2017年普通高等学校招生全国统一考试（山东卷）数学文

一、选择题：本题共10小题，每小题5分，共50分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.设集合M={x||x-1|＜1}，N={x|x＜2}，则M∩N=(　　)

A.(-1，1)

B.(-1，2)

C.(0，2)

D.(1，2)

解析：集合M={x||x-1|＜1}=(0，2)，

N={x|x＜2}=(-∞，2)，

∴M∩N=(0，2).

答案：C.

2.已知i是虚数单位，若复数z满足zi=1+i，则z^2=(　　)

A.-2i

B.2i

C.-2

D.2

解析：∵复数z满足zi=1+i，

$\therefore z=\dfrac{1+i}{i}=1-i$，

∴z^2=-2i.

答案：A.

3.已知x，y满足约束条件$\begin{cases}x-2y+5\le 0\\x+3\ge 0\\y\le 2\end{cases}$则z=x+2y的最大值是(　　)

A.-3

B.-1

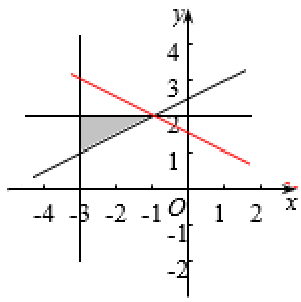
C.1

D.3

解析：x，y满足约束条件$\begin{cases}x-2y+5\le 0\\x+3\ge 0\\y\le 2\end{cases}$的可行域如图：目标函数z=x+2y经过可行域的A时，目标函数取得最大值，

由：$\begin{cases}y=2\\x-2y+5=0\end{cases}$解得A(-1，2)，

目标函数的最大值为：-1+2×2=3.



答案：D.

4.已知 $\cos x=\dfrac{3}{4}$，则 cos2x=(　　)

A. $-\dfrac{1}{4}$

B. $\dfrac{1}{4}$

C. $-\dfrac{1}{8}$

D. $\dfrac{1}{8}$

解析：$\because\cos x=\dfrac{3}{4}$，则 $\cos 2x=2\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^2-1=\dfrac{1}{8}$.

答案：D.

5.已知命题 p：$\exists x\in R$，$x^2-x+1\geqslant0$.命题 q：若 $a^2<b^2$，则 $a<b$，下列命题为真命题的是(　　)

A. $p\wedge q$

B. $p\wedge\neg q$

C. $\neg p\wedge q$

D. $\neg p\wedge\neg q$

解析：命题 p：$\exists x=0\in R$，使 $x^2-x+1\geqslant0$ 成立.

故命题 p 为真命题；

当 a=1，b=-2 时，$a^2<b^2$ 成立，但 $a<b$ 不成立，

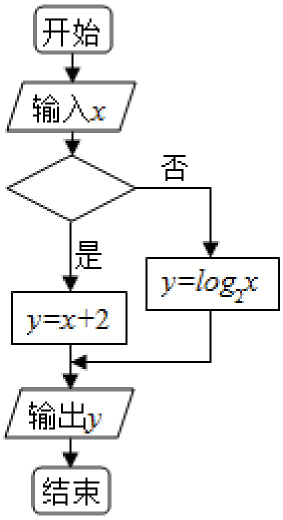
故命题 q 为假命题，

故命题 $p\wedge q$，$\neg p\wedge q$，$\neg p\wedge\neg q$ 均为假命题；

命题 $p\wedge\neg q$ 为真命题.

答案：B.

6.若执行右侧的程序框图，当输入的 x 的值为 4 时，输出的 y 的值为 2，则空白判断框中的条件可能为(　　)



A. x＞3
B. x＞4
C. x≤4
D. x≤5
解析：方法一：当 x=4，输出 y=2，则由 $y=\log_2 x$ 输出，需要 x＞4，
故选 B.
方法二：若空白判断框中的条件 x＞3，输入 x=4，满足 4＞3，输出 y=4+2=6，不满足，故 A 错误，
若空白判断框中的条件 x＞4，输入 x=4，满足 4=4，不满足 x＞3，输出 $y=y=\log_2 4=2$，故 B 正确；
若空白判断框中的条件 x≤4，输入 x=4，满足 4=4，满足 x≤4，输出 y=4+2=6，不满足，故 C 错误，
若空白判断框中的条件 x≤5，输入 x=4，满足 4≤5，满足 x≤5，输出 y=4+2=6，不满足，故 D 错误.
答案：B.

