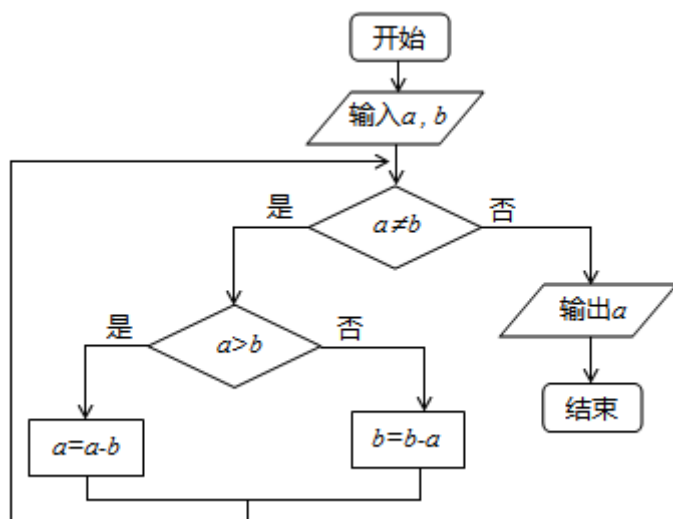
$$\text{可设圆心 } P(1, p), \text{ 由 } PA=PB \text{ 得 } |p| = \sqrt{1+(p-\sqrt{3})^2}, \text{ 得 } p = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{圆心坐标为 } P\left(1, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right),$$

$$\text{所以圆心到原点的距离 } |OP| = \sqrt{1 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

故选：B

8. 如图程序抗土的算法思路源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”. 执行该程序框图，若输入  $a, b$  分别为 14, 18, 则输出的  $a=( )$



- A. 0
- B. 2
- C. 4
- D. 14

解析：模拟执行程序框图，可得  $a=14$ ,  $b=18$ ，  
 满足条件  $a \neq b$ ，不满足条件  $a > b$ ,  $b=4$ ，  
 满足条件  $a \neq b$ ，满足条件  $a > b$ ,  $a=10$ ，  
 满足条件  $a \neq b$ ，满足条件  $a > b$ ,  $a=6$ ，  
 满足条件  $a \neq b$ ，满足条件  $a > b$ ,  $a=2$ ，  
 满足条件  $a \neq b$ ，不满足条件  $a > b$ ,  $b=2$ ，  
 不满足条件  $a \neq b$ ，输出  $a$  的值为 2。

故选：B

9. 已知等比数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{1}{4}$ ,  $a_3 a_5 = 4(a_4 - 1)$ , 则  $a_2 =$  ( )

- A. 2
- B. 1
- C.  $\frac{1}{2}$
- D.  $\frac{1}{8}$

解析：设等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ ,

$$\because a_1 = \frac{1}{4}, a_3 a_5 = 4(a_4 - 1), \therefore \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times q^6 = 4\left(\frac{1}{4} q^3 - 1\right), \text{化为 } q^3 = 8, \text{解得 } q = 2, \text{则 } a_2 = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}.$$

故选：C

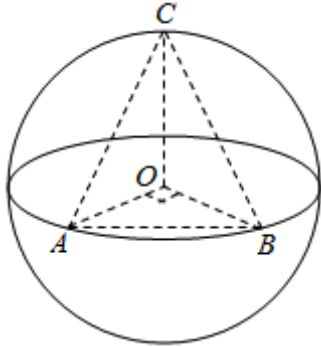
10. 已知  $A, B$  是球  $O$  的球面上两点,  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $C$  为该球面上的动点, 若三棱锥  $O-ABC$  体积的最大值为 36, 则球  $O$  的表面积为 ( )

- A.  $36\pi$
- B.  $64\pi$
- C.  $144\pi$

D.  $256\pi$

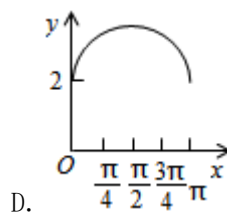
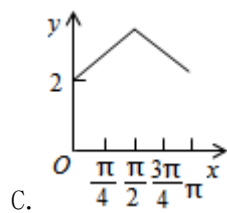
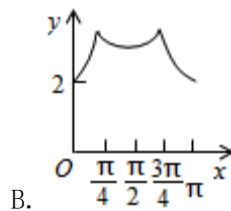
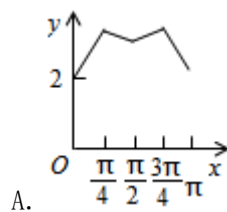
解析：如图所示，当点 C 位于垂直于面 AOB 的直径端点时，三棱锥 O-ABC 的体积最大，设球

O 的半径为 R，此时  $V_{O-ABC}=V_{C-AOB}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times R^2\times R=16R^3=36$ ，故  $R=6$ ，则球 O 的表面积为  $4\pi R^2=144\pi$ 。



故选 C

11. 如图，长方形 ABCD 的边  $AB=2$ ， $BC=1$ ，O 是 AB 的中点，点 P 沿着边 BC，CD 与 DA 运动，记  $\angle BOP=x$ 。将动点 P 到 A，B 两点距离之和表示为 x 的函数  $f(x)$ ，则  $y=f(x)$  的图象大致为 ( )



解析：由对称性可知函数  $f(x)$  关于  $x = \frac{\pi}{2}$  对称，

且当  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  时， $BP = \tan x$ ， $AP = \sqrt{AB^2 + BP^2} = \sqrt{4 + \tan^2 x}$ ，

此时  $f(x) = \sqrt{4 + \tan^2 x} + \tan x$ ， $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ ，此时单调递增，排除 A，C（不是直线递增），D.

故选：B

12. 设函数  $f(x) = \ln(1 + |x|) - \frac{1}{1+x^2}$ ，则使得  $f(x) > f(2x-1)$  成立的  $x$  的取值范围是（ ）

A.  $(\frac{1}{3}, 1)$

B.  $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$

C.  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

D.  $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

解析：∵ 函数  $f(x) = \ln(1 + |x|) - \frac{1}{1+x^2}$  为偶函数，

且在  $x \geq 0$  时， $f(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{1+x^2}$  导数为  $f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} > 0$ ，

即有函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  单调递增，

∴  $f(x) > f(2x-1)$  等价于  $f(|x|) > f(|2x-1|)$ ，即  $|x| > |2x-1|$ ，

平方得  $3x^2 - 4x + 1 < 0$ ，解得  $\frac{1}{3} < x < 1$ ，所求  $x$  的取值范围是  $(\frac{1}{3}, 1)$ 。

故选 A

## 二、填空题

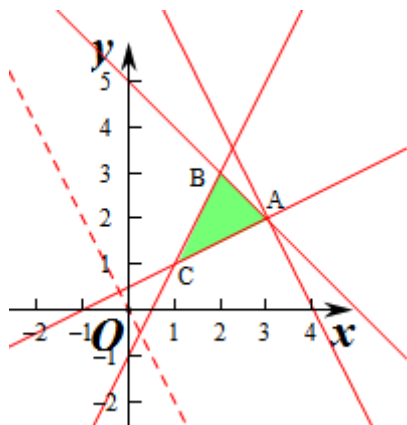
13. 已知函数  $f(x) = ax^3 - 2x$  的图象过点  $(-1, 4)$  则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解析：根据条件得： $4 = -a + 2$ ；∴  $a = -2$ 。

故答案为：-2

14. 若  $x, y$  满足约束条件  $\begin{cases} x+y-5 \leq 0 \\ 2x-y-1 \geq 0 \\ x-2y+1 \leq 0 \end{cases}$ ，则  $z = 2x+y$  的最大值为  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解析：作出不等式组对应的平面区域如图：（阴影部分 ABC）。



由  $z=2x+y$  得  $y=-2x+z$ ,

平移直线  $y=-2x+z$ ,

由图象可知当直线  $y=-2x+z$  经过点 A 时, 直线  $y=-2x+z$  的截距最大, 此时  $z$  最大.

$$\begin{cases} x+y-5=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}, \text{ 即 } A(3, 2),$$

将  $A(3, 2)$  的坐标代入目标函数  $z=2x+y$ ,

得  $z=2 \times 3+2=8$ . 即  $z=2x+y$  的最大值为 8.