7. 函数 $y=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$ 的最小正周期为（　　）

A. $\frac{\pi}{2}$
B. $\frac{2\pi}{3}$
C. π
D. 2π

解析：∵函数 $y=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

∵ω=2，
∴T=π.
答案：C

8. 如图所示的茎叶图记录了甲、乙两组各 5 名工人某日的产量数据(单位：件).若这两组数据的中位数相等，且平均值也相等，则 x 和 y 的值分别为(　　)

甲组		乙组
6	5	9
2　5	6	1　7　y
x　4	7	8

A. 3，5
B. 5，5
C. 3，7
D. 5，7
解析：由已知中甲组数据的中位数为 65，
故乙组数据的中位数也为 65，
即 y=5，
则乙组数据的平均数为：66，
故 x=3.
答案：A.

9. 设 f(x)=x，0＜x＜12(x-1)，x≥1，若 f(a)=f(a+1)，则 f(1a)=（　　）
A. 2
B. 4
C. 6
D. 8

解析：当 a∈(0，1)时，$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},0<x<1\\2(x-1),\ x\geq 1\end{cases}$，若 f(a)=f(a+1)，可得 $\sqrt{a}=2a$，

解得 $a=\frac{1}{4}$，则：$f\left(\frac{1}{a}\right)=f(4)=2(4-1)=6$.

当 a∈[1，+∞)时. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},0<x<1\\2(x-1),\ x\geq 1\end{cases}$，若 f(a)=f(a+1)，
可得 2(a-1)=2a，显然无解.
答案：C.

10. 若函数 $e^x f(x)$(e=2.71828…是自然对数的底数)在 f(x)的定义域上单调递增，则称函数 f(x)具有 M 性质，下列函数中具有 M 性质的是(　　)
A. $f(x)=2^{-x}$
B. $f(x)=x^2$
C. $f(x)=3^{-x}$
D. f(x)=cosx

解析：当 $f(x)=2^{-x}$ 时，函数 $e^x f(x)=\left(\frac{e}{2}\right)^x$ 在 R 上单调递增，函数 f(x)具有 M 性质.

答案：A

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分

11. 已知向量$\vec{a}$=(2，6)，$\vec{b}$=(-1， λ)，若$\vec{a}//\vec{b}$，则 λ=____.

解析：∵$\vec{a}//\vec{b}$，∴-6-2λ=0，解得 λ=-3.

答案：-3.

12. 若直线$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$(a＞0，b＞0)过点(1，2)，则 2a+b 的最小值为____.

解析：直线$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$(a＞0，b＞0)过点(1，2)，则$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$，

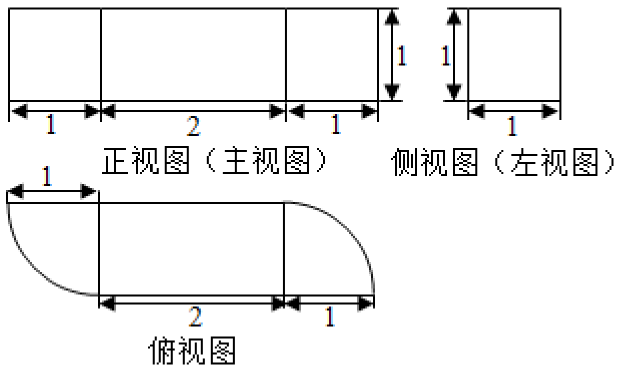
由$2a+b=(2a+b)\times\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=2+\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}+2=4+\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}\geq 4+2\sqrt{\frac{4a}{b}\times\frac{b}{a}}=4+4=8$，

当且仅当$\frac{4a}{b}=\frac{b}{a}$，即$a=\frac{1}{2}$，b=1 时，取等号，

∴2a+b 的最小值为 8.