故答案为: 8

15. 已知双曲线过点  $(4, \sqrt{3})$  且渐近线方程为  $y=\pm \frac{1}{2}x$ , 则该双曲线的标准方程是\_\_\_\_\_.

解析: 设双曲线方程为  $y^2 - \frac{1}{4}x^2 = \lambda$ , 代入点  $(4, \sqrt{3})$ , 可得  $3 - \frac{1}{4} \times 16 = \lambda$ ,  $\therefore \lambda = -1$ ,

$\therefore$  双曲线的标准方程是  $\frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1$ .

故答案为:  $\frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1$

16. 已知曲线  $y=x+\ln x$  在点  $(1, 1)$  处的切线与曲线  $y=ax^2+(a+2)x+1$  相切, 则  $a=_____$ .

解析:  $y=x+\ln x$  的导数为  $y' = 1 + \frac{1}{x}$ ,

曲线  $y=x+\ln x$  在  $x=1$  处的切线斜率为  $k=2$ ,

则曲线  $y=x+\ln x$  在  $x=1$  处的切线方程为  $y-1=2x-2$ , 即  $y=2x-1$ .

由于切线与曲线  $y=ax^2+(a+2)x+1$  相切,

故  $y=ax^2+(a+2)x+1$  可联立  $y=2x-1$ , 得  $ax^2+ax+2=0$ ,

又  $a \neq 0$ , 两线相切有一切点, 所以有  $\Delta = a^2 - 8a = 0$ , 解得  $a=8$ .

故答案为: 8

### 三. 解答题

17.  $\triangle ABC$  中, D 是 BC 上的点, AD 平分  $\angle BAC$ ,  $BD=2DC$

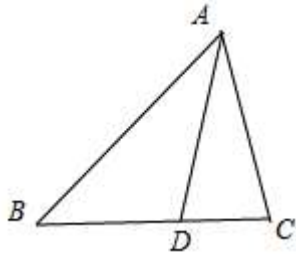
(I) 求  $\frac{\sin \angle B}{\sin \angle C}$ .

(II) 若  $\angle BAC = 60^\circ$ , 求  $\angle B$ .

解析: (I) 由题意画出图形, 再由正弦定理结合内角平分线定理得答案;

(II) 由  $\angle C = 180^\circ - (\angle BAC + \angle B)$ , 两边取正弦后展开两角和的正弦, 再结合 (I) 中的结论得答案.

答案: (I) 如图,



由正弦定理得:

$$\frac{AD}{\sin \angle B} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}, \quad \frac{AD}{\sin \angle C} = \frac{DC}{\sin \angle CAD},$$

$\because AD$  平分  $\angle BAC$ ,  $BD = 2DC$ ,

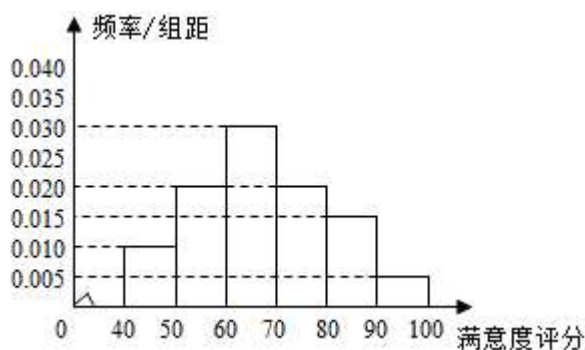
$$\therefore \frac{\sin \angle B}{\sin \angle C} = \frac{DC}{BD} = \frac{1}{2}.$$

(II)  $\because \angle C = 180^\circ - (\angle BAC + \angle B)$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ ,

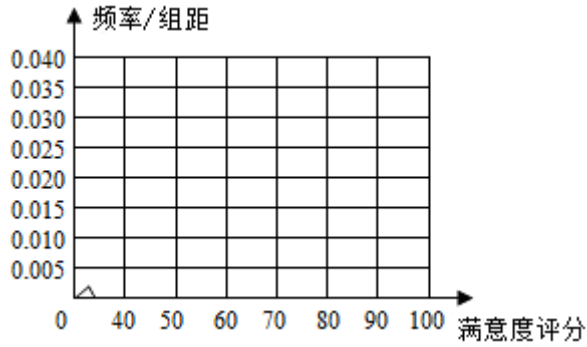
$$\therefore \sin \angle C = \sin(\angle BAC + \angle B) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \angle B + \frac{1}{2} \sin \angle B,$$

由 (I) 知  $2\sin \angle B = \sin \angle C$ ,  $\therefore \tan \angle B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 即  $\angle B = 30^\circ$ .