答案：8.

13. 由一个长方体和两个$\frac{1}{4}$圆柱体构成的几何体的三视图如图，则该几何体的体积为____.



解析：由长方体长为 2，宽为 1，高为 1，则长方体的体积 V_1=2×1×1=2，

圆柱的底面半径为 1，高为 1，则圆柱的体积$V_2=\frac{1}{4}\times\pi\times 1^2\times 1=\frac{\pi}{4}$，

则该几何体的体积$V=V_1+2V_1=2+\frac{\pi}{2}$.

答案：$2+\frac{\pi}{2}$.

14. 已知 f(x)是定义在 R 上的偶函数，且 f(x+4)=f(x-2). 若当 x∈[-3，0]时，f(x)=6^{-x}，则 f(919)=____.

解析：由 f(x+4)=f(x-2). 则 f(x+6)=f(x)，

∴f(x)为周期为 6 的周期函数，

f(919)=f(153×6+1)=f(1)，

由 f(x)是定义在 R 上的偶函数，则 f(1)=f(-1)，

当 $x\in[-3,0]$时，$f(x)=6^{-x}$，

$f(-1)=6^{-(-1)}=6$，

∴$f(919)=6$.

答案：6.

15.在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞0，b＞0)的右支与焦点为 F 的抛物线 $x^2=2py$(p＞0)交于 A，B 两点，若|AF|+|BF|=4|OF|，则该双曲线的渐近线方程为____.

解析：把 $x^2=2py$(p＞0)代入双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$(a＞0，b＞0)，

可得：$a^2y^2-2pb^2y+a^2b^2=0$，

$\therefore y_A+y_B=\frac{2pb^2}{a^2}$，

∵|AF|+|BF|=4|OF|，$\therefore y_A+y_B+2\times\frac{p}{2}=4\times\frac{p}{2}$，

$\therefore \frac{2pb^2}{a^2}=p$，

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∴该双曲线的渐近线方程为：$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

答案：$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

三、解答题

16.某旅游爱好者计划从 3 个亚洲国家 A_1，A_2，A_3和 3 个欧洲国家 B_1，B_2，B_3中选择 2 个国家去旅游.

(Ⅰ)若从这 6 个国家中任选 2 个，求这 2 个国家都是亚洲国家的概率；

(Ⅱ)若从亚洲国家和欧洲国家中各任选 1 个，求这 2 个国家包括 A_1但不包括 B_1的概率.

解析：(Ⅰ)从这 6 个国家中任选 2 个，基本事件总数$n=C_6^2=15$，这 2 个国家都是亚洲国家包含的基本事件个数$m=C_3^2=3$，由此能求出这 2 个国家都是亚洲国家的概率.

(Ⅱ)从亚洲国家和欧洲国家中各任选 1 个，利用列举法能求出这 2 个国家包括 A_1但不包括 B_1的概率.

答案：(Ⅰ)某旅游爱好者计划从 3 个亚洲国家 A_1，A_2，A_3和 3 个欧洲国家 B_1，B_2，B_3中选择 2 个国家去旅游.

从这 6 个国家中任选 2 个，基本事件总数 $n=C_6^2=15$，

这 2 个国家都是亚洲国家包含的基本事件个数 $m=C_3^2=3$，

∴这 2 个国家都是亚洲国家的概率 $P=\frac{m}{n}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

(Ⅱ)从亚洲国家和欧洲国家中各任选 1 个，包含的基本事件个数为 9 个，分别为：
(A_1，B_1)，(A_1，B_2)，(A_1，B_3)，(A_2，B_1)，(A_2，B_2)，
(A_2，B_3)，(A_3，B_1)，(A_3，B_2)，(A_3，B_3)，
这 2 个国家包括 A_1 但不包括 B_1 包含的基本事件有：(A_1，B_2)，(A_1，B_3)，共 2 个，
∴这 2 个国家包括 A_1 但不包括 B_1 的概率 P=$\frac{2}{9}$.