18. 某公司为了了解用户对其产品的满意度, 从 A, B 两地区分别随机调查了 40 个用户, 根据用户对产品的满意度评分, 得到 A 地区用户满意度评分的频率分布直方图和 B 地区用户满意度评分的频数分布表







B 地区用户满意度评分的频数分布表

满意度评分分组	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100)
频数	2	8	14	10	6

(I) 做出 B 地区用户满意度评分的频率分布直方图，并通过直方图比较两地区满意度评分的平均值及分散程度(不要求计算出具体值，给出结论即可)

(II) 根据用户满意度评分，将用户的满意度从低到高分三个不等级：

满意度评分	低于 70 分	70 分到 89 分	不低于 90 分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

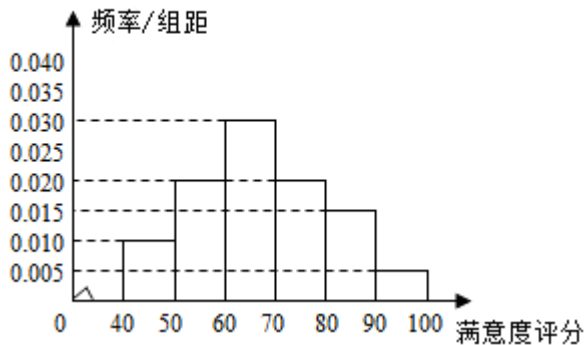
估计哪个地区用户的满意度等级为不满意的概率大？说明理由。

解析：(I) 根据分布表的数据，画出频率直方图，求解即可。

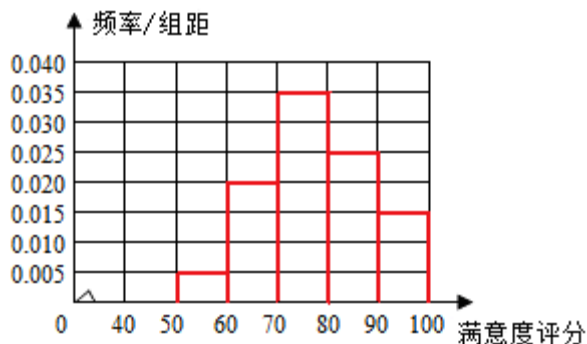
(II) 计算得出  $C_A$  表示事件：“A 地区用户的满意度等级为不满意”， $C_B$  表示事件：“B 地区用户的满意度等级为不满意”， $P(C_A)$ ， $P(C_B)$ ，即可判断不满意的情况。

答案：(I) 如图，

A 地区用户满意度评分的频率分布直方图



B 地区用户满意度评分的频率分布直方图



通过两个地区用户满意度评分的频率分布直方图可以看出，B地区用户满意度评分的平均值高于A地区用户满意度评分的平均值，

B地区的用户满意度评分的比较集中，而A地区的用户满意度评分的比较分散。

(II) A地区用户的满意度等级为不满意的概率大。

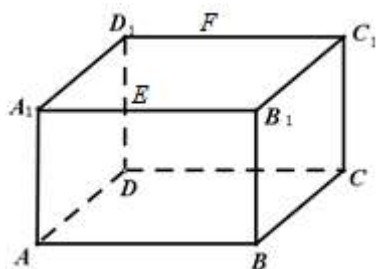
记  $C_A$  表示事件：“A地区用户的满意度等级为不满意”， $C_B$  表示事件：“B地区用户的满意度等级为不满意”，