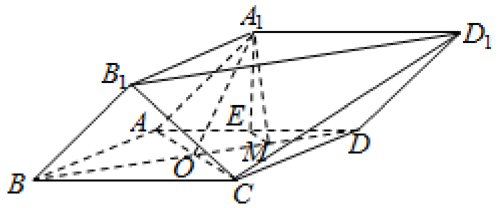
17. 在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 b=3，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6$，$S_{\triangle ABC}=3$，求 A 和 a.
解析：根据向量的数量积和三角形的面积公式可得 tanA=-1，求出 A 和 c 的值，再根据余弦定理即可求出 a.
答案：由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-6$ 可得 bccosA=-6，①，
由三角形的面积公式可得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=3$，②
∴tanA=-1，
∵0＜A＜180°，
∴A=135°，

$$\therefore c=\frac{6}{3\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2},$$

由余弦定理可得 $a^2=b^2+c^2-2bccosA=9+8+12=29$

$$\therefore a=\sqrt{29}$$

18. 由四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 后得到的几何体如图所示，四边形 ABCD 为正方形，O 为 AC 与 BD 的交点，E 为 AD 的中点，A_1E⊥平面 ABCD，
(Ⅰ)证明：A_1O∥平面 B_1CD_1；
(Ⅱ)设 M 是 OD 的中点，证明：平面 A_1EM⊥平面 B_1CD_1.



解析：(Ⅰ)取 B_1D_1 中点 G，连结 A_1G、CG，推导出 A_1G∥OC，从而四边形 $OCGA_1$ 是平行四边形，进而 A_1O∥CG，由此能证明 A_1O∥平面 B_1CD_1.
(Ⅱ)推导出 BD⊥A_1E，AO⊥BD，EM⊥BD，从而 BD⊥平面 A_1EM，再由 BD∥B_1D_1，得 B_1D_1⊥平面

A_1EM，由此能证明平面 $A_1EM\perp$ 平面 B_1CD_1.

答案：(Ⅰ)取 B_1D_1 中点 G，连结 A_1G、CG，

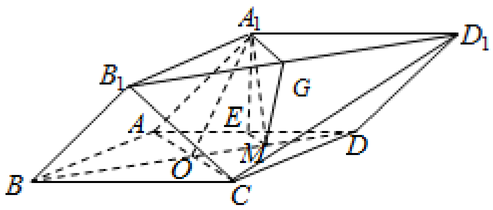
∵四边形 ABCD 为正方形，O 为 AC 与 BD 的交点，

∴四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 后，$A_1G \underset{=}{//} OC$，

∴四边形 $OCGA_1$ 是平行四边形，∴$A_1O\parallel CG$，

∵$A_1O\not\subset$ 平面 B_1CD_1，$CG\subset$ 平面 B_1CD_1，

∴$A_1O\parallel$ 平面 B_1CD_1.



(Ⅱ)四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 截去三棱锥 $C_1-B_1CD_1$ 后，$BD\underset{=}{//}B_1D_1$，

∵M 是 OD 的中点，O 为 AC 与 BD 的交点，E 为 AD 的中点，$A_1E\perp$ 平面 ABCD，

又 $BD\subset$ 平面 ABCD，∴$BD\perp A_1E$，

∵四边形 ABCD 为正方形，O 为 AC 与 BD 的交点，

∴$AO\perp BD$，

∵M 是 OD 的中点，E 为 AD 的中点，∴$EM\perp BD$，

∵$A_1E\cap EM=E$，∴$BD\perp$ 平面 A_1EM，

∵$BD\parallel B_1D_1$，∴$B_1D_1\perp$ 平面 A_1EM，

∵$B_1D_1\subset$ 平面 B_1CD_1，

∴平面 $A_1EM\perp$ 平面 B_1CD_1.

19. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，且 $a_1+a_2=6$，$a_1a_2=a_3$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 通项公式；

(2)$\{b_n\}$ 为各项非零的等差数列，其前 n 项和为 S_n，已知 $S_{2n+1}=b_nb_{n+1}$，求数列 $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

解析：(1)通过首项和公比，联立 $a_1+a_2=6$、$a_1a_2=a_3$，可求出 $a_1=q=2$，进而利用等比数列的通项公式可得结论；

(2)利用等差数列的性质可知 $S_{2n+1}=(2n+1)b_{n+1}$，结合 $S_{2n+1}=b_nb_{n+1}$ 可知 $b_n=2n+1$，进而可知 $\dfrac{b_n}{a_n}=\dfrac{2n+1}{2^n}$，利用错位相减法计算即得结论.

答案：(1)记正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

因为 $a_1+a_2=6$，$a_1a_2=a_3$，

所以 $(1+q)a_1=6$，$qa_1^2=q^2a_1$，

解得：$a_1=q=2$，

所以 $a_n=2^n$；

(2)因为 $\{b_n\}$ 为各项非零的等差数列，

所以 $S_{2n+1}=(2n+1)b_{n+1}$，
又因为 $S_{2n+1}=b_nb_{n+1}$，

所以 $b_n=2n+1$，$\frac{b_n}{a_n}=\frac{2n+1}{2^n}$，

所以 $T_n=3\cdot\frac{1}{2}+5\cdot\frac{1}{2^2}+\ldots+(2n+1)\cdot\frac{1}{2^n}$，

$\frac{1}{2}T_n=3\cdot\frac{1}{2^2}+5\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots+(2n-1)\cdot\frac{1}{2^n}+(2n+1)\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$，

两式相减得：$\frac{1}{2}T_n=3\cdot\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)-(2n+1)\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$，

即 $\frac{1}{2}T_n=3\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-(2n+1)\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$，

即 $T_n=3+1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)-(2n+1)\cdot\frac{1}{2^n}=3+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-(2n+1)\cdot\frac{1}{2^n}$

$=5-\frac{2n+5}{2^n}$.

20. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2$，a∈R，
(1) 当 a=2 时，求曲线 y=f(x) 在点(3，f(3))处的切线方程；
(2) 设函数 g(x)=f(x)+(x-a)cosx-sinx，讨论 g(x) 的单调性并判断有无极值，有极值时求出极值.
解析：(1) 根据导数的几何意义即可求出曲线 y=f(x) 在点(3，f(3))处的切线方程，
(2) 先求导，再分类讨论即可求出函数的单调区间和极值

答案：(1) 当 a=2 时，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$，

∴f′(x)=x^2-2x，

∴k=f′(3)=9-6=3，f(3)=$\frac{1}{3}$×27-9=0，

∴曲线 y=f(x) 在点(3，f(3))处的切线方程 y=3(x-3)，即 3x-y-9=0

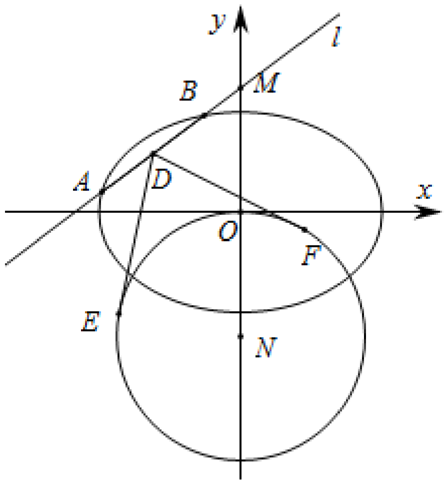
(2) 函数 $g(x)=f(x)+(x-a)\cos x-\sin x=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+(x-a)\cos x-\sin x$，

∴g′(x)=(x-a)(x-sinx)，
令 g′(x)=0，解得 x=a，或 x=0，
①若 a＞0 时，当 x＜0 时，g′(x)＞0 恒成立，故 g(x) 在(-∞，0)上单调递增，
当 x＞a 时，g′(x)＞0 恒成立，故 g(x) 在(a，+∞)上单调递增，
当 0＜x＜a 时，g′(x)＜0 恒成立，故 g(x) 在(0，a)上单调递减，