由直方图得  $P(C_A) = (0.01 + 0.02 + 0.03) \times 10 = 0.6$ ，

得  $P(C_B) = (0.005 + 0.02) \times 10 = 0.25$ ，

$\therefore$  A地区用户的满意度等级为不满意的概率大。

19. 如图，长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $AB=16, BC=10, AA_1=8$ ，点  $E, F$  分别在  $A_1B_1, D_1C_1$  上， $A_1E=D_1F=4$ 。过  $E, F$  的平面  $\alpha$  与此长方体的面相交，交线围成一个正方形。



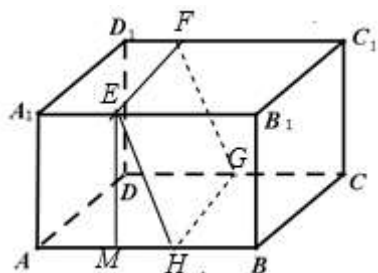
(I) 在图中画出这个正方形(不必说出画法和理由)

(II) 求平面  $\alpha$  把该长方体分成的两部分体积的比值。

解析：(I) 利用平面与平面平行的性质，可在图中画出这个正方形；

(II) 求出  $\sqrt{EH^2 - EM^2} = 6$ ， $AH=10$ ， $HB=6$ ，即可求平面  $\alpha$  把该长方体分成的两部分体积的比值。

答案：(I) 交线围成的正方形 EFGH 如图所示。



(II) 作  $EM \perp AB$ ，垂足为  $M$ ，则  $AM=A_1E=4$ ， $EB_1=12$ ， $EM=AA_1=8$ 。

因为 EFGH 为正方形，所以  $EH=EF=BC=10$ ，

于是  $MH = \sqrt{EH^2 - EM^2} = 6$ ， $AH=10$ ， $HB=6$ 。

因为长方体被平面  $\alpha$  分成两个高为 10 的直棱柱，

所以其体积的比值为  $\frac{9}{7}$ 。

20. 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，( $a > b > 0$ ) 的离心率  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，点  $(2, \sqrt{2})$  在  $C$  上。

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 直线 l 不过原点 O 且不平行于坐标轴, l 与 C 有两个交点 A, B, 线段 AB 的中点为 M. 证明: 直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值.

解析: (1) 利用椭圆的离心率, 以及椭圆经过的点, 求解椭圆的几何量, 然后得到椭圆的方程.

(2) 设直线 l:  $y=kx+b$ , ( $k \neq 0, b \neq 0$ ),  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_M, y_M)$ , 联立直线方程与椭圆方程, 通过韦达定理求解  $K_{OM}$ , 然后推出直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值.

答案: (1) 椭圆 C:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , ( $a > b > 0$ ) 的离心率  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 点  $(2, \sqrt{2})$  在 C 上, 可得  $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

$\frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1$ , 解得  $a^2=8, b^2=4$ , 所求椭圆 C 方程为:  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

(2) 设直线 l:  $y=kx+b$ , ( $k \neq 0, b \neq 0$ ),  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_M, y_M)$ ,

把直线  $y=kx+b$  代入  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$  可得  $(2k^2+1)x^2+4kbx+2b^2-8=0$ ,

故  $x_M = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{-2kb}{2k^2+1}, y_M = kx_M+b = \frac{b}{2k^2+1}$ ,

于是在 OM 的斜率为:  $K_{OM} = \frac{y_M}{x_M} = -\frac{1}{2k}$ , 即  $K_{OM} \cdot k = -\frac{1}{2}$ .

$\therefore$  直线 OM 的斜率与 l 的斜率的乘积为定值.

21. 设函数  $f(x) = \ln x + a(1-x)$ .

(I) 讨论:  $f(x)$  的单调性;

(II) 当  $f(x)$  有最大值, 且最大值大于  $2a-2$  时, 求 a 的取值范围.

解析: (I) 先求导, 再分类讨论, 根据导数即可判断函数的单调性;

(2) 先求出函数的最大值, 再构造函数  $g(a) = \ln a + a - 1$ , 根据函数的单调性即可求出 a 的范围.