∴当 x=a 时，函数有极小值，极小值为 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$

当 x=0 时，有极大值，极大值为 g(0)=-a，
②若 a＜0 时，当 x＞0 时，g′(x)＞0 恒成立，故 g(x)在(-∞，0)上单调递增，
当 x＜a 时，g′(x)＞0 恒成立，故 g(x)在(-∞，a)上单调递增，
当 a＜x＜0 时，g′(x)＜0 恒成立，故 g(x)在(a，0)上单调递减，
∴当 x=a 时，函数有极大值，极大值为 $g\left(a\right)=-\dfrac{1}{6}a^3-\sin a$
当 x=0 时，有极小值，极小值为 g(0)=-a
③当 a=0 时，g′(x)=x(x+sinx)，
当 x＞0 时，g′(x)＞0 恒成立，故 g(x)在(0，+∞)上单调递增，
当 x＜0 时，g′(x)＞0 恒成立，故 g(x)在(-∞，0)上单调递增，
∴g(x)在 R 上单调递增，无极值.

21.在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$(a＞b＞0)的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆 C 截直线 y=1 所得线段的长度为$2\sqrt{2}$.
(Ⅰ)求椭圆 C 的方程；
(Ⅱ)动直线 l：y=kx+m(m≠0)交椭圆 C 于 A，B 两点，交 y 轴于点 M.点 N 是 M 关于 O 的对称点，⊙N 的半径为|NO|.设 D 为 AB 的中点，DE，DF 与⊙N 分别相切于点 E，F，求∠EDF 的最小值.



解析：(Ⅰ)首先根据题中信息可得椭圆 C 过点($\sqrt{2}$，1)，然后结合离心率可得椭圆方程；(Ⅱ)可将题目所求角度的最小值转化为求角度正弦的最小值，结合题目信息可求得 D、N 坐标及⊙N 半径，进而将 DN 长度表示出来，可求∠EDF 最小值.

答案：(Ⅰ)∵椭圆 C 的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$\dfrac{a^2-b^2}{a^2}=\dfrac{1}{2}$，$a^2=2b^2$，
∵椭圆 C 截直线 y=1 所得线段的长度为$2\sqrt{2}$，
∴椭圆 C 过点($\sqrt{2}$，1)，

$\therefore \frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$，

$\therefore b^2=2$，$a^2=4$，

$\therefore$椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

(Ⅱ)设 A，B 的横坐标为 x_1，x_2，

则 A(x_1，kx_1+m)，B(x_2，kx_2+m)，D($\frac{x_1+x_2}{2},\frac{k}{2}(x_1+x_2)+m$)，

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\\ y=kx+m\end{cases}$可得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-4=0$，

$\therefore x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，

$\therefore$D($-\frac{2km}{1+2k^2},\frac{m}{1+2k^2}$)，

$\because$M(0，m)，则 N(0，-m)，

$\therefore$⊙N 的半径为|m|，

$$|DN|=\sqrt{\left(\frac{m}{1+2k^2}+m\right)^2+\left(\frac{-2km}{1+2k^2}\right)^2}=\frac{|2m|}{1+2k^2}\sqrt{k^4+3k^2+1},$$

设∠EDF=α，

$$\therefore \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{EN}{DN}=\frac{ON}{DN}=\frac{m}{\frac{2m}{1+2k^2}\sqrt{k^4+3k^2+1}}=\frac{1+2k^2}{2\sqrt{k^4+3k^2+1}},$$

令$y=\frac{1+2k^2}{2\sqrt{k^4+3k^2+1}}$，则$y'=\frac{1}{2}\frac{k(4k^2+1)}{\sqrt{k^4+3k^2+1}\left(k^4+3k^2+1\right)}$，

当 k=0 时，$\sin\frac{\alpha}{2}$取得最小值，最小值为$\frac{1}{2}$.

$\therefore$∠EDF 的最小值是 60°.