答案: (I)  $f(x) = \ln x + a(1-x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,

$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x}$ ,

若  $a \leq 0$ , 则  $f'(x) > 0$ ,  $\therefore$  函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

若  $a > 0$ , 则当  $x \in (0, \frac{1}{a})$  时,  $f'(x) > 0$ , 当  $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$  时,  $f'(x) < 0$ , 所以  $f(x)$  在

$(0, \frac{1}{a})$  上单调递增, 在  $(\frac{1}{a}, +\infty)$  上单调递减,

(II), 由 (I) 知, 当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上无最大值; 当  $a > 0$  时,  $f(x)$  在  $x = \frac{1}{a}$  取得

最大值, 最大值为  $f(\frac{1}{a}) = -\ln a + a - 1$ ,

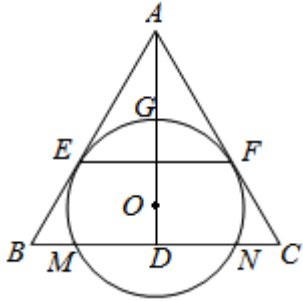
$\therefore f(\frac{1}{a}) > 2a - 2, \therefore \ln a + a - 1 < 0$ ,

令  $g(a) = \ln a + a - 1$ ,

$\therefore g(a)$  在  $(0, +\infty)$  单调递增,  $g(1) = 0, \therefore$  当  $0 < a < 1$  时,  $g(a) < 0$ ,

当  $a > 1$  时,  $g(a) > 0$ ,  $\therefore a$  的取值范围为  $(0, 1)$ .

22. 如图,  $O$  为等腰三角形  $ABC$  内一点,  $\odot O$  与  $\triangle ABC$  的底边  $BC$  交于  $M, N$  两点, 与底边上的高  $AD$  交于点  $G$ , 且与  $AB, AC$  分别相切于  $E, F$  两点.



(1) 证明:  $EF \parallel BC$ ;

(2) 若  $AG$  等于  $\odot O$  的半径, 且  $AE = MN = 2\sqrt{3}$ , 求四边形  $EBCF$  的面积.

解析: (1) 通过  $AD$  是  $\angle CAB$  的角平分线及圆  $O$  分别与  $AB, AC$  相切于点  $E, F$ , 利用相似的性质即得结论;

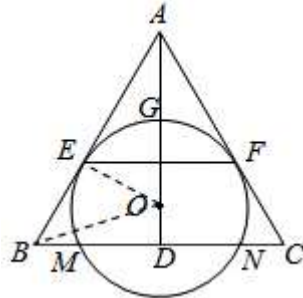
(2) 通过 (1) 知  $AD$  是  $EF$  的垂直平分线, 连结  $OE, OM$ , 则  $OE \perp AE$ , 利用  $S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AEF}$  计算即可.

答案 (1)  $\because \triangle ABC$  为等腰三角形,  $AD \perp BC$ ,  $\therefore AD$  是  $\angle CAB$  的角平分线,

又  $\because$  圆  $O$  分别与  $AB, AC$  相切于点  $E, F$ ,  $\therefore AE = AF$ ,  $\therefore AD \perp EF$ ,  $\therefore EF \parallel BC$ .

(2) 由 (1) 知  $AE = AF$ ,  $AD \perp EF$ ,  $\therefore AD$  是  $EF$  的垂直平分线,

又  $\because EF$  为圆  $O$  的弦,  $\therefore O$  在  $AD$  上, 连结  $OE, OM$ , 则  $OE \perp AE$ ,



由  $AG$  等于圆  $O$  的半径可得  $AO = 2OE$ ,

$\therefore \angle OAE = 30^\circ$ ,  $\therefore \triangle ABC$  与  $\triangle AEF$  都是等边三角形,

$\because AE = 2\sqrt{3}$ ,  $\therefore AO = 4$ ,  $OE = 2$ ,

$\because OM = OE = 2$ ,  $DM = \frac{1}{2}MN = \sqrt{3}$ ,  $\therefore OD = 1$ ,  $\therefore AD = 5$ ,  $AB = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ ,

$\therefore$  四边形  $EBCF$  的面积为  $\frac{1}{2} \times \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ .

23. 在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1: \begin{cases} x = t \cos \alpha \\ y = t \sin \alpha \end{cases}$  ( $t$  为参数,  $t \neq 0$ ,  $0 \leq \alpha < \pi$ ) 在以  $O$  为极

点,  $x$  轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线  $C_2: \rho = 2\sin \theta$ , 曲线  $C_3: \rho = 2\sqrt{3}\cos \theta$ .

(1) 求  $C_2$  与  $C_3$  交点的直角坐标;

(2) 若  $C_2$  与  $C_1$  相交于点  $A$ ,  $C_1$  与  $C_3$  相交于点  $B$ , 求  $|AB|$  的最大值.

解析: (1) 把曲线的极坐标分别化为直角坐标方程联立可得交点坐标;

(2) 求出曲线  $C_1$  的极坐标方程, 可得  $A, B$  的极坐标, 即可求  $|AB|$  的最大值.

答案: (1) 曲线  $C_2: \rho = 2\sin \theta$  化为  $\rho^2 = 2\rho\sin \theta$ ,  $\therefore x^2 + y^2 = 2y$ .

曲线  $C_3: \rho = 2\sqrt{3}\cos \theta$  化为  $\rho^2 = 2\sqrt{3}\rho\cos \theta$ ,  $\therefore x^2 + y^2 = 2\sqrt{3}x$ .

$$\text{联立 } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

$\therefore C_2$  与  $C_3$  交点的直角坐标为  $(0, 0)$  和  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$ ;

(2) 曲线  $C_1$  的极坐标方程为  $\theta = \alpha$  ( $\rho \in \mathbb{R}, \rho \neq 0$ ), 其中  $0 \leq \alpha < \pi$ .

因此  $A$  的极坐标为  $(2\sin \alpha, \alpha)$ ,  $B$  的极坐标为  $(2\sqrt{3}\cos \alpha, \alpha)$ ,

所以  $|AB| = |2\sin \alpha - 2\sqrt{3}\cos \alpha| = 4|\sin(\alpha - \frac{\pi}{3})|$ ,

当  $\alpha = \frac{5\pi}{6}$  时,  $|AB|$  取得最大值, 最大值为 4.

24. 设  $a, b, c, d$  均为正数, 且  $a+b=c+d$ , 证明:

(1) 若  $ab > cd$ , 则  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ ;

(2)  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$  是  $|a-b| < |c-d|$  的充要条件.

解析: (1) 运用不等式的性质, 结合条件  $a, b, c, d$  均为正数, 且  $a+b=c+d, ab > cd$ , 即可得证;

(2) 从两方面证, ①若  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ , 证得  $|a-b| < |c-d|$ , ②若  $|a-b| < |c-d|$ , 证得

$\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ , 注意运用不等式的性质, 即可得证.

答案: (1) 由于  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a+b+2\sqrt{ab}$ ,

$$(\sqrt{c} + \sqrt{d})^2 = c+d+2\sqrt{cd},$$

由  $a, b, c, d$  均为正数, 且  $a+b=c+d, ab > cd$ ,

则  $\sqrt{ab} > \sqrt{cd}$ ,

即有  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{c} + \sqrt{d})^2$ , 则.

(2)①若  $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{c}+\sqrt{d}$ , 则  $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > (\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$ ,

即为  $a+b+2\sqrt{ab} > c+d+2\sqrt{cd}$ ,

由  $a+b=c+d$ , 则  $ab > cd$ ,

于是  $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ ,

$(c-d)^2 = (c+d)^2 - 4cd$ ,

即有  $(a-b)^2 < (c-d)^2$ , 即为  $|a-b| < |c-d|$ ;

②若  $|a-b| < |c-d|$ , 则  $(a-b)^2 < (c-d)^2$ ,

即有  $(a+b)^2 - 4ab < (c+d)^2 - 4cd$ ,

由  $a+b=c+d$ , 则  $ab > cd$ ,

则有  $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 > (\sqrt{c}+\sqrt{d})^2$ .

综上所述,  $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{c}+\sqrt{d}$  是  $|a-b| < |c-d|$  的充要条件